

С. Н. Склепус

## О ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

*Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины,  
ул. Дм. Пожарского, 2/10, 61046, Харьков, Украина; e-mail: snsklepus@ukr.net*

**Abstract.** The creep and damageability of isotropic shallow shells and plates with arbitrary shape made from materials with characteristics dependent on the kind of loading are studied. To state the problem, the constitutive equations are used which describe the creep of initially isotropic materials with characteristics depending on the kind of loading, associated with the nucleation and growth of planar microcracks with the preferred orientation. The non-linear initial-boundary value problem of creep and damageability of shallow shells and plates with complex shape is solved basing on the combined application of the  $R$ -functions, Ritz and the Runge – Kutta – Merson methods. The examples of calculation of the plate and the spherical shallow shell made from aluminum alloy AK4-1T are shown. An influence of direction of external loading on the stress-strain state and damage evolution with time is discussed.

**Key words:** creep, damageability, time to fracture, plate, shallow shell,  $R$ -functions method.

### Введение.

Существует широкий класс материалов, характеристики которых при ползучести зависят от вида нагружения. Это, прежде всего, легкие сплавы, суперсплавы, порошковые материалы, пластмассы, полимеры, керамика и др. Как правило, процесс ползучести данных материалов сопровождается накоплением повреждений в виде микротрещин и микропор. Для первоначально изотропных материалов, характеристики ползучести и повреждаемости которых зависят от вида нагружения, характерны следующие эффекты деформирования: различное поведение материала при растяжении и сжатии, независимый закон деформирования при чистом кручении, неупругая сжимаемость, влияние гидростатического давления, эффект Пойнтинга, различное развитие повреждаемости при растяжении, сжатии и кручении, анизотропия, обусловленная повреждаемостью [8, 16]. Использование таких материалов в технике требует создания соответствующих моделей деформирования (определяющих соотношений ползучести) и исследования особенностей поведения конструктивных элементов в условиях ползучести.

Решению задач ползучести и повреждаемости вследствие ползучести оболочек и пластин посвящены многие статьи и монографии [1, 3, 9, 10, 12 – 15, 17, 18 и др.]. В большинстве работ рассмотрены различные аспекты ползучести и повреждаемости пластин и оболочек из материалов, нечувствительных к виду нагружения. Существуют лишь единичные публикации, в которых исследовано влияние вида нагружения на ползучесть оболочек. Так, в работах [4 – 7, 12] исследована ползучесть оболочек из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения без учета повреждаемости материала.

В данной статье исследована ползучесть с учетом повреждаемости начально изотропных пологих оболочек и пластин из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения.

Цель данной работы состоит в:

а) сопоставлении результатов решения задачи ползучести и повреждаемости пологих оболочек и пластин, полученных на базе определяющих соотношений, учитывающих зависимость характеристик материала от вида нагружения и результатов, полученных с помощью «классических» соотношений, описывающих ползучесть материалов, нечувствительных к виду нагружения;

б) исследовании характерных особенностей поведения в условиях ползучести пологих оболочек и пластин из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения.

### 1. Постановка и метод решения начально-краевой задачи ползучести пологих оболочек произвольной формы в плане.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2z$  изотропную тонкую пологую оболочку толщиной  $h$  и произвольной формы  $\Omega$  в плане. Ось  $Oz$  перпендикулярна плану оболочки. Температура оболочки постоянная:  $T(x_1, x_2, z, t) = \text{const}$ . Оболочка нагружена поперечной нагрузкой  $q_z = q_z(x_1, x_2, t)$ . Стрела подъема оболочки над плоскостью  $Ox_1x_2$ :  $f < a/5$ , где  $a$  – наименьший характерный размер оболочки. Оболочка предполагается достаточно тонкой ( $10 \leq a/h \leq 80$ ), чтобы выполнялись гипотезы Кирхгофа – Лява. Задачу решаем в геометрически линейной, квазистатической постановке и в предположении, что в процессе деформирования пластические деформации не возникают.

Принимаем, что компоненты скоростей упругих деформаций  $\dot{\varepsilon}_{kl}^e$  и скоростей необратимых деформаций ползучести  $\dot{p}_{kl}$  аддитивны:  $\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{p}_{kl}$  ( $k, l = \overline{1, 2}$ ). Здесь и далее точка над символами означает полную производную по времени.

Краевая задача ползучести, в произвольный момент времени  $t \neq 0$ , может быть сведена к вариационной задаче для функционала в форме Лагранжа, определенного на кинематических возможных скоростях перемещений [7, 8]

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}) = 0, 5 \iint_{\Omega} \{ & A_1 (\dot{u}_{1,1}^2 + \dot{u}_{2,2}^2 + \dot{w}^2 (k_1^2 + k_2^2) + \\
 & + 2A_2 (\dot{u}_{1,1}\dot{u}_{2,2} + \dot{w}(k_1\dot{u}_{2,2} + k_2\dot{u}_{1,1}) + k_1k_2\dot{w}^2) + A_3 (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})^2 - \\
 & - 2B_1 (\dot{u}_{1,1}\dot{w}_{,11} + \dot{u}_{2,2}\dot{w}_{,22} + \dot{w}(k_1\dot{w}_{,11} + k_2\dot{w}_{,22})) - \\
 & - 2B_2 (\dot{u}_{1,1}\dot{w}_{,22} + \dot{u}_{2,2}\dot{w}_{,11} + \dot{w}(k_1\dot{w}_{,22} + k_2\dot{w}_{,11})) - \\
 & - 2B_3 \dot{w}_{,12} (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) + D_1 (\dot{w}_{,11}^2 + \dot{w}_{,22}^2) + 2D_2 \dot{w}_{,11} \dot{w}_{,22} + D_3 \dot{w}_{,12}^2 \} dx_1 dx_2 - \\
 & - \iint_{\Omega} (\dot{N}_{11}^c \dot{u}_{1,1} + \dot{N}_{22}^c \dot{u}_{2,2} + \dot{N}_{12}^c (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})) dx_1 dx_2 + \\
 & + \iint_{\Omega} (\dot{M}_{11}^c \dot{w}_{,11} + \dot{M}_{22}^c \dot{w}_{,22} + 2\dot{M}_{12}^c \dot{w}_{,12}) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} (\dot{q}^c + \dot{q}_z) \dot{w} dx_1 dx_2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\dot{u}_1(x_1, x_2, t)$ ,  $\dot{u}_2(x_1, x_2, t)$ ,  $\dot{w}(x_1, x_2, t)$  – скорости перемещений координатной поверхности оболочки вдоль осей  $Ox_1, Ox_2, Oz$ , соответственно;  $k_1, k_2$  – главные кривизны оболочки.

Жесткостные характеристики оболочки вычисляем по формулам:

$$A_1 = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} dz; \quad A_2 = \nu A_1; \quad A_3 = \int_{(h)} G dz; \quad B_1 = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz; \quad B_2 = \nu B_1; \quad B_3 = 2 \int_{(h)} Gz dz;$$

$$D_1 = \int_{(h)} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz; \quad D_2 = \nu D_1; \quad D_3 = 4 \int_{(h)} Gz^2 dz,$$

а «фиктивные» силы, обусловленные ползучестью – по формулам:

$$\dot{N}_{11}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) dz; \quad \dot{N}_{22}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11}) dz; \quad \dot{N}_{12}^c = 2 \int_{(h)} G \dot{p}_{12} dz;$$

$$\dot{M}_{11}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) dz; \quad \dot{M}_{22}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11}) dz; \quad \dot{M}_{12}^c = 2 \int_{(h)} G \dot{p}_{12} z dz;$$

$$\dot{q}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} [k_1 (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) + k_2 (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11})] dz.$$

Здесь  $E, \nu, G$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала оболочки. Компоненты тензора скоростей деформаций ползучести  $\dot{p}_{11}, \dot{p}_{22}, \dot{p}_{12}$ , входящие в выражения для «фиктивных» сил, принимаем заданными.

В расчетах используем определяющие уравнения, описывающие ползучесть первоначально изотропных материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения, в которых наблюдается дислокационная ползучесть, ассоциированная с образованием и ростом на гранях зерен микротрещин с преимущественной ориентацией [8, 16]:

$$\dot{p}_{kl} = \sigma_e^m \psi^{-\beta} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q \left( \frac{C \sigma_{ij} + A I_1 \delta_{ij}}{\sigma_{e2}} + \alpha B e_k e_l \right) \quad (k, l = \overline{1, 2}), \quad (2)$$

где  $\sigma_e = \sigma_{e2} + \alpha \sigma_{e1}$ ,  $\sigma_{e1} = B e_k \sigma_{kl} e_l$ ;  $\sigma_{e2} = \sqrt{A I_1^2 + C I_2}$ ,  $I_1 = \sigma_{kk}$ ,  $I_2 = \sigma_{kl} \sigma_{lk}$ ;  $\alpha$  – некоторый весовой коэффициент;  $e_1, e_2$  – компоненты единичного вектора  $\mathbf{e}$ , характеризующего ориентацию микротрещин и направленного перпендикулярно к плоскости трещины;  $A, B, C$  – параметры материала, которые определены на основе данных базовых экспериментов на одноосное растяжение, одноосное сжатие и чистое кручение [8, 16].

При построении определяющих уравнений (2) полагалось, что процессы ползучести и повреждаемости протекают одновременно и оказывают взаимное влияние друг на друга. Принято, что эквивалентное напряжение  $\sigma_e$  является инвариантной скалярной функцией тензора напряжений Коши  $(\sigma_{ij})$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ) и диадного произведения  $\Omega \otimes \mathbf{e}$ , где  $\Omega = \psi \mathbf{e}$  – вектор повреждаемости [8]. Направленный характер повреждаемости описывается тензором повреждаемости  $\Psi = (\psi_{ij}) = \psi \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$ . Очевидно, что  $\dot{\Psi} = \text{tr} \Psi = \dot{\psi}_{ii}$ .

Если в качестве скалярного параметра повреждаемости ( $\psi \in [0, \psi_*]$ ) принять удельную энергию рассеяния  $\psi = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} dt$  [2], то кинетическое уравнение для параметра повреждаемости может быть записано в виде [8, 16]

$$\dot{\psi} = \sigma_e^{m+1} \psi^{-\beta} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q. \quad (3)$$

Начальное значение  $\psi(0) = 0$  соответствует неповрежденному состоянию, а критическое значение  $\psi_*(t_*) = \int_0^{t_*} \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} dt$  – времени окончания скрытого разрушения  $t_*$ .

В дальнейшем полагаем, что микротрещины ориентируются перпендикулярно направлению действия максимального главного напряжения  $\sigma_1$ , действующего в плоскости  $Ox_1x_2$ . В этом случае компоненты вектора  $\mathbf{e}$  могут быть определены по формулам:

$$e_1 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_1)^2 + \sigma_{12}^2}}; \quad e_2 = \pm \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_1)^2 + \sigma_{12}^2}},$$

где  $\sigma_1 = 0,5(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2})$ .

Уравнения (2), (3) описывают перечисленные выше эффекты деформирования, определяющие зависимость характеристик ползучести и повреждаемости от вида нагружения.

Рассмотрим процедуру определения параметров материала, входящих в определяющие соотношения (2). Для этого необходимо иметь результаты базовых экспериментов над макрообразцами при одноосном напряженном состоянии и при чистом кручении. Пусть в результате экспериментов на одноосное растяжение ( $\sigma_{11} > 0$ ) и одноосное сжатие ( $\sigma_{11} < 0$ ) установлено, что

$$\dot{p}_{11} = K_+ \sigma_{11}^m \psi^{-\beta} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q; \quad \psi = \sigma_{11} p_{11}; \quad \dot{p}_{11} = -K_- |\sigma_{11}|^m \psi^{-\beta} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q; \quad \psi = \sigma_{11} p_{11}.$$

Аналогично, в случае чистого кручения ( $\sigma_{12} \neq 0$ ) будем иметь:

$$2\dot{p}_{12} = K_0 \sigma_{12}^m \psi^{-\beta} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q; \quad \psi = 2\sigma_{12} p_{12}.$$

Здесь  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$ ,  $m$ ,  $\beta$ ,  $q$  – константы материала.

Записав уравнения (2) для одноосного растяжения, сжатия и чистого кручения и сопоставив с соответствующими формулами, установленными для базовых экспериментов, получим систему уравнений:

$$(\sqrt{A+C} + \alpha B)^{m+1} = K_+; \quad (\sqrt{A+C})^{m+1} = K_-; \quad (\sqrt{2C} + \alpha B)^{m+1} = K_0,$$

из которой можно определить параметры  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

$$\alpha B = K_+^{\frac{1}{m+1}} - K_-^{\frac{1}{m+1}}; \quad C = 0,5 \left( K_0^{\frac{1}{m+1}} - \alpha B \right)^2; \quad A = K_-^{\frac{2}{m+1}} - C. \quad (4)$$

Уравнения (2), (3) описывают различное поведение материала при растяжении, сжатии и кручении, различное развитие повреждаемости при растяжении, сжатии и кручении, сжимаемость материала при ползучести, эффект Пойнтинга; влияние гидростатического давления, а также анизотропию, обусловленную повреждаемостью.

Основные неизвестные задачи ползучести и повреждаемости вследствие ползучести в произвольной точке оболочки можно определить из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} = \dot{u}_1; \quad \frac{du_2}{dt} = \dot{u}_2; \quad \frac{dw}{dt} = \dot{w}; \quad \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{1,1} + k_1 \dot{w} - z \dot{w}_{,11}; \quad \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{2,2} + k_2 \dot{w} - z \dot{w}_{,22}; \\ \frac{d\gamma_{12}}{dt} = \dot{\gamma}_{1,2} + \dot{\gamma}_{2,1} - 2z \dot{w}_{,12}; \quad \frac{d\sigma_{11}}{dt} = \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{\varepsilon}_{11} + \nu \dot{\varepsilon}_{22} - (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22})]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{d\sigma_{22}}{dt} = \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{\epsilon}_{22} + \nu\dot{\epsilon}_{11} - (\dot{p}_{22} + \nu\dot{p}_{11})]; \quad \frac{d\sigma_{12}}{dt} = G(\dot{\gamma}_{12} - 2\dot{p}_{12});$$

$$\frac{dp_{11}}{dt} = \dot{p}_{11}; \quad \frac{dp_{22}}{dt} = \dot{p}_{22}; \quad \frac{dp_{12}}{dt} = \dot{p}_{12}; \quad \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}.$$

В начальный момент времени  $t=0$  деформации ползучести и параметр повреждаемости равны нулю:  $p_{11} = p_{22} = p_{12} = \psi = 0$ . Начальные условия для остальных неизвестных функций следуют из решения задачи упругого деформирования оболочки. Для решения упругой задачи может быть использован приведенный выше функционал. При этом в формуле (1) необходимо заменить производные функций по времени самими функциями, а при вычислении «фиктивных» сил положить  $\dot{p}_{11} = \dot{p}_{22} = \dot{p}_{12} = 0$ .

Решение начальной задачи для системы уравнений (5) будем проводить методом Рунге – Кутты – Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага по времени. Правые части уравнений, в моменты времени, соответствующие схеме РКМ, будем определять согласно решению вариационной задачи для функционала (1), которую решаем методом Ритца в сочетании с методом  $R$ -функций [11]. Метод  $R$ -функций позволяет точно учитывать геометрическую форму и граничные условия самого общего вида. При этом приближенное решение краевой задачи представляется в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем (общая структура решения) или части (частичная структура решения) граничных условий и является инвариантной относительно геометрической формы области.

## 2. Численные исследования.

Рассмотрим ползучесть квадратной ( $2a \times 2a$ ) шарнирно опертой пластины из алюминиевого сплава АК4-1Т при температуре  $T = 473$  К. Геометрические размеры:  $a = 4 \cdot 10^{-2}$  м, толщина  $h = 8 \cdot 10^{-3}$  м. Пластина нагружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q_z = 10$  МПа. Упругие константы материала:  $E = 60$  ГПа,  $\nu = 0,35$ . Константы материала [2]:  $\beta = 0$ ,  $m = 8$ ,  $q = 3$ ,  $K_+ = 55,0$  ГПа $^{-m}$ ч $^{-1}$ ,  $K_- = 22,5$  ГПа $^{-m}$ ч $^{-1}$ ,  $K_0 = 1,14 \cdot 10^4$  ГПа $^{-m}$ ч $^{-1}$ . Критическое значение параметра повреждаемости  $\psi_* = 10$  МДж/м $^3$  получено согласно эксперимента в работе [2]. Параметры материала, в определяющих уравнениях ползучести, определенные по формулам (4):  $A = -7,33142 \cdot 10^{-6}$  МПа $^{-\frac{2m}{m+1}}$ ч $^{-\frac{2}{m+1}}$ ;  $\alpha B = 3,17926 \cdot 10^{-4}$  МПа $^{-\frac{m}{m+1}}$ ч $^{-\frac{1}{m+1}}$ ;  $C = 1,6603 \cdot 10^{-5}$  МПа $^{-\frac{2m}{m+1}}$ ч $^{-\frac{2}{m+1}}$ .

На контуре пластины заданы условия шарнирного закрепления, неподвижного в тангенциальном направлении. В этом случае кинематические граничные условия и соответствующая частичная структура решения имеют вид

$$\dot{w} = 0; \quad \dot{u}_\tau = \dot{u}_2 n_1 - \dot{u}_1 n_2 = 0; \quad \dot{w} = \omega \Phi_1; \quad \dot{u}_1 = \omega_{,1} \Phi_2 + \omega \Phi_3; \quad \dot{u}_2 = \omega_{,2} \Phi_2 + \omega \Phi_4.$$

Здесь  $\Phi_i (i = \overline{1,4})$  – неопределенные компоненты структуры решения;  $n_1, n_2$  – направляющие косинусы внешней нормали  $\mathbf{n}$  к контуру оболочки  $\partial\Omega$ . Функция  $\omega(x_1, x_2)$  строится с помощью теории  $R$ -функций и должна удовлетворять условиям:  $\omega = 0$ ,  $\omega_{,n} = -1$  на границе  $\partial\Omega$  и  $\omega > 0$  внутри области  $\Omega$ .

При численной реализации неопределенные компоненты представлялись в виде конечных рядов вида

$$\Phi_i(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{N_i} C_n^{(i)}(t) f_n^{(i)}(x_1, x_2),$$

где  $C_n^{(i)}(t)$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) – неопределенные коэффициенты, которые на каждом временном шаге находятся методом Рунге;  $t$  – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета;  $\{f_n^{(i)}\}$  – системы линейно независимых функций. Здесь в качестве  $\{f_n^{(i)}\}$  использовались степенные полиномы.

Нормализованное до первого порядка уравнение границы области  $\Omega$  имеет такой вид:  $\omega(x) = (F_1 \wedge_0 F_2) = 0$ , где  $F_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2)$ ,  $F_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2)$ ;  $\wedge_0$  – символ  $R$ -конъюнкции [11]:  $f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ .

Интегрирование по области  $\Omega$ , при вычислении элементов системы Рунге, и по толщине, при вычислении «фиктивных» сил, проведено с помощью квадратурных формул Гаусса различной степени точности.

Установлено, что стабилизация приближенного решения достигается при следующих значениях степеней полиномов:  $P_1 = 14$ ,  $P_2 = 10$ ,  $P_3 = P_4 = 11$  и общем числе узлов интегрирования по четверти области, равном 392. Количество узлов интегрирования по толщине равнялось 14. Заданная погрешность решения задачи Коши методом Рунге – Кутты – Мерсона  $\delta = 10^{-4}$ .

Критерием окончания процесса решения и определения времени до разрушения было выполнение в какой-либо точке пространственной дискретизации такого условия:  $\psi \geq 0,99\psi_*$ .

Было определено время до разрушения  $t_*$ , которое составило 5465 ч. Разрушение начинается на верхней ( $z = -0,5h$ ) поверхности пластины.

Также был выполнен расчет пластины на базе «классических» определяющих соотношений, основанных только на экспериментальных данных при растяжении [8]. Время до разрушения составило  $t_{*кл} = 332$  ч, что примерно в 16 раз отличается от  $t_*$ .

На рис. 1 показано изменение во времени прогибов (кривая 1), интенсивности напряжений на верхней (кривая 2) и нижней (кривая 3) поверхностях в центре пластины. Как следует из рисунка, для интенсивности напряжений имеем различную качественную картину ее изменения. На верхней поверхности в начальные моменты времени происходит рост напряжений, вследствие чего процесс ползучести интенсифицируется, и только затем начинается релаксация напряжений. На нижней поверхности, где действуют растягивающие напряжения, релаксация напряжений происходит в течение всего процесса ползучести, вплоть до окончания времени скрытого разрушения.

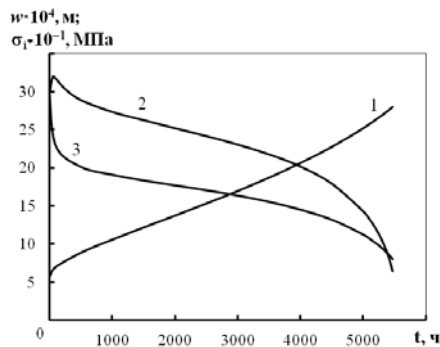


Рис. 1

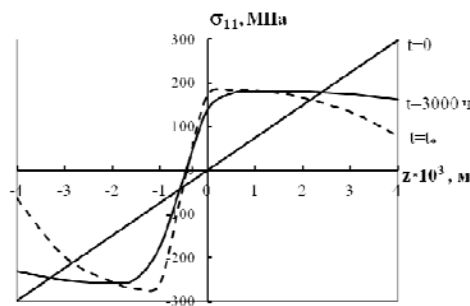


Рис. 2

Рис. 2 иллюстрирует распределение нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  по толщине в центре пластины в различные моменты времени:  $t = 0$ ,  $t = 3000$  ч и  $t = t_*$  (прерывистая линия). Из представленных результатов следует, что при учете зависимости свойств материала от вида нагружения в пластине возникают отличные от нуля мембранные

напряжения, а нейтральная поверхность смещается в сторону верхней поверхности пластины. На рис. 3 показано распределение повреждаемости по толщине в центре пластины в различные моменты времени. Из рисунка видно, что повреждаемость распределена по толщине асимметрично.

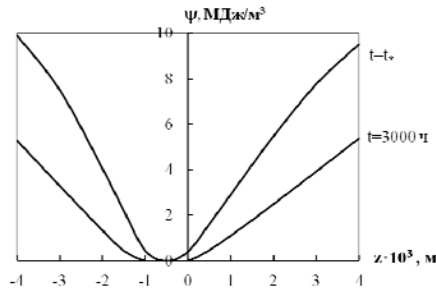


Рис. 3

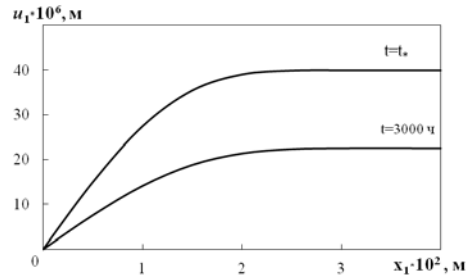


Рис. 4

Вследствие асимметричной ползучести в пластине возникают перемещения  $u_1, u_2$  в срединной плоскости, которые будут отсутствовать в пластине из традиционного материала, нечувствительного к виду нагружения. На рис. 4 показаны перемещения  $u_1$  точек срединной поверхности пластины ( $z = 0$ ) вдоль координатной оси  $Ox_1$ , в сечении  $x_2 = 0$ , для моментов времени:  $t = 3000$  ч и  $t = t_*$ . Очевидно, что «классические» определяющие соотношения ползучести не описывают вышеперечисленные эффекты.

Далее исследуем ползучесть квадратной в плане сферической оболочки. Материал оболочки, температура, размеры в плане и толщина – те же, что и в предыдущем примере. Оболочка находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки  $|q_z| = 10$  МПа (главные кривизны:  $k_1 = k_2 = 10,0 \text{ м}^{-1}$ ).

На контуре оболочки заданы условия свободного опирания. При таком виде закрепления перемещения  $u_1, u_2$  и их скорости на границе не равны нулю. Кинематическое граничное условие и соответствующая частичная структура решения принимают такой вид:  $\dot{w} = 0$ ;  $\dot{w} = \omega \Phi_1$ ;  $\dot{u}_1 = \Phi_2$ ;  $\dot{u}_2 = \Phi_3$ .

Определены времена до разрушения:  $t_{*1} = 50835$  ч, при действии на оболочку наружного давления ( $q_z = 10,0$  МПа) и  $t_{*2} = 72851$  ч, при действии на оболочку внутреннего давления ( $q_z = -10,0$  МПа). В обоих случаях разрушение начинается в центре на внутренней поверхности оболочки, где интенсивность напряжений в начальный момент времени максимальна. Время до разрушения зависит от направления приложенной нагрузки. При действии на оболочку внутреннего давления в ней преобладают сжимающие напряжения. Процесс ползучести для данного материала при сжатии идет медленнее и, соответственно, время до разрушения оказывается большим, чем в случае наружного давления той же интенсивности.

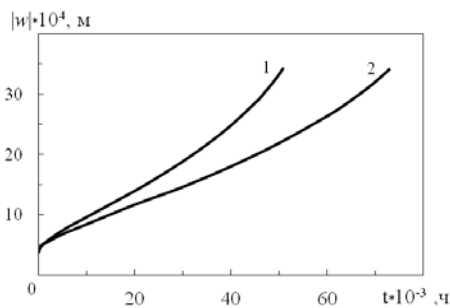


Рис. 5

Также был выполнен расчет оболочки под наружным давлением на базе «классических» определяющих соотношений. Время до разрушения составило  $t_{*кр} = 5205$  ч, что на порядок меньше, чем  $t_{*1}$  и  $t_{*2}$ .

Результаты расчетов оболочки представлены на рис. 5 – 7. Все данные приведены в центре оболочки. Кривые 1, 2 соответствуют результату, полученным для наружного и внутреннего давлений.

На рис. 5 показан рост во времени абсолютных значений прогибов. Рис. 6 иллюстрирует изменение во времени интенсивности напряжений на внутренней (рис. 6, а) внешней (рис. 6, б) поверхностях оболочки. На рис. 7 представлены графики для параметра повреждаемости на внутренней поверхности, где начинается разрушение.

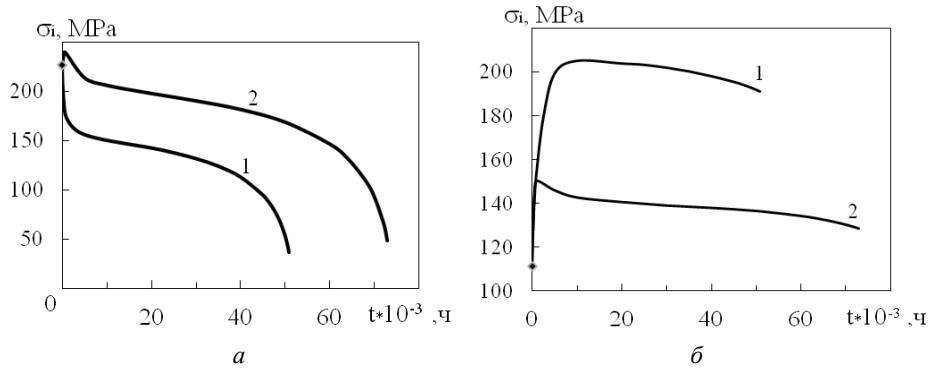


Рис. 6

Как следует из представленных результатов расчета, абсолютные величины прогибов, напряжений и уровень повреждаемости зависят от знака поперечной внешней нагрузки, при одной и той же ее интенсивности. При действии на оболочку наружного давления растягивающие напряжения на внутренней поверхности уменьшаются в течение всего процесса ползучести (рис. 6, а, кривая 1). При действии на оболочку внутреннего давления сжимающие напряжения в начале процесса возрастают по абсолютной величине, а затем уменьшаются, вплоть до окончания времени скрытого разрушения. При этом их абсолютные значения выше, чем при наружном давлении (рис. 6, а, кривая 2). На внешней поверхности абсолютные значения напряжений вначале быстро возрастают, особенно при действии наружного давления (рис. 6, б, кривая 1), а затем начинается их медленная релаксация.

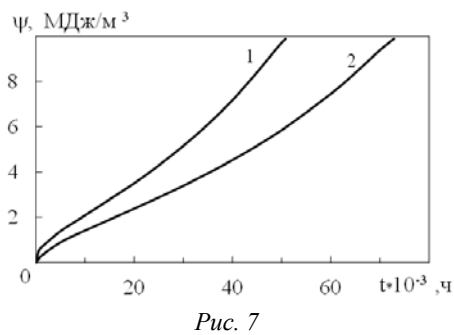


Рис. 7

#### Выводы.

На основе представленных результатов можно сделать вывод, что абсолютные величины прогибов, напряжений, уровень повреждаемости и время до разрушения для оболочек, выполненных из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения, существенно зависят от знака поперечной внешней нагрузки, при одной и той же ее интенсивности. Для пластин из таких материалов характерно появление, в процессе ползучести, отличных от нуля мембранных напряжений и перемещений в срединной плоскости. «Классические» определяющие соотношения, которые не учитывают реальные свойства материала, вносят недопустимые погрешности в расчет ползучести и повреждаемости пологих оболочек и пластин.

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено повзучість та пошкоджуваність пологих оболонок і пластин довільної форми в плані, із матеріалів з характеристиками, що залежать від виду навантаження. Для опису повзучості та пошкоджуваності матеріалу використано визначальні співвідношення, що описують повзучість початково ізотропних матеріалів з характеристиками, що залежать від виду навантаження, в яких спостерігається дислокаційна повзучість, асоційована з утворенням і зростанням мікротріщин з переважною орієнтацією. Початково-крайова задача повзучості та пошкоджуваності розв'язується



за допомогою спільного використання методів  $R$ -функцій, Рітца і Рунге – Кутта – Мерсона. Наведено приклади розрахунку пластини і сферичної пологої оболонки з алюмінієвого сплаву АК4-1Т. Досліджено вплив напрямку зовнішнього навантаження на розвиток процесів повзучості і пошкоджуваності.

1. Бурлаков А.В., Львов Г.И., Морачковский О.К. Длительная прочность оболочек. – Харьков: Вища шк., 1981. – 104 с.
2. Горев Б.В., Рубанов В.В., Соснин О.В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Пробл. прочности. – 1979. – № 7. – С. 62 – 67.
3. Гудрамович В.С. и др. Предельные состояния оболочек при сложном нагружении и ползучести материала. – К.: Наук. думка, 1984. – 256 с.
4. Золочевский А.А. Об учете разносопротивляемости материалов растяжению и сжатию в задачах ползучести оболочек // Динамика и прочность машин. – 1980. – Вып. 32 – С. 8 – 13.
5. Золочевский А.А. Двумерные краевые задачи ползучести оболочек, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Изв. вузов. Машиностроение. – 1988. – № 1 – С. 29 – 33.
6. Золочевский А.А., Морачковский О.К. Исследование ползучести тороидальной оболочки с учетом анизотропии и разносопротивляемости растяжению-сжатию // Изв. вузов. Машиностроение. – 1984. – № 5. – С. 20 – 23.
7. Золочевский А.А., Склепус С.Н. Ползучесть пологих оболочек сложной формы в плане из материалов с усложненными свойствами // Пробл. машиностроения. – 2002. – 5. – № 3. – С. 35 – 42.
8. Золочевский А.А., Склепус А.Н., Склепус С.Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. – Харьков: «Бізнес Інвестор Груп», 2011. – 720 с.
9. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
10. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
11. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
12. Склепус С.Н. Исследование ползучести гибких пологих оболочек из материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // Вестник НТУ «ХПИ». – 2005. – 22. – С. 29 – 36.
13. Altenbach H., Kolarov G., Morachkovsky O.K., Naumenko K. On the accuracy of creep-damage predictions in thinwalled structures using the finite element method // Comp. Mech. – 2000. – 25. – P. 87 – 98.
14. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. Studying the Axisymmetric Thermoelastoplastic Deformation of Layered Shells Taking into Account the Third Deviatoric Stress Invariant // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, – N 6. – P. 615 – 626.
15. Betten J., Borrmann M., Butters T. Materialgleichungen zur Beschreibung des primären Kriechverhaltens Innerdruckbeanspruchter Zylinderschalen aus Isotropen Werkstoff // Ing. Arch. – 1989. – 60, N 20. – S. 99 – 109.
16. Betten J., Sklepus S., Zolochovsky A. A creep damage model for initially isotropic materials with different properties in tension and compression // Engng. Fracture Mech. – 1998. – 57, N 5. – P. 623 – 641.
17. Kaloerov S.A., Parshikova O.A. Thermoelastoplastic State of Multiply Connected Anisotropic Plates // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 3. – P. 319 – 331.
18. Shevchenko Yu.N., Galishin A.Z., Babeshko M.E. Thermoelastoplastic Deformation of Compound Shells of Revolution Made of a Damageable Material // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 6. – P. 607 – 613.

Поступила 19.05.2016

Утверждена в печать 30.01.2018