

В. Л. Карлаш

АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЬНЫХ  
И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ  
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: karlashv@ukr.net*

**Abstract.** The experimental and analytical methods of studying the thin rectangular piezoceramic plate vibrations including the forced transverse resonances study are described. The comparison of calculated and measured AFC of admittance makes possible to determine the effective values of the electro-mechanical coupling factors and loss energy tangents. A remarkable anisotropy between the longitudinal and lateral half-wave plate's vibrations is revealed in experiments.

**Key words:** thin piezoceramic rectangular plate, longitudinal and transverse vibrations, admittance, impedance and phase shift, amplitude-frequency relation comparison.

**Введение.**

В последние десятилетия пьезоэлектрические пластины различной геометрической формы, прежде всего пьезокерамические, широко применяются в устройствах регистрации и управления вибрациями, в частности, в сенсорах и актуаторах, а также в многослойных металлокерамических структурах. Кроме высокочастотных толщинных резонансов, которые отличаются в кварцевых резонаторах очень высокой добротностью и стабильностью, используются также другие типы колебаний, в частности, продольные, радиальные, сдвиговые и изгибные (в плоскости пластины либо по ее толщине) [1, 2, 9, 10, 25, 27, 32].

В современных электромеханических преобразователях осуществляется электромеханическое преобразование энергии, когда механическая энергия превращается в электрическую, а электрическая в механическую. В пьезотрансформаторах и трансфильтрах имеет место одновременное двойное преобразование электрической энергии заданного уровня разности электрических потенциалов сначала в механическую, а затем снова в электрическую, но уже с другим (повышенным или пониженным) уровнем разности электрических потенциалов [8, 9, 14, 16 – 18, 30]. Эффективность электромеханического преобразования энергии в пьезоэлектрических телах оценивается статическими и динамическими коэффициентами электромеханической связи, полной входной проводимостью (адмиттансом), а также интенсивностью (амплитудой) механических колебаний по отношению к уровню подведенной электрической мощности.

Изучение резонансных электромеханических колебаний пьезокерамических пластин в силу вышеизложенного является важной и актуальной проблемой механики связанных полей в материалах и элементах конструкций.

В работе [12] впервые рассмотрены колебания прямоугольной пластины из сегнетовой соли как полуволновые по длине или ширине, а в [25 – 27] предложены приближенные методы для описания их динамического поведения. Выводы этих работ качественно согласуются с экспериментом, однако наблюдается заметное количественное расхождение на высоких частотах.

Недавние исследования показали, что поведение пьезорезонаторов при больших мощностях сильно зависит от способа электрического нагружения [3, 4, 31]. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) полной проводимости и ее компонентов в режиме заданного электрического напряжения постоянной амплитуды отличаются значительной нелинейностью вблизи резонансов, вплоть до срывов и прыжков, тогда как в режиме заданного электрического тока постоянной амплитуды такой нелинейности нет [31, 32].

При экспериментальном исследовании колебаний пьезокерамических резонаторов непосредственно измеряются их масса, статическая емкость, геометрические размеры, характеристические частоты (резонансные и антирезонансные), а также падения электрического потенциала на пьезоэлементе и (или) нагрузочном резисторе [4 – 7, 15, 19]. Прямых методов измерения ни активных, ни реактивных компонент полной проводимости не существует и приходится определять их путем расчетов по различным приближенным формулам [4 – 7, 19, 28].

В интервалах частот ниже резонансной и между соседними резонансами возникают значительные фазовые сдвиги между током и падением потенциала в пьезоэлементе [3, 5, 6, 22]. Классическая схема четырехполюсника Мэсона обеспечивает приемлемый уровень погрешностей лишь на характеристических частотах. Автором разработана усовершенствованная методика определения амплитуд и фаз, основанная на поочередном измерении падений потенциала на пьезоэлементе и нагрузочном резисторе [5, 6, 19 – 23, 29]. Стало возможным изучение особенностей поведения фазовых, адмиттансных и мощностных характеристик пьезорезонаторов в широком диапазоне частот электрического нагружения.

Данная статья посвящена дальнейшему развитию экспериментальных и аналитических методик исследования вынужденных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин, включая изучение их интенсивных поперечных резонансов.

Все расчеты проведены в комплексной форме с учетом диэлектрических, упругих и пьезоэлектрических потерь энергии [3, 7, 13, 21, 24]. Сопоставление рассчитанных и измеренных АЧХ полной проводимости позволяет определять эффективные (действующие) величины коэффициентов связи и тангенсов энергии.

Экспериментально обнаружена заметная анизотропия между полуволновыми колебаниями в продольном и поперечном направлениях пластины. Анизотропия проявляется как в различии эффективных коэффициентов электромеханической связи, так и в разной скорости звука вдоль и поперек пластины.

### 1. Полная входная проводимость и импеданс полуволновых пьезокерамических резонаторов.

Приложенная к любому пьезоэлементу разность электрических потенциалов  $U_{pe}$  вызывает в нем ток  $I_{pe}$ . Отношение тока в цепи к падению потенциала на ней есть по определению полная проводимость или адмиттанс цепи  $Y$ , тогда как обратное отношение есть входной импеданс  $Z$  [3, 9, 10, 19]

$$Y = \frac{I_{pe}}{U_{pe}}; Z = \frac{U_{pe}}{I_{pe}}; Z = \frac{1}{Y}; I_{pe} = \frac{U_R}{R_n}. \quad (1)$$

Ток через пьезоэлемент измеряется обычно косвенным способом по падению потенциала  $U_R$  на специальном резисторе  $R_n$ , включенном последовательно с ним [3, 19, 23].

По мере возрастания частоты ток через пьезоэлемент и падение потенциала (т. е. электрическое напряжение) на нагрузочном резисторе увеличиваются. Вдали от резонанса (на низкой частоте) ток через пьезоэлемент преимущественно связан с перезарядом его межэлектродной емкости и с увеличением с ростом частоты емкостной проводимости. На частоте  $f_m$  максимальной входной проводимости  $Y_m$ , близкой к резонансной частоте  $f_r$ , падение напряжения  $U_m$  на резисторе  $R_n$  достигает максимума, во много раз превосходящего емкостную компоненту. На частоте  $f_n$  минимума полной проводимости  $Y_n$ , близкой к антирезонансной частоте  $f_a$ , падение напряжения  $U_n$  на

резисторе  $R_n$  достигает минимума. Полная проводимость пьезоэлемента на любой частоте создается совместным действием пьезоэффекта и статической емкости.

Расчитать полную входную проводимость пьезокерамических резонаторов можно на основе решения простых одномерных задач электроупругости. Как показано в работах [3, 6, 21 и др.], все выведенные до сих пор выражения для входной проводимости сводятся к единой для всех резонансов комплексной формуле

$$Y = j\omega C_0 \frac{\Delta_a(x)}{\Delta_r(x)}, \quad (2)$$

где:  $j$  – мнимая единица;  $\omega$  – угловая частота;  $C_0$  – статическая емкость;  $x$  – безразмерная частота;  $\Delta_r(x)$  – резонансный и  $\Delta_a(x)$  – антирезонансный определители.

Таким образом, полная проводимость  $Y$  любого пьезокерамического резонатора на любой частоте является произведением реактивной проводимости  $Y_C = j\omega C_0$  его межэлектродной емкости на отношение антирезонансного определителя к резонансному.

В случае продольных колебаний тонкого пьезокерамического стержня с поперечной поляризацией длиной  $l$ , шириной  $w$  и толщиной  $h$  (все последующие обозначения совпадают с работами [3, 9, 20])

$$\Delta_r(x) = \cos(x); \quad \Delta_a(x) = (1 - k_{31}^2)\Delta(x) + k_{31}^2 \sin x / x, \quad (3)$$

причем

$$C_1 = C_{01}(1 - j\varepsilon_{33m}); \quad x = x_0(1 - 0,5js_{11m}); \quad C_{01} = \frac{\varepsilon_{330}lw}{h}; \quad x = kl/2; \quad k^2 = \rho\omega^2 s_{11}^E; \quad (4)$$

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}; \quad d_{31}^2 = d_{310}^2(1 - 2jd_{31m}); \quad k_{31}^2 = k_{310}^2[1 + j(s_{11m} + \varepsilon_{33m} - 2d_{31m})].$$

Следует отметить, что все входящие в формулы (2) – (4) электроупругие коэффициенты являются комплексными числами [3, 9, 13, 21]

$$s_{11}^E = s_{110}(1 - js_{11m}); \quad \varepsilon_{33}^T = \varepsilon_{330}(1 - j\varepsilon_{33m}); \quad d_{31} = d_{310}(1 - jd_{31m}). \quad (5)$$

Здесь индексами со значком «0» обозначены действительные части соответствующих комплексных чисел, а индексами со значком «m» – отношения мнимых частей к действительным частям, т.е. тангенсы потерь энергии [3, 9, 10].

При вычислениях адмиттанса с применением формулы (2) в каждом конкретном резонаторе осуществлялась «привязка» безразмерной  $x_0$  и измеренной  $f_0$  резонансных частот по формуле [3, 6, 24]

$$\omega C_0 = \frac{2\pi f_0 C_0 x}{x_0} = ax; \quad a = \frac{2\pi f_0 C_0}{x_0}, \quad (6)$$

где  $x$  – текущее значение безразмерной частоты.

Измеренные в эксперименте с применением усовершенствованной схемы Мэсона падения потенциала на исследуемом пьезорезонаторе  $U_{pe}$ , нагрузочном резисторе  $U_R$  и на входе схемы измерения  $U_{in}$  вводились в компьютер и по формуле (1) вычислялась полная проводимость  $Y_{pe}$ . Ее активный  $Y_{ac}$  и реактивный  $Y_{re}$  компоненты вычислялись с учетом сдвига фаз между падением напряжения на пьезоэлементе  $U_{pe}$  и протекающим в нем токе  $I_p$  или, что то же самое, между напряжениями  $U_{pe}$  и  $U_R$

$$Y = Y_{pe} = \frac{I_{pe}}{U_{pe}} = \frac{U_R}{R_n U_{pe}}; \quad Y_{ac} = Y_{pe} \cos \alpha; \quad Y_{re} = Y_{pe} \sin \alpha = Y_{pe} \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}. \quad (7)$$

Косинус угла сдвига фаз вычисляем по теореме косинусов [7, 10, 22]

$$\cos \alpha = \frac{U_{pe}^2 + U_R^2 - U_{in}^2}{2U_{pe}U_R}, \quad (8)$$

а комплексная мгновенная мощность определена как произведение падения напряжения на пьезоэлементе  $U_{pe}$  на протекающий в его цепи ток  $I_{pe}$ , т.е.

$$P_{pe} = U_{pe} I_{pe} = \frac{U_R U_{pe}}{R_n}. \quad (9)$$

Формулы (4) – (9) можно применить и для расчета полной проводимости и мгновенной мощности «поперечных» и «толщинных» колебаний пьезокерамического прямоугольника, если вместо  $k_{31}^2$  подставлять  $k_t^2$  или  $k_{21}^2$ .

## 2. АЧХ импеданса пьезокерамических прямоугольников.

Как показано в работах [4, 9, 18, 23], форма АЧХ вынужденных колебаний прямоугольной пьезокерамической пластины определяется, прежде всего, отношением длины пластины  $l$  к ее ширине  $w$ . На рис. 1, а представлены АЧХ импеданса пластины длиной 88 мм из пьезокерамики ЦТС-19 для отношений  $l/w = 2,5; 3,0; 3,3$  и  $3,5$  [9, 18].

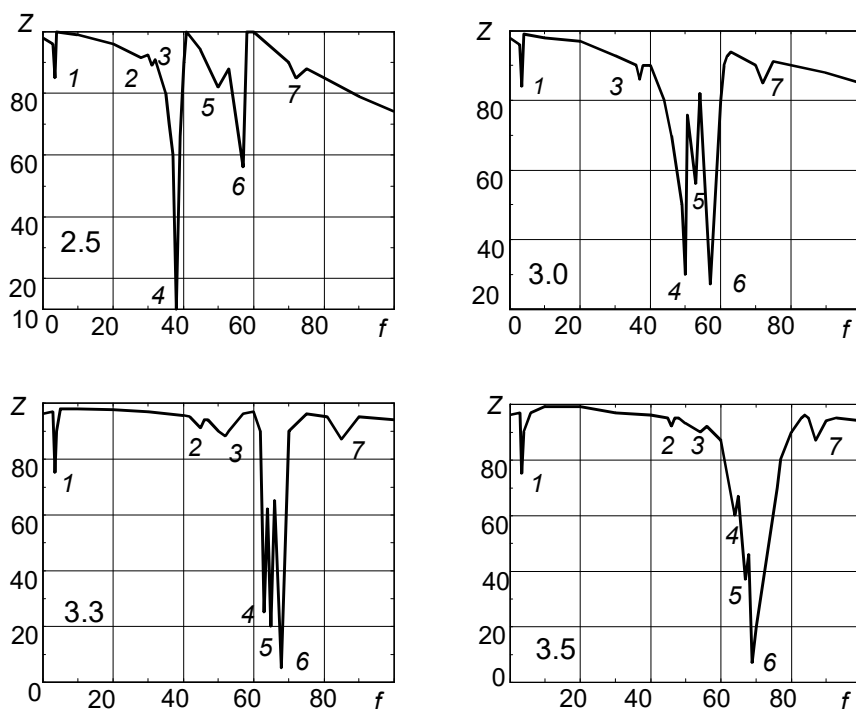


Рис. 1

Кривые получены следующим образом. Пьезокерамические пластины включались в качестве режекторной (поглощающей) цепи между выходом и входом характеристикографа ИЧХ-300. Входной и выходной импедансы этого прибора одинаковы и равны по 135 Ом. Чем выше входная проводимость пьезоэлемента на той или иной частоте, т.е. чем ниже ее входной импеданс, тем сильнее шунтирующее действие пьезорезонатора и тем глубже провал на характеристике передачи. Самые глубокие провалы на АЧХ соответствуют резонансным частотам интенсивных мод колебаний. По горизонтали отложены частоты в относительных единицах от 0 до 100, а по вертикали – импеданс (также в относительных единицах). Цифра 100 частотной шкалы соответствует 300 кГц, цифра 100 шкалы импеданса соответствует сопротивлению 67,5 Ом.

В случае, когда  $l/w = 2,5$ , сильные (1, 4, 6) моды колебаний чередуются со слабыми (2, 3, 5) модами. В работах [9, 18] на основе анализа потенциальных диаграмм установлено, что мода 1 является основным продольным резонансом, тогда как самая сильная мода 4 имеет в поперечном направлении близкий к полуволновому характер изменения суммы главных напряжений. В продольном направлении изменение напряжений выражено слабо. По этой причине мода 4 может рассматриваться как полуволновый резонанс по ширине пластины. Очень слабая мода 2 отождествлена в [4, 9] с краевым резонансом прямоугольника [9, 26, 27]. Мода 6 является первым обертоном продольных колебаний.

Когда отношение сторон прямоугольника достигает 3,0, одна из слабых мод 2 или 3 вовсе не наблюдается, а моды 4 – 6 сближаются по частоте. Мода 4 все еще остается наиболее интенсивной.

Дальнейшее сужение пластины ( $l/w = 3,3$ ) сопровождается восстановлением «пропавшей» слабой моды 2, однако краевым резонансом теперь становится мода 3, а мода 4 становится первым обертоном продольных колебаний по длине пластинки. Моды 5 и 6 имеют близкие по амплитуде минимумы импеданса.

Незначительное увеличение отношения сторон прямоугольника ( $l/w = 3,5$ ) ведет к существенному изменению её АЧХ. Наибольшую интенсивность имеет мода 6, а близкие к ней по частоте моды 4 и 5 располагаются на левом склоне её АЧХ. Здесь хорошо заметна суперпозиция соседних мод колебаний, когда пьезоэлектрически сильная мода существенно влияет на характер близких к ней резонансов.

Сравнение приведенных выше АЧХ входного импеданса прямоугольной пьезокерамической пластины показывает, что наиболее интенсивные резонансы в случаях  $l/w = 2,5$  и  $l/w = 3,5$  удалены от других интенсивных мод на значительные расстояния по частоте. Их можно рассматривать как полуволновые колебания по ширине пластины. В случаях, когда  $l/w = 3,0$  или  $l/w = 3,3$ , разделить близкие по частоте интенсивные моды гораздо труднее.

### 3. Сравнение рассчитанных и экспериментальных АЧХ пьезокерамических прямоугольников.

Проведены экспериментальные исследования вынужденных колебаний прямоугольной пластины из пьезокерамики ЦТБС-3  $40 \times 16 \times 1$  мм с данными  $C_0 = 8250$  пФ,  $\text{tg} \delta = 0,0163$ ,  $f_{01} = 36,1$  кГц. АЧХ полной проводимости пластины вблизи первого продольного резонанса приведена на рис. 2, а. С применением разработанной автором новой итерационной методики [6, 22] выполнен расчет по формулам (2) – (6) в интервале безразмерных частот  $1,5 \leq x \leq 1,75$  при следующих данных:  $k_{31}^2 = 0,08$ ;  $s_{11m} = 0,015$ ;  $\varepsilon_{33m} = 0,016$ ;  $d_{31m} = 0,0076$ ;  $a = 1,19$  мС,  $x_{01} = 1,57$  и построен график рис. 2, б. Резонансная частота первого продольного резонанса в стержне с поперечной поляризацией равна  $\pi/2$ , антирезонансная – зависит от величины  $k_{31}^2$ .

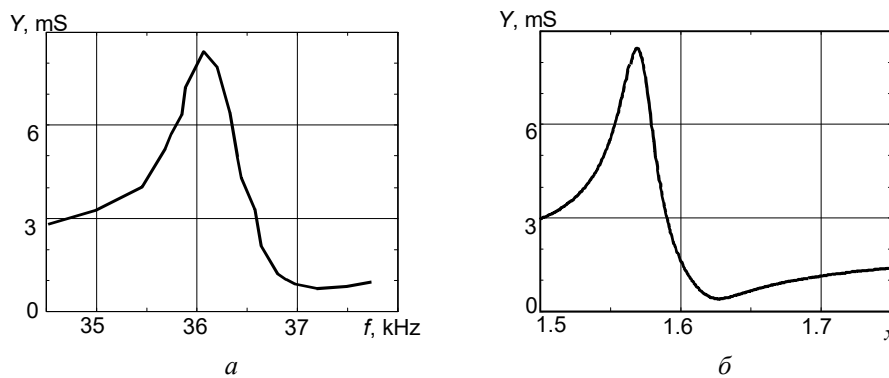


Рис. 2

Амплитудные значения измеренной и вычисленной полных проводимостей совпадают и равны  $Y_m = 8,4 \text{ mS}$ . Расхождение между измеренной величиной минимальной проводимости  $Y_n = 0,7 \text{ mS}$  и вычисленной величиной  $0,5 \text{ mS}$  связано, по-видимому, с завышением измеренной величины из-за малого сопротивления нагрузочного резистора. Вычисления измеренной проводимости проведены по формулам (1) и (7).

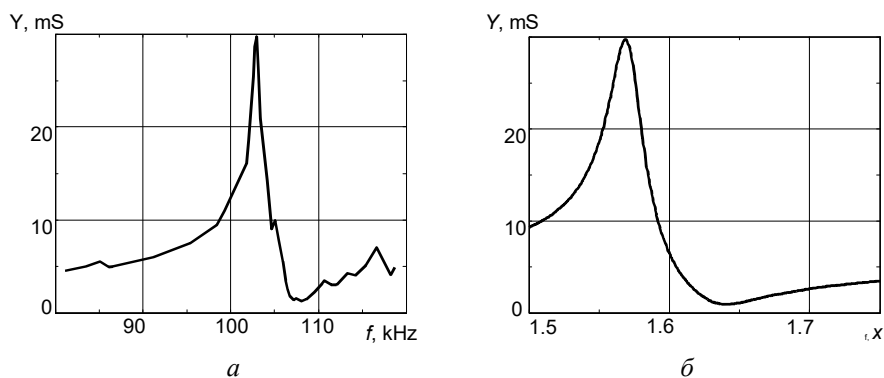


Рис. 3

На рис. 3 представлены экспериментальные (а) и рассчитанные (б) зависимости для интенсивного поперечного резонанса той же пластины. Расчеты проведены при:  $k_{21}^2 = 0,1$ ;  $s_{11m} = 0,0147$ ;  $\varepsilon_{33m} = 0,016$ ;  $d_{31m} = 0,0076$ ;  $a = 3,4$ . Безразмерная резонансная частота – 1,57, антирезонансная – 1,64, отношение частот 1,045 такое же, как и в эксперименте. Максимумы адмиттанса 30 mS совпадают, минимумы 3 mS в эксперименте и 2,5 mS в расчете отличаются по той же причине, что и для первого продольного резонанса – проявляется шунтирующее действие нагрузочного резистора.

Рис. 4 иллюстрирует частотную зависимость фазовых сдвигов между измеренных потенциалов (а) и частотную зависимость мгновенной мощности на пьезопластине (б). Кривые этого рисунка построены с применением формул (8) и (9). Угол  $\alpha$  образован сторонами  $U_R$  и  $U_{pe}$ . Он характеризует сдвиг фаз между током образца и падением потенциала на нем. Угол  $\beta$  образован сторонами  $U_{in}$  и  $U_R$  и соответствует фазовому сдвигу между выходным электрическим напряжением генератора и потребляемым током. Угол  $\gamma$  образован сторонами  $U_{in}$  и  $U_{pe}$ , т.е. между выходным электрическим напряжением генератора и падением потенциала на пьезорезонаторе. Для большей наглядности графики построены для интервала частот 30 – 38 кГц, который включает не только первый продольный резонанс, но и некоторую полосу ниже этого резонанса.

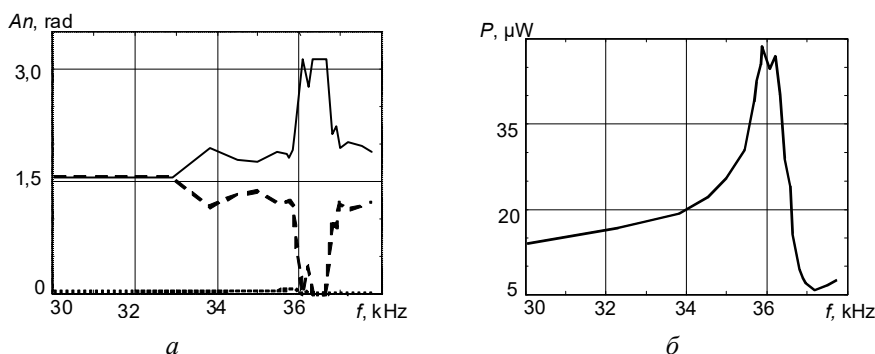


Рис. 4

Углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  показаны сплошными, прерывистыми и пунктирными линиями, соответственно. Как следует из графиков рис. 4, а, на частотах ниже резонансной сдвиг фаз между током и падением потенциала на пьезоэлементе  $U_{pe}$  или током и входным

напряжением  $U_{in}$  равен  $\pi/2$  радиан. Это соответствует сдвигу фаз между током и напряжением на статической емкости  $C_0$ . Вблизи продольного резонанса пластины угол  $\alpha$  увеличивается до  $\pi$  радиан, а угол  $\beta$  снижается до нуля. Максимум мгновенной мощности  $P_{pe}$  также достигается на резонансе.

Частота максимума полной проводимости первой продольной моды исследуемой пластины – 36,1 кГц, а интенсивной поперечной моды – 103,5 кГц. Отношение этих частот равно 2,87, тогда как отношение длины к ширине равно 2,5. Это обстоятельство соответствует тому, что скорость звука в продольном и поперечном направлениях пьезокерамического прямоугольника различна, как различны и эффективные коэффициенты электромеханической связи. Расчеты совпали с экспериментом при  $k_{31}^2 = 0,08$  для первого продольного резонанса и при  $k_{21}^2 = 0,1$ . Скорость звука в поперечном направлении оказалась на 14,7 % выше, чем в продольном.

С учетом полученного результата можно предложить следующий вариант итерационного процесса: сперва сравниваются вычисленные и измеренные отношения частот минимальной и максимальной полных проводимостей и подбирается величина квадрата, соответствующего выбранному резонатору коэффициента электромеханической связи (КЭМС). Затем подбирается величина тангенса упругих потерь  $s_{11m}$  до тех пор, пока не приблизятся на заданную величину максимумы полной проводимости. Величину  $s_{11m}$  также можно определять предварительно, как обратную к механической добротности  $s_{11m} = 1/Q_m$ , и уточнять путем итераций. Последним этапом является подбор тангенса пьезоэлектрических потерь при сопоставлении минимума полной проводимости или ее активного компонента вблизи антирезонанса.

#### **Заключение.**

На примере планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин показано, что частотные спектры таких колебаний намного плотнее, чем радиальных колебаний тонких дисков со сплошными электродами. АЧХ вынужденных колебаний пьезокерамических прямоугольных пластин демонстрируют сильную зависимость от отношения длины пластины к ее ширине. Соседние моды колебаний характеризуются также ярко выраженной суперпозицией и взаимосвязью. Фазовые сдвиги между измеренными падениями электрического потенциала вне резонансов определяются статической емкостью пьезоэлементов, а на резонансах и антирезонансах – совместным действием этой емкости и механических колебаний.

Экспериментально обнаружена заметная анизотропия между полуволновыми колебаниями в продольном и поперечном направлениях пластины. Анизотропия проявляется как в различии эффективных КЭМС, так и в разной скорости звука вдоль и поперек пластины.

Вопрос о распределении мод колебаний прямоугольной пластины по величине КЭМС требует дополнительного изучения.

РЕЗЮМЕ. Розвинуто експериментальні та аналітичні методики дослідження вимушених коливань тонких прямокутних п'єзокерамічних пластин, включаючи вивчення їх інтенсивних поперечних резонансів. Зіставлення розрахованих і вимірних АЧХ повної провідності дає можливість визначити ефективні величини коефіцієнтів зв'язку і тангенси втрат енергії. Експериментально виявлено помітну анизотропію між поздовжніми й поперечними коливаннями пластины.

1. Акоюн В.А., Соловьев А.Н., Шевцов С.Н. Методы и алгоритм определения полного набора совместимых материальных констант пьезокерамических материалов. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. – 144 с.
2. Андрущенко В.О., Борисейко О.В., Немченко Д.С., Улитко І.А. Експериментальне вивчення ефективності перетворення енергії на резонансних коливаннях п'єзокерамічного стержня з розрізними електродами при керованому електричному збудженні // Акустичний симпозиум «Консонанс – 2009». Збірник праць. – К.: НАНУ, Ін-т гідромеханіки, 2009. – С. 38 – 43.
3. Безверхий О., Зінчук Л., Карлаш В. Вплив режиму електричного навантаження, сталих напруги або струму на характеристики коливань п'єзокерамічних резонаторів // Фіз.-матем. моделювання та інформ. технології. – 2013. – Вип. 18. – С. 9 – 20.
4. Гринченко В.Т., Карлаш В.Л., Мелешко В.В., Улитко А.Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 5. – С. 71 – 78.

5. Карлаш В.Л. Методи визначення коефіцієнтів зв'язку і втрат енергії при коливаннях резонаторів із п'єзокераміки // Акуст. вісник. – 2012. – **15**, № 4. – С. 24 – 38.
6. Карлаш В.Л. Аналіз методів визначення в'язкопружних коефіцієнтів п'єзокерамічних резонаторів // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 3 – С. 97 – 111.
7. Карлаш В.Л. Ще раз про втрати енергії в п'єзокерамічних резонаторах // Акуст. вісник. – 2015. – **17**, № 1. – С. 34 – 47.
8. Лавриненко В.В. Пьезоэлектрические трансформаторы. – М.: Энергия, 1975. – 112 с.
9. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
10. Erhart J., Tutu S. Effective electromechanical coupling for the partially electroded ceramic resonators of different geometries // Ann. «DUNAREA DE JOS» Univ. of Galati Fascicle IX. Metallurgy and Material Science. – 2015. – N 2. – P. 7 – 16.
11. Erhart J. Bulk piezoelectric ceramic transformers // Adv. Appl. Ceram. – 2013. – **112**, N 2. – P. 91 – 96.
12. Giebe E., Blechschmidt E. Experimental und theoretische Untersuchungen über Denhungs // Ann. Phys. – 1933. – **18**. – S. 417 – 485.
13. Holland R. Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients // IEEE Trans. SU. – 1967. – **SU-14**, – P.18 – 20.
14. Hu J., Fuda Y., Katsuno M., Yoshiba T. A Study on the rectangular-bar shaped multilayer piezoelectric transformer using length extensional vibration mode // Jpn. J. Appl. Phys. – 1999. – **38**. – P. 3208 – 3212.
15. IRE Standards on Piezoelectric Crystals: Measurements of Piezoelectric Ceramics, 1961 // Proc. IRE. – 1961. – **49**. – P. 1161 – 1169.
16. Karlash V.L. Electroelastic vibrations and transformation ratio of a planar piezoceramic transformer // J. Sound Vib. – 2004. – **277**. – P. 353 – 367.
17. Karlash V.L. Resonant Electromechanical Vibrations of Piezoelectric Plates // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 7. – P.709 – 747.
18. Karlash V. Longitudinal and lateral vibrations of a planar piezoceramic transformer // Jpn. J. Appl. Phys. – 2005. – **44**, N 4A. – P. 1852 – 1856.
19. Karlash V. L. Admittance – Frequency Response of a Thin piezoceramic half-disk // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 10. – P. 1120 – 1126.
20. Karlash V.L. Forced Electromechanical Vibrations of Rectangular Piezoceramic Bars with Sectionalized Electrodes // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 3. – P. 360 – 368.
21. Karlash V.L. Energy losses in piezoceramic resonators and its influence on vibrations' characteristics // Electronics and communication. – 2014. – **19**, N 2 (79). – P. 82 – 94.
22. Karlash V.L. Modeling of energy-loss piezoceramic resonators by electric equivalent networks with passive elements // Mathematical modeling and computing. – 2014. – **1**, N 2. – P. 163 – 177.
23. Karlash V. L. Effect of Split or Partial Electrodes on the Forced Vibrations of Bar-Type Piezoceramic Transducers // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 535 – 546.
24. Mezheritsky A. V. Elastic, dielectric and piezoelectric losses in piezoceramics; how it works all together // IEEE Trans UFFC. – 2004. – **51**, № 6. – P. 695 – 797.
25. Medick M.A., Pao Y.-H. Extensional vibrations of thin rectangular plates // J. Acoust. Soc. Am. – 1965. – **37**. – P. 59 – 65.
26. Onoe M., Pao Y.-H. Edge mode of thin rectangular plate of barium titanate // J. Acoust. Soc. Am. – 1961. – **33**. – P. 1628 – 1629.
27. Onoe M. Frequency of edge mode of isotropic thin rectangular plate, circular disk and rod // J. Acoust. Soc. Am. – 1961. – **33**. – P. 1627.
28. Smits J. G. Iterative method for accurate determination of real and imaginary parts of materials coefficients of piezoelectric ceramics // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1976. – **SU-23**, N 6. – P. 393 – 402.
29. Shul'ga N.A., Karlash V. L. Measuring the Amplitudes and Phases of Vibrations of Piezoceramic Structural Elements // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 350 – 359.
30. Tutu S., Erhart J. Bar piezoelectric ceramic transformers working in longitudinal mode // Ferroelectrics. – 2015. – **486**, N 1. – P. 13 – 24.
31. Uchino K., Zheng J.H., Chen Y. H. et al. Loss mechanisms and high power piezoelectrics // J. Mat. Sci. – 2006. – **41**. – P. 217 – 228.
32. Uchino K., Zhuang Yu., Ural S. O. Loss determination methodology for a piezoelectric ceramic: new phenomenological theory and experimental proposals // J. Adv. Dielectric. – 2011. – **1**, N 1. – P. 17 – 31.

Поступила 24. 03. 2017.

Утверждена в печать 30.01.2018