А . С . Х о р о ш у н

ОБ УПРАВЛЕНИИ НЕТОЧНЫМИ БЫСТРО-МЕДЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ ТАКАГИ – СУГЕНО

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев,Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua

Abstract. For the fuzzy uncertain slow-fast systems of the Takagi – Sugeno type with nonlinear subsystems, the control is constructed which provides their asymptotic stability. The set of values of parameters is estimated for which such feature of these systems is preserved.

Key words: fuzzy logic, Takagi – Sugeno system, slow-fast dynamics, asymptotic stability, uncertain parameter.

Введение.

Быстро-медленные системы дифференциальных уравнений являются адекватными моделями многих реальных процессов и объектов, как-то: гибкие механические системы [14], управляемые DC-моторы [15, 21], цепи с туннельным диодом [12], системы управления, включающие перевернутый маятник [23, 26], системы управления летательными аппаратами [25] и многие другие. Если судить объективно, явление нескольких временных шкал практически неизбежно возникает в реальных системах. Существует подход, основанный на постулате сингулярности [17, 18], который предполагает, что все исследуемые объекты можно трактовать как объекты быстро-медленного класса, что вместе с учетом параметрических неточностей позволит получать наиболее точные модели и, соответственно, наиболее точные результаты.

Исследованием быстро-медленных систем дифференциальных уравнений занимались многие авторы и результаты, ими полученные, уже давно отнесены к классическим см. [2, 4, 6 – 9], что подтверждает важность и актуальность рассматриваемой тематики.

Одним из основных подходов к исследованию быстро-медленных систем дифференциальных уравнений является метод разделения движений, основанный на результатах Тихонова [9]. Он состоит в том, что рассматриваемая динамическая система, содержащая процессы, происходящие в разных масштабах времени, представляется в виде быстро-медленной системы дифференциальных уравнений. При этом параметр при производных в части уравнений полученной системы дифференциальных уравнений является конечным (возможно, достаточно малым) числом, определяющим отношение скоростей «быстрого» и «медленного» движений. Приравнивая значение указанного параметра к нулю, получаем т.н. «вырожденную» систему, состоящую из алгебраических и дифференциальных уравнений. Выполнение некоторых условий обеспечивает близость (с некоторой степенью точности [3]) решений исходной и «вырожденной» систем как на конечном [9], так и на бесконечном [5] интервале времени, т.е. ее вырождение. Однако, в случае существенной нелинейности быстро-медленной системы дифференциальных уравнений проверка упомянутых условий может быть непростой задачей. Поэтому, актуальным является получение альтернативных условий вырождения исходной динамической системы. Отметим, что информация о ее качественных свойствах (например, устойчивости) позволит получить некоторые выводы о поведении решений на бесконечном интервале времени, гарантировать отсутствие явления «срыва», т.е. указанная информация может служить определенной альтернативой общепринятым условиям вырождения. Таким образом, получение достаточных условий асимптотической устойчивости быстро-медленной системы дифференциальных уравнений, исходя из ее общего вида и не разделяя ее на «вырожденную» и «быструю» подсистемы, является важной и актуальной задачей.

Следует отметить также, что многие механические системы и производственные процессы настолько сложны, что соответствующую математическую модель очень сложно или вообще невозможно построить. Однако, многие из таких систем возможно представить в виде некоторого «набора» математических моделей, каждая из которых описывает локальную динамику общей системы. Такой подход, предложенный Такаги и Сугено [27], активно развивается и применяется в настоящее время [13, 28]. Нечеткие (fuzzy) модели, полученные с его помощью, позволяют более точно моделировать процесс, учитывая его локальные составляющие, а не «усредненно» описывать всю систему одной моделью, как это проводилось раньше. Подчеркнем, что построение управления, способного гарантировать требуемую динамическую характеристику образованной модели, в частности, устойчивость, а также получение достаточных ее, устойчивости, условий, являются важными и актуальными задачами, а в случаях, когда системы управления связаны с безопасностью людей, т.е. сложными производственными процессами, подверженными потере устойчивости, и вовсе расцениваются как критически важные.

Классическая теория систем Такаги – Сугено, как известно, рассматривает нелинейные системы, которые аппроксимируются набором локальных линейных систем, связанных между собой правилами «если-то». Причем, класс аппроксимируемых нелинейных систем достаточно широк и линейность локальных подсистем позволяет применить для их исследования детально разработанные классические методы, в частности, метод LMI (Linear Matrix Inequality).

Однако, если исходная система существенно нелинейна, то количество правил в модели и, следовательно, размерность LMI существенно возрастает, что затрудняет применимость этого метода. Именно поэтому, в последние годы активное развитие получила теория систем Такаги – Сугено, где локальные подсистемы предполагаются нелинейными. Это позволяет уменьшить количество правил в модели, а также повысить ее аккуратность, т.е. адекватность исходной исследуемой системе. Укажем лишь на несколько публикаций в этом направлении.

В работе [22] рассмотрены системы типа Такаги – Сугено с нелинейными подсистемами, которые имеют вид линейного слагаемого плюс синусоидальный член. Показано, что достаточно широкий класс реальных задач, которые моделируются нелинейными системами, может быть аппроксимирован с помощью указанных подсистем. В этой работе также проводится сравнение используемых моделей с классическими моделями Такаги – Сугено. Показана большая точность аппроксимации с помощью первых.

В работе [29] авторы предполагают использовать для аппроксимации нелинейных систем системы типа Такаги – Сугено с полиномиальными нелинейными подсистемами. Также впервые предложен т.н. SOS (sum of squares) подход для исследования устойчивости. Указанный подход реализован в программной среде MATLAB, что позволяет его также легко использовать, как и LMI-toolbox. Отметим, что классические модели Такаги – Сугено и используемые для исследования их устойчивости квадратические функции Ляпунова являются частным случаем предложенной модели и используемых в SOS подходе вспомогательных функций, соответственно. Также подчеркнем, что в работе показано, что количество правил в полученной с помощью предложенного подхода модели меньше, а условия устойчивости – менее строгие по сравнению с классическими моделями Такаги – Сугено и условиями, полученными с помощью используемых для их исследования аппаратом.

В работе [24] полиномиальные подсистемы предлагается получать в виде разложения в ряд Тейлора исходной нелинейной функции. Показано, что полученная таким способом система, аппроксимирующая исходную, дает асимптотически точные результаты на некотором компакте.

Данная работа является продолжением работ [10, 16] и посвящена построению нечеткого управления для неточных быстро-медленных систем типа Такаги – Сугено с нелинейными подсистемами, которое гарантирует асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия таких систем.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим нечеткую модель некоторого процесса в виде быстро-медленной системы дифференциальных уравнений, для описания которой использован набор нечетких предикатных правил в следующем виде:

$$R_i:\text{если } z_1(t)\in M_{i1} \text{ и ... и } z_s(t)\in M_{is}, \text{то } \begin{cases}\dot{x}=f_i(x,y,p),\\ \varepsilon\dot{y}=g_i(x,y,p),\end{cases} \quad i=\overline{1,r}, \tag{1}$$

где M_{ig} – нечеткие множества, определенные функциями принадлежности $\overline{M}_{ig}:R\to[0,\,1]$ ($i=\overline{1,\,r}$, $g=\overline{1,\,s}$), $x(t)\in R^n$, $y(t)\in R^m$ – переменные, определяющие состояние системы (1) в момент времени $t\in R_+$; $f_i(x,y,p)\in R^n$, $g_i(x,y,p)\in R^m$ – векторные функции, которые предполагаются непрерывно дифференцируемыми по переменным x и y и непрерывно зависящими от векторного параметра $p\in R^l$; $\varepsilon\in(0,1]$ – малый параметр; $z_1(t),\ldots,\,z_s(t)$ – некоторые системные переменные.

Относительно функций $f_i(x,y,p)$, $g_i(x,y,p)$ сделаем следующее предположение.

Предположение 1. *Функции* $f_i(x,y,p)$, $g_i(x,y,p)$ *таковы, что* $f_i(0,0,p)=0$ *и* $g_i(0,0,p)=0$ *при всех* $i=\overline{1,r}$.

Учитывая сделанное предположение и используя формулу конечных приращений Лагранжа для функций $f_i(x,y,p)$, $g_i(x,y,p)$, $i=\overline{1,r}$, системы (1) приведем к виду

$$\begin{cases}\dot{x}=A_{11}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)x+A_{12}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)y;\\ \varepsilon\dot{y}=A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)x+A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)y\end{cases} \quad (i=\overline{1,r}), \tag{2}$$

где

$$A_{11}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)=\left.\frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{x}_i\\ y=\tilde{y}_i}}; \quad A_{12}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)=\left.\frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\tilde{x}_i\\ y=\tilde{y}_i}};$$

$$A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)=\left.\frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}_i\\ y=\tilde{\tilde{y}}_i}}; \; A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)=\left.\frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}_i\\ y=\tilde{\tilde{y}}_i}} \quad (i=\overline{1,\,r});$$

$\tilde{x}_i\in R^n$, $\tilde{y}_i\in R^m$, $\tilde{\tilde{x}}_i\in R^n$, $\tilde{\tilde{y}}_i\in R^m$ – некоторые точки соответствующих пространств. Далее, для простоты, будем использовать $A_{11}^i(x_i,y_i,p)$, $A_{12}^i(x_i,y_i,p)$, $A_{21}^i(x_i,y_i,p)$, $A_{22}^i(x_i,y_i,p)$, учитывая, что x и y, в общем случае, разные и не произвольные в этих обозначениях.

О системе (2) сделаем следующее предположение:

Предположение 2. *Уравнения* (2) *таковы, что:*

(1) при некотором значении параметра $p = p^*$ *среди матриц* $A_{22}^i(0,0,p^*)$, $i=\overline{1,r}$ *, имеется, по крайней мере, одна неустойчивая;*

(2) существуют такие положительные числа α_i, β_i, γ_i, $\delta_i < +\infty$, $i=\overline{1,r}$ *, что выполняются следующие оценки:*

$$\left\| A_{11}^i(x,y,p) - A_{11}^i(0,0,p^*) \right\| \le \alpha_i; \quad \left\| A_{12}^i(x,y,p) - A_{12}^i(0,0,p^*) \right\| \le \beta_i;$$

$$\left\| A_{21}^i(x,y,p) - A_{21}^i(0,0,p^*) \right\| \le \gamma_i; \quad \left\| A_{22}^i(x,y,p) - A_{22}^i(0,0,p^*) \right\| \le \delta_i,$$

для всех $i=\overline{1,r}$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $p \in P \subseteq R^l$.

Отметим, что здесь и далее по тексту используется спектральная норма для матриц и Евклидова норма для векторов.

Если, используя центроидный метод, привести модель в виде систем дифференциальных уравнений (2), к «четкости», то, очевидно, полученная система дифференциальных уравнений, которая описывает поведение исходной модели, имеет неподвижное состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$ при всех значениях параметра p. Применить для исследования его устойчивости технику, предложенную в работах [10, 16], не удастся, так как среди матриц $A_{22}^i(0,0,p^*)$, $i=\overline{1,r}$, есть, по крайней мере, одна неустойчивая и построить все элементы функции Ляпунова, разрешающей вопрос об устойчивости этой системы дифференциальных уравнений, не представляется возможным.

Для преодоления возникших трудностей введем в системы дифференциальных уравнений (2) управление $u \in R^k$ таким образом, что набор нечетких предикатных правил для описания исходной нечеткой модели имеет следующий вид:

$$R_i : \text{если } z_1(t) \in M_{i1} \text{ и ... и } z_s(t) \in M_{is},$$

$$\text{то} \begin{cases} \dot{x} = A_{11}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)y + B_1^i(p)u; \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)y + B_2^i(p)u; \end{cases} \quad i=\overline{1,r}, \tag{3}$$

где $B_1^i(p) \in R^{n\times k}$, $B_2^i(p) \in R^{m\times k}$ $(i=\overline{1,r})$, имеют элементы, непрерывно зависящие от векторного параметра p.

После приведения нечеткой модели к четкости центроидным методом, получаем уравнения полной динамики нечеткой модели в виде нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^{r}\mu_i(z)[A_{11}^i(x,y,p)x + A_{12}^i(x,y,p)y + B_1^i(p)u]; \\ \varepsilon\dot{y} = \sum_{i=1}^{r}\mu_i(z)[A_{21}^i(x,y,p)x + A_{22}^i(x,y,p)y + B_2^i(p)u], \end{cases} \tag{4}$$

где $\mu_i(z) = \dfrac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r}\omega_i(z(t))}$, $\omega_i(z(t)) = \prod_{g=1}^{s}\overline{M}_{ig}(z_g(t))$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z) = 1$ и $\mu_i(z) \ge 0$, $i=\overline{1,r}$.

Пусть для описания управления использован набор нечетких предикатных правил

$$R_i: \text{ если } z_1(t) \in M_{i1} \text{ и ... и } z_s(t) \in M_{is}, \text{ то } u = K_1^i x + K_2^i y \ (i=\overline{1,r}), \tag{5}$$

где $K_1^i \in R^{k\times n}$, $K_2^i \in R^{k\times m}$ – некоторые постоянные матрицы. Тогда система (4) с учетом (5) будет иметь вид

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \sum\limits_{i,j=1}^{r} \mu_i(z)\mu_j(z)[(A_{11}^i(x,y,p) + B_1^i(p)K_1^j)x + (A_{12}^i(x,y,p) + B_1^i(p)K_2^j)y]; \\
\varepsilon\dot{y} = \sum\limits_{i,j=1}^{r} \mu_i(z)\mu_j(z)[(A_{21}^i(x,y,p) + B_2^i(p)K_1^j)x + (A_{22}^i(x,y,p) + B_2^i(p)K_2^j)y].
\end{cases} \tag{6}
$$

Предполагаем, что для системы дифференциальных уравнений (6) справедлива теорема о существовании и единственности решения начальной задачи.

В данной работе, используя метод функций Ляпунова, установим достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (6), которая будет иметь место при любых значениях $\mu_i(z)$ и всех значениях параметра p из некоторой области $P \subseteq R^l$, а также при всех значениях малого параметра $\varepsilon \in (0,1]$. Также будет предложен способ выбора матриц K_1^i, K_2^i, $i = \overline{1,r}$, таких, чтобы управление $u = K_1^i x + K_2^i y$ $(i = \overline{1,\, r})$ обеспечивало искомый вид устойчивости.

2. Основной результат.

Пусть выполняются условия Предположений 1,2 и для описания поведения исходной нечеткой модели используется система дифференциальных уравнений (6).

Рассмотрим системы неравенств

$$
\lambda_{\max}\left[(A_{11}^i(0,0,p^*) + B_1^i(p^*)K_1^i)^T P_1 + P_1(A_{11}^i(0,0,p^*) + B_1^i(p^*)K_1^i)\right] < 0 \quad (i = \overline{1,\, r}) \tag{7}
$$

и

$$
\lambda_{\max}\left[(A_{22}^i(0,0,p^*) + B_2^i(p^*)K_2^i)^T P_2 + P_2(A_{22}^i(0,0,p^*) + B_2^i(p^*)K_2^i)\right] < 0, \quad (i = \overline{1,r}), \tag{8}
$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ – максимальное собственное значение соответствующей матрицы; $P_1 \in R^{n\times n}$, $P_2 \in R^{m\times m}$ – симметрические положительно определенные матрицы. Построим скалярную функцию следующего вида:

$$
V(x,y,\varepsilon) = x^T P_1 x + \varepsilon y^T P_2 y \tag{9}
$$

и определим ее производную по времени в силу системы (6).

$$
\dot{V}(x,y,\varepsilon)|_{(3)} = \dot{x}^T P_1 x + x^T P_1 \dot{x} + \varepsilon \dot{y}^T P_2 y + \varepsilon y^T P_2 \dot{y} =
$$

$$
= \left(\sum_{i,j=1}^{r} \mu_i(z)\mu_j(z)[(A_{11}^i(x,y,p) + B_1^i(p)K_1^j)x + (A_{12}^i(x,y,p) + B_1^i(p)K_2^j)y] \right)^T P_1 x +
$$

$$
+ x^T P_1 \left(\sum_{i,j=1}^{r} \mu_i(z)\mu_j(z)[(A_{11}^i(x,y,p) + B_1^i(p)K_1^j)x + (A_{12}^i(x,y,p) + B_1^i(p)K_2^j)y] \right) +
$$

$$
+ \left(\sum_{i,j=1}^{r} \mu_i(z)\mu_j(z)[(A_{21}^i(x,y,p) + B_2^i(p)K_1^j)x + (A_{22}^i(x,y,p) + B_2^i(p)K_2^j)y] \right)^T P_2 y +
$$

$$
+ y^T P_2 \left(\sum_{i,j=1}^{r} \mu_i(z)\mu_j(z)[(A_{21}^i(x,y,p) + B_2^i(p)K_1^j)x + (A_{22}^i(x,y,p) + B_2^i(p)K_2^j)y] \right) =
$$

$$
= \sum_{i,j=1}^{r} \mu_i(z)\mu_j(z)[x^T[(A_{11}^i(x,y,p) + B_1^i(p)K_1^j)^T P_1 + P_1(A_{11}^i(x,y,p) + B_1^i(p)K_1^j)]x +
$$

$$
+ x^T[P_1 A_{12}^i(x,y,p) + P_1 B_1^i(p)K_2^j + (A_{21}^i(x,y,p))^T P_2 + (K_1^j)^T (B_2^i(p))^T P_2]y +
$$

$$+y^T[P_1A_{12}^i(x,y,p)+P_1B_1^i(p)K_2^j+(A_{21}^i(x,y,p))^TP_2+(K_1^j)^T(B_2^i(p))^TP_2]^Tx+$$

$$+y^T[(A_{22}^i(x,y,p)+B_2^i(p)K_2^j)^TP_2+P_2(A_{22}^i(x,y,p)+B_2^i(p)K_2^j)]y]= \tag{10}$$

$$=\sum_{i,j=1}^r\mu_i(z)\mu_j(z)M_{ij}(x,y,p)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^r\mu_i(z)\mu_j(z)(M_{ij}(x,y,p)+M_{ji}(x,y,p)).$$

Учитывая оценки

$$x^T[(A_{11}^i(x,y,p)+B_1^i(p)K_1^j)^TP_1+P_1(A_{11}^i(x,y,p)+B_1^i(p)K_1^j)+$$

$$+(A_{11}^j(x,y,p)+B_1^j(p)K_1^i)^TP_1+P_1(A_{11}^j(x,y,p)+B_1^j(p)K_1^i)]x\le$$

$$\le\Big[\lambda_{\max}[(A_{11}^i(0,0,p^*)+B_1^i(p^*)K_1^j)^TP_1+P_1(A_{11}^i(0,0,p^*)+B_1^i(p^*)K_1^j)+$$

$$+(A_{11}^j(0,0,p^*)+B_1^j(p^*)K_1^i)^TP_1+P_1(A_{11}^j(0,0,p^*)+B_1^j(p^*)K_1^i)]+$$

$$+2\|P_1\|\|A_{11}^i(x,y,p)-A_{11}^i(0,0,p^*)\|+2\|P_1\|\|K_1^j\|\|B_1^i(p)-B_1^i(p^*)\|+$$

$$+2\|P_1\|\|A_{11}^j(x,y,p)-A_{11}^j(0,0,p^*)\|+2\|P_1\|\|K_1^i\|\|B_1^j(p)-B_1^j(p^*)\|\Big]\|x\|^2;$$

$$y^T[(A_{22}^i(x,y,p)+B_2^i(p)K_2^j)^TP_2+P_2(A_{22}^i(x,y,p)+B_2^i(p)K_2^j)+$$

$$+(A_{22}^j(x,y,p)+B_2^j(p)K_2^i)^TP_2+P_2(A_{22}^j(x,y,p)+B_2^j(p)K_2^i)]y\le$$

$$\le\Big[\lambda_{\max}[(A_{22}^i(0,0,p^*)+B_2^i(p^*)K_2^j)^TP_2+P_2(A_{22}^i(0,0,p^*)+B_2^i(p^*)K_2^j)+$$

$$+(A_{22}^j(0,0,p^*)+B_2^j(p^*)K_2^i)^TP_2+P_2(A_{22}^j(0,0,p^*)+B_2^j(p^*)K_2^i)]+$$

$$+2\|P_2\|\|A_{22}^i(x,y,p)-A_{22}^i(0,0,p^*)\|+2\|P_2\|\|K_2^j\|\|B_2^i(p)-B_2^i(p^*)\|+$$

$$+2\|P_2\|\|A_{22}^j(x,y,p)-A_{22}^j(0,0,p^*)\|+2\|P_2\|\|K_2^i\|\|B_2^j(p)-B_2^j(p^*)\|\Big]\|y\|^2;$$

$$x^T[P_1A_{12}^i(x,y,p)+P_1B_1^i(p)K_2^j+(A_{21}^i(x,y,p))^TP_2+(K_1^j)^T(B_2^i(p))^TP_2+$$

$$+P_1A_{12}^j(x,y,p)+P_1B_1^j(p)K_2^i+(A_{21}^j(x,y,p))^TP_2+(K_1^i)^T(B_2^j(p))^TP_2]y\le$$

$$\le\Big[\|P_1A_{12}^i(0,0,p^*)+P_1B_1^i(p^*)K_2^j+(A_{21}^i(0,0,p^*))^TP_2+(K_1^j)^T(B_2^i(p^*))^TP_2+$$

$$+P_1A_{12}^j(0,0,p^*)+P_1B_1^j(p^*)K_2^i+(A_{21}^j(0,0,p^*))^TP_2+(K_1^i)^T(B_2^j(p^*))^TP_2\|+$$

$$+\|P_1\|\|A_{12}^i(x,y,p)-A_{12}^i(0,0,p^*)\|+\|P_1\|\|K_2^j\|\|B_1^i(p)-B_1^i(p^*)\|+$$

$$+\|P_1\|\|A_{12}^j(x,y,p)-A_{12}^j(0,0,p^*)\|+\|P_1\|\|K_2^i\|\|B_1^j(p)-B_1^j(p^*)\|+$$

$$+\|P_2\|\|A_{21}^i(x,y,p)-A_{21}^i(0,0,p^*)\|+\|P_2\|\|K_1^j\|\|B_2^i(p)-B_2^i(p^*)\|+$$

$$+\|P_2\|\|A_{21}^j(x,y,p)-A_{21}^j(0,0,p^*)\|+\|P_2\|\|K_1^i\|\|B_2^j(p)-B_2^j(p^*)\|\Big]\|x\|\|y\|,$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ – минимальное и максимальное собственные значения соответствующих матриц и условие (2) из Предположения 2, следуя (10) получим

$$\dot V(x,y)|_{(6)}\le \sum_{i,j=1}^{r}\mu_i(z)\mu_j(z)u^T D(\alpha_1,\ldots,\alpha_r\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,\delta_1,\ldots,\delta_r,p)u. \tag{11}$$

В (11) приняты обозначения:

$$D(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,\delta_1,\ldots,\delta_r,p)=$$

$$=\begin{pmatrix} L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p) & M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)\\ M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p) & N(\delta_1,\ldots,\delta_r,p)\end{pmatrix}-$$

– блочная матрица с симметричными блоками размерностями $r\times r$;

$$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p)=(L_{ij})_{i,j=1}^r;\quad M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)=(M_{ij})_{i,j=1}^r;$$

$$N(\delta_1,\ldots,\delta_r,p)=(N_{ij})_{i,j=1}^r;\quad u=(\|x\|,\|y\|)^T;$$

$$L_{ij}=\frac{1}{2}\lambda_{\max}[(A_{11}^i(0,0,p^*)+B_1^i(p^*)K_1^j)^T P_1+P_1(A_{11}^i(0,0,p^*)+B_1^i(p^*)K_1^j)+$$

$$+(A_{11}^j(0,0,p^*)+B_1^j(p^*)K_1^i)^T P_1+P_1(A_{11}^j(0,0,p^*)+B_1^j(p^*)K_1^i)]+$$

$$+\|P_1\|\alpha_i+\|P_1\|\|K_1^j\|\|B_1^i(p)-B_1^i(p^*)\|+\|P_1\|\alpha_j+\|P_1\|\|K_1^i\|\|B_1^j(p)-B_1^j(p^*)\|;$$

$$N_{ij}=\frac{1}{2}\lambda_{\max}[(A_{22}^i(0,0,p^*)+B_2^i(p^*)K_2^j)^T P_2+P_2(A_{22}^i(0,0,p^*)+B_2^i(p^*)K_2^j)+$$

$$+(A_{22}^j(0,0,p^*)+B_2^j(p^*)K_2^i)^T P_2+P_2(A_{22}^j(0,0,p^*)+B_2^j(p^*)K_2^i)]+$$

$$+\|P_2\|\delta_i+\|P_2\|\|K_2^j\|\|B_2^i(p)-B_2^i(p^*)\|+\|P_2\|\delta_j+\|P_2\|\|K_2^i\|\|B_2^j(p)-B_2^j(p^*)\|;$$

$$M_{ij}=\frac{1}{2}\Big[\|P_1A_{12}^i(0,0,p^*)+P_1B_1^i(p^*)K_2^j+(A_{21}^i(0,0,p^*))^T P_2+(K_1^j)^T(B_2^i(p^*))^T P_2+$$

$$+P_1A_{12}^j(0,0,p^*)+P_1B_1^j(p^*)K_2^i+(A_{21}^j(0,0,p^*))^T P_2+(K_1^i)^T(B_2^j(p^*))^T P_2\|+$$

$$+\|P_1\|\beta_i+\|P_1\|\|K_2^j\|\|B_1^i(p)-B_1^i(p^*)\|+\|P_1\|\beta_j+\|P_1\|\|K_2^i\|\|B_1^j(p)-B_1^j(p^*)\|+$$

$$+\|P_2\|\gamma_i+\|P_2\|\|K_1^j\|\|B_2^i(p)-B_2^i(p^*)\|+\|P_2\|\gamma_j+\|P_2\|\|K_1^i\|\|B_2^j(p)-B_2^j(p^*)\|\Big].$$

Оценку (11) можно представить в следующем виде:

$$\dot V(x,y)|_{(6)}\le u^T\tilde D(\alpha_1,\ldots,\alpha_r\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,\delta_1,\ldots,\delta_r,p,\mu)u, \tag{12}$$

где

$$\tilde D(\alpha_1,\ldots,\alpha_r\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,\delta_1,\ldots,\delta_r,p,\mu)=$$

$$=\begin{pmatrix} \mu^T L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p)\mu & \mu^T M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)\mu\\ \mu^T M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)\mu & \mu^T N(\delta_1,\ldots,\delta_r,p)\mu\end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\mu^T=(\mu_1(z),\ldots,\mu_r(z)).$$

Сформулируем и докажем теорему, о достаточных условиях асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений (6) относительно некоторой области в пространстве параметров.

Теорема. *Пусть для системы дифференциальных уравнений* (6) *справедливы условия Предположений1, 2, существуют матрицы* K_1^i, K_2^i, $i=\overline{1,r}$ *, такие, что системы неравенств* (7) *и* (8) *совместны на множестве симметрических положительно определенных матриц* P_1 *и* P_2*, соответственно, и для величин* α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i=\overline{1,r}$ *и всех значений параметра* $p\in\tilde{P}\subseteq P$ *выполняются условия:*

$$\lambda_{\max}(L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p))<0, \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\lambda_{\max}(L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p))\cdot\lambda_{\max}(N(\delta_1,\ldots,\delta_r,p))-\\ -\max\left\{\lambda^2_{\min}(M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)),\lambda^2_{\max}(M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p))\right\}>0.\end{gathered} \tag{15}$$

Тогда состояние равновесия $x=0$, $y=0$ *системы* (6) *асимптотически устойчиво для всех* $p\in\tilde{P}$ *и всех* $\varepsilon\in(0,1]$.

Доказательство. Выберем величины α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i=\overline{1,r}$, так, чтобы выполнялись соотношения (14), (15), произвольное p из области $\tilde{P}\subseteq P$ и рассмотрим систему дифференциальных уравнений (6) при этом значении параметра. Построим скалярную функцию (9), используя симметрические положительно определенные матрицы P_1 и P_2, которые являются решениями систем неравенств (7) и (8), соответственно. Очевидно, что рассматриваемая скалярная функция положительна для всех значений $x\in R^n$, $y\in R^m$, кроме нулевых и $\varepsilon\in(0,1]$. Для производной функции (9) по времени в силу системы (6) имеет место оценка (12). Рассмотрим матрицу (13). Это симметрическая (2×2)-матрица, для элементов которой имеют место следующие оценки:

$$\lambda_{\min}(L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p))\|\mu\|^2\le\mu^T(L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p))\mu\le\lambda_{\max}(L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p))\|\mu\|^2;$$

$$\lambda_{\min}(M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p))\|\mu\|^2\le\mu^T(M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p))\mu\le$$

$$\le\lambda_{\max}(M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p))\|\mu\|^2;$$

$$\lambda_{\min}(N(\delta_1,\ldots,\delta_r,p))\|\mu\|^2\le\mu^T(N(\delta_1,\ldots,\delta_r,p))\mu\le\lambda_{\max}(N(\delta_1,\ldots,\delta_r,p))\|\mu\|^2.$$

Очевидно, что при выполнении неравенств (14), (15) матрица (13) отрицательно определена для всех значений $\mu\in R^r$ и $p\in\tilde{P}\subseteq P$, т. е. производная по времени скалярной функции (9) в силу системы (6) отрицательна для всех значений $x\in R^n$, $y\in R^m$, кроме нулевых и всех $\varepsilon\in(0,1]$. Следовательно, функция (9) является функцией Ляпунова, позволяющей, в силу теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, см. [1], установить асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы (6). Так как p произвольная точка из области $\tilde{P}$, то указанный тип устойчивости имеет место для всех значений параметра p из области $\tilde{P}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Исходя из соотношений (7) и (8), матрицы K_1^i и K_2^i ($i=\overline{1,r}$), нужно выбирать таким образом, чтобы матрицы $A_{11}^i(0,0,p^*)+B_1^i(p^*)K_1^i$ и $A_{22}^i(0,0,p^*)+$ $+B_2^i(p^*)K_2^i$ ($i=\overline{1,r}$), были устойчивыми (Гурвицевыми). Это позволит решая алгебраическое уравнение Ляпунова получить матрицы P_1 и P_2, для которых соотношения (7) и (8) верны.

Замечание 2. Если наложить на управление и коррелирующие матрицы $B_1^i(p)$, $B_2^i(p)$ $(i=\overline{1,r})$, дополнительные условия в виде $\operatorname{rank}(B_1^i(p^*))=\operatorname{rank}(B_2^i(p^*))=k$ $(i=\overline{1,r})$, $k\le\min\{m,n\}$, то матрицы K_1^i, K_2^i $(i=\overline{1,r})$, учитывая Замечание 1, можно получить аналитически

$$K_1^i=((B_1^i(p^*))^T B_1^i(p^*))^{-1}(B_1^i(p^*))^T(M_1^i-A_{11}^i(0,0,p^*));$$

$$K_2^i=((B_2^i(p^*))^T B_2^i(p^*))^{-1}(B_2^i(p^*))^T(M_2^i-A_{22}^i(0,0,p^*)),$$

где $M_1^i\in R^{n\times n}$ и $M_2^i\in R^{m\times m}$ (для всех $i=\overline{1,r}$) произвольные устойчивые матрицы. Следует отметить, что $\operatorname{rank}((B_1^i(p^*))^T B_1^i(p^*))=\operatorname{rank}(B_1^i(p^*))=k$ $(i=\overline{1,r})$. Поскольку $(B_1^i(p^*))^T B_1^i(p^*)\in R^{k\times k}$, то $(B_1^i(p^*))^T B_1^i(p^*)$ невырождена для всех $i=\overline{1,r}$. Аналогично можно показать и невырожденность матриц $(B_2^i(p^*))^T B_2^i(p^*)$ для всех $i=\overline{1,r}$.

3. Пример.

В качестве примера применения предложенной методики рассмотрим стабилизацию нулевого состояния равновесия нечеткой модели, для описания которой использован следующий набор нечетких предикатных правил:

$$\text{если } x_1\in M_1(x_1),\quad \text{то}\begin{cases}\dot x=f_1(x,y,p)+B_1^1(p)u,\\ \varepsilon\dot y=g_1(x,y,p)+B_2^1(p)u;\end{cases}$$

$$\text{если } x_1\in M_2(x_1),\quad \text{то}\begin{cases}\dot x=f_2(x,y,p)+B_1^2(p)u,\\ \varepsilon\dot y=g_2(x,y,p)+B_2^2(p)u.\end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$x^T=(x_1\ x_2)\in R^2;\ y\in R^1;\ p\in R^1;\ u\in R^2;\ f_i(x,y,p)\in R^2;\ g_i(x,y,p)\in R^1\ \ (i=1,\,2);$$

$$B_1^1(p)=\begin{pmatrix}1+p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ B_2^1(p)=(1-0{,}3+p^5);\ B_1^2(p)=\begin{pmatrix}0{,}3\cos p & -0{,}1\\ -0{,}3 & -0{,}6\end{pmatrix};$$

$$B_2^2(p)=(-0{,}5(1+p)^3\ 1{,}9).$$

Функции $f_i(x,y,p)$ и $g_i(x,y,p)$ таковы, что для них справедливо условие Предположения 1,

$$A_{11}^1(0,0,p^*)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ A_{12}^1(0,0,p^*)=\begin{pmatrix}2\\ 1{,}5\end{pmatrix};\ A_{21}^1(0,0,p^*)=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix};$$

$$A_{22}^1(0,0,p^*)=\begin{pmatrix}-1, & 2\end{pmatrix};\ A_{11}^2(0,0,p^*)=\begin{pmatrix}-3{,}1 & 0\\ 0 & -4{,}3\end{pmatrix};\ A_{12}^2(0,0,p^*)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix};$$

$$A_{21}^2(0,0,p^*)=\begin{pmatrix}-2 & 0{,}5\end{pmatrix};\ A_{22}^2(0,0,p^*)=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix},$$

где $p^*=0$ и существуют такие положительные числа α_i, β_i, γ_i, $\delta_i<+\infty$, $i=1,2$, что выполняются соотношения из п. 2 Предположения 2. Кроме того, видим, что $A_{22}^2(0,0,p^*)$ неустойчива, т.е. выполнено условие из п. 1 Предположения 2. Таким образом, все условия Предположений 1 и 2 выполнены.

Введем управление согласно следующих правил:

$$\text{если } x_1 \in M_1(x_1), \text{ то } u = K_1^1 x + K_2^1 y;$$

$$\text{если } x_1 \in M_2(x_1), \text{ то } u = K_1^2 x + K_2^2 y,$$

где $K_1^1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $K_2^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1,2 \end{pmatrix}$, $K_1^2 = \begin{pmatrix} -2,7 & 1 \\ 1 & 0,4 \end{pmatrix}$, $K_2^2 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,9 \end{pmatrix}$. Отметим, что матрицы K_i^j, $i, j = 1, 2$, выбраны согласно Замечанию 1. Из систем неравенств (7) и (8), определим матрицы $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$, $P_2 = (0,1)$. Образовав элементы матриц, убедимся, что неравенства (14), (15) выполняются для $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = \delta_2 = 0,1$ и всех $p \in P = \{p \in R \,|\, |p| \le 0,12\}$, т.е. согласно теоремы, нулевое состояние равновесия системы, описывающей полную динамику исходной нечеткой модели, асимптотически устойчиво для всех $p \in P$ и всех $\varepsilon \in (0,1]$.

Таким образом, указан класс функций, определяемый оценками на производные этих функций, нечеткое управление, асимптотически стабилизирующее для всех $\varepsilon \in (0,1]$ нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений, которая описывает динамику исходной нечеткой модели, а также область $P = \{p \in R \,|\, |p| \le 0,12\}$ такой стабилизации.

Выбрав

$$f_1(x, y, p) = \begin{pmatrix} 0,05\sin x_1 + 0,95x_1 + 2y \\ x_2 + (1,5 + 0,75p)y \end{pmatrix}; \quad f_2(x, y, p) = \begin{pmatrix} -3,1x_1 - 0,9y - 0,1\ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\ (-4,3 + 0,1\sin^2 p)x_2 \end{pmatrix};$$

$$g_1(x, y, p) = -x_1 + (2 + 0,1\sin p)x_2 - (1,1 + 0,1\cos^2 p)y;$$

$$g_2(x, y, p) = (0,1e^{-p^2} - 2,1)x_1 + 0,5x_2 + 1,9y + 0,1\arctan y,$$

убедимся, что указанные функции удовлетворяют сделанным предположениям.

Поведение решений системы дифференциальных уравнений, полученной после приведения к четкости исходной нечеткой модели при $M_1 = 1 - \frac{|x_1|}{3}$, $M_2 = \frac{|x_1|}{3}$, $p = 0,1$, $\varepsilon = 0,6$, $x_0 = (2 \quad -4)^T$, $y_0 = 3$ показано на рис. 1 – 3.

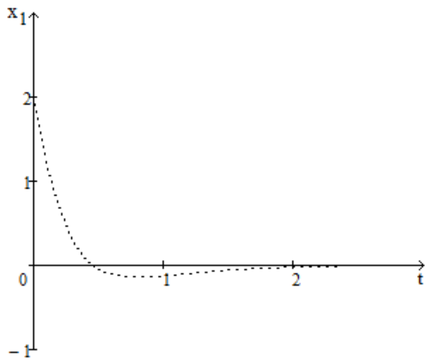

Рис. 1

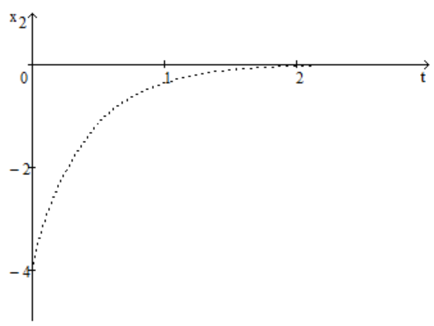

Рис. 2

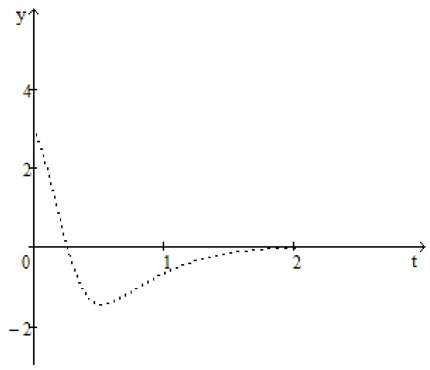

Рис. 3

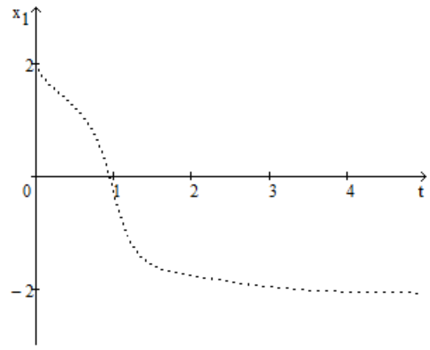

Рис. 4

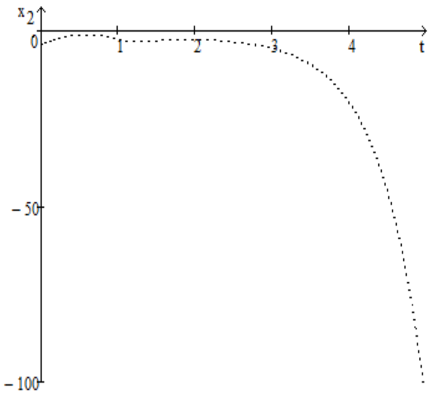

Рис. 5

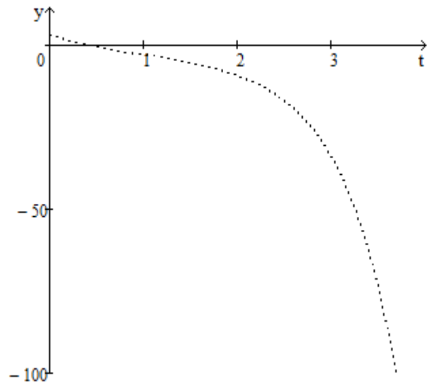

Рис. 6

Поведение решений этой же системы дифференциальных уравнений при тех же значениях параметров и начальных значениях переменных, но без управления, показано на рис. 4 – 6.

Заключение.

Предложена нечеткая модель некоторого процесса в виде быстро-медленной системы дифференциальных уравнений с параметрическими неточностями и управлением, для описания которой использован набор нечетких предикатных правил. Используя метод функций Ляпунова, предложен вид управления, который обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия исходной системы и определена область в пространстве параметров, для всех значений параметров из которой такая устойчивость сохраняется, а также предложен вид управления, который обеспечивает требуемый вид устойчивости.

Отметим, что предложенный подход не требует разделения движений на «быстрые» и «медленные», что, исходя из общего вида функций в исходной системе, представляет значительные трудности. Также отметим, что полученные результаты не зависят от выбора функций принадлежности нечетких множеств.

Интересным представляется применение данного подхода к задачам [11], [19, 20].

Р Е З Ю М Е . Для неточних швидко-повільних систем типу Такагі – Сугено із нелінійними підсистемами побудовано керування, що забезпечує їх асимптотичну стійкість. Оцінено множину значень параметрів, для яких вказана властивість системи зберігається.

1. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости – М.: Наука, 1967. – 223 с.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
3. *Геращенко Е.И., Геращенко С.М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. – М: Наука, 1975. – 296 с.

4. *Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – К: Наук. думка, 1984. – 308 с.
5. *Красовский Н.Н., Климушев А.И.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // ПММ. – 1961. – **25**, № 4. – С. 680 – 690.
6. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975. – 247 с.
7. *Понтрягин Л.С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1957. – **21**, № 5. – С. 605 – 626.
8. *Самойленко А.М., Свищук М.Я.* О расщеплении системы дифференциальных уравнений с медленно меняющейся фазой в окрестности асимптотически устойчивого инвариантного тора // Укр. матем. журнал. – 1985. – **37**, № 6. – С.751 – 756.
9. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. – Матем. сборник. – 1952. – **31**, № 3. – С. 576—586.
10. *Хорошун А.С.* Об устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем Такаги – Сугено. Случай устойчивых подсистем // Докл. НАН Украины. – 2014. – № 4. – С.64 – 69.
11. *Antonyuk E.Ya., Zabuga A.T.* Motion of an Articulated Vehicle with Two-Dimensional Sections Subject to Lateral Obstacles // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 404 – 412.
12. *Assawinchaichote W., Nguang S.K., Shi P.* H_∞ output feedback control design for uncertain fuzzy singularly perturbed systems an LMI approach. // Automatica. – 2004. – **40**. – P. 2147 – 2152.
13. *Assawinchaichote W.* An LMI approach of robust H_∞ fuzzy state-feedback controller design for HIV/AIDS infection system with dual drag dosages // World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Electrical and Computer Engineering. – 2012. – **6,** № 5. – P. 1054 – 1059.
14. *Book W.J.* Modeling, design and control of flexible manipulator arms: a tutorial review // Proc. of the IEEE Decision and Control. – December 1990. – P. 500 – 506.
15. *Kanellacopoulos I., Kokotovic P.V., Marino R.* An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control // Automatica. –1991. – **27**. – P. 247 – 255.
16. *Khoroshun A.S., Martynyuk A.A.* On stability theory of the uncertain singularly perturbed Takagi-Sugeno systems. The case of unstable subsystems // Differential Equations and Dynamical Systems. – 2015. – **23**, N 4. – P. 423 – 431.
17. *Kuzmina L.K.* General modeling problems in mechanics // SAMS. – 1997. – **27.** – P. 105 – 118.
18. *Kuzmina L.K.* Asymptotic approach to the general problem of modelling // Proc. IEEE-SMC. – 1998. –№ 4. – P. 3189 – 3193.
19. *Larin V.B.* Correcting the Parameters of Undamped Mechanical Systems // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 111 – 115.
20. *Legeza V.P.* Effectiveness of a Roller Damper in Suppressing Conductor Galloping // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 422 – 431.
21. *Mehta S., Chiasson J.* Nonlinear control of a series DC-motor: Theory and experiment // IEEE Trans. Ind. Electron. – 1998. – **45**. – P. 134 – 141.
22. *Rajesh R., Kaimal M.R.* T-S fuzzy modelwith nonlinear consequence and PDC controller for a class of nonlinear control systems // Applied Soft Computing. – 2007. – N 7. – P. 772 – 782.
23. *Rao S., Brandstadter H., Buss M., Utkin V.* Sliding mode control in mechanical systems with electric actuators // Proc. of international workshop on variable structure systems, Vilanova i la Geltru, Spain, 2004.
24. *Sala A., Arino C.* Polynomial fuzzy models for nonlinear control: a Taylor series approach // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2009. – **17**, N 6. – P. 1284 – 1295.
25. *Siddarth A., Valasek J.* Global tracking control structures for nonlinear perturbed aircraft systems // Proc. of the CEAS EuroGNC, April 2011. – P. 1 – 12.
26. *Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D.* Global stabilization of an inverted pendulum – control strategy and experimental verification // Automatica. – 2009. – **45,** № 1. – P. 265 – 269.
27. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its application to modeling and controll // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 1985. – **15**, № 1. – P. 116 – 132.
28. *Tanaka K., Wang H.O.* Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. – New York: John Wiley and Sons, 2001. – 305 p.
29. *Tanaka K., Yoshida H., Ohtake H., Wang H.O.* A sum-of-squares approach to moreling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2009.– **17,** N 4. – P. 911 – 922.

Поступила 29.05.2017 Утверждена в печать 30.01.2018