В.А.Баженов[1], А.И.Гуляр[2],
С.О.Пискунов[1], А.А.Шкрыль[1]

ДОСТОВЕРНОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО *J*-ИНТЕГРАЛА ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ

[1] *Киевский национальный университет строительства и архитектуры;*
[2]*Научно-исследовательский институт строительной механики,*
03680, Воздухофлотский пр-т, 31, e-mail: s_piskunov@ua.fm

Abstract. Basing on the numerical experiments, an analysis of invariance and reliability of results of the *J*-integral calculations is carried out by a modified reactions method for the problems of elastoplastic fracture. The bodies with mode-I cracks under elastoplastic deformation in conditions of the simple static loading without allowance for the unloading that corresponds to deformation theory of plasticity are considered. To demonstrate a universality of the developed method of calculation of *J*-integral calculating relative to the finite element discretization schemes, the prismatic bodies are considered, that makes possible applying not only the traditional FEM models, but also semi-analytic finite element method (SFEM).

Key words: fracture mechanics, invariant *J*-integral, path of integration, FEM, elastoplastic problem, modified method of reactions.

Введение.

В настоящее время вопрос решения задач механики разрушения по-прежнему остается актуальным [5 – 14]. Особенный интерес вызывают методы определения параметров разрушения, в частности *J*-интеграла Черепанова – Райса [5, 10 – 14]. В работе [6] показана высокая эффективность определения *J*-интеграла модифицированным методом реакций с привлечением конечноэлементных моделей. Исследования проведены на линейных задачах механики разрушения как для трещин нормального отрыва, так и для трещин, произвольно ориентированных относительно нагрузки. В данной работе проводится исследование эффективности модифицированного метода реакций при определении *J*-интеграла в дискретных моделях призматических тел с трещинами в условиях упругопластического деформирования. При этом, так же как в [6], исследуются нелинейные задачи механики разрушения об определении инвариантных значений *J*-интеграла на основе метода конечных элементов (МКЭ) в пространственных призматических телах с трещинами нормального отрыва. Рассмотрены процессы упругопластического деформирования в условиях простого активного нагружения статической внешней силовой нагрузкой без учета разгрузки, что соответствует деформационной теории пластичности [3]. Рассматриваемый в данной работе класс объектов (призматические тела) позволяет использовать для решения задачи об определении их напряжено-деформированного состояния полуаналитический метод конечных элементов (ПМКЭ) [2].

§1. Исходные соотношения и алгоритм решения задачи упругопластичности.

Упругое деформирование описываем на основе закона Гука. При этом область упругопластических деформаций ограничена некоторой поверхностью текучести, уравнение которой, в соответствии с гипотезой изотропного упрочнения при критерии текучести Мизеса, имеет вид: $f_p = 0,5 s_{ij} s^{ij} - \left[\tau_s\left(\vartheta, T\right)\right]^2 = 0;$, где $\tau_s\left(\vartheta, T\right)$ – предел текучести при чистом сдвиге; s_{ij} – компоненты девиатора напряжений; $\vartheta = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$ – параметр упрочнения Одквиста; ε_{ij}^p – пластические составляющие компоненты тензора деформаций, которые согласно ассоциированному закону пластического течения [3] вычисляются по формуле:

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij} \,,$$

где λ_p – скалярный множитель, определяющий пропорциональность компонент девиатора пластических деформаций и девиатора напряжений и зависящий от физико-механических характеристик материала.

Решение задачи осуществляем с помощью блочно-итерационного алгоритма. На каждой итерации n шага m вектор неизвестных амплитудных перемещений $\left\{u_l\right\}_n^m$ системы нелинейных уравнений ПМКЭ представляем в виде [2]:

$$\left\{u_l\right\}_{n+1}^m = \left\{u_l\right\}_n^m + \beta\left[K_{ll}\right]^{-1}\left(\left\{Q_l\right\}^m - \left\{R_l\right\}_n^m\right),$$

где $\left\{Q\right\}^m$ – вектор узловых нагрузок на шаге m; $\left\{R\right\}_n^m$ – вектор узловых реакций на итерации n, вычисленный на основе значений компонент тензора напряжений σ_{ij}; β – параметр релаксации.

Условием сходимости итерационного процесса на шаге является неравенство

$$\sum_{l=0}^{L}\left(\left\{\Delta u\right\}_l^n\right)^2 \le \zeta \sum_{l=0}^{L}\left(\left\{u\right\}_l^n\right)^2 \,, \tag{1.1}$$

где ζ – параметр точности решения системы уравнений.

В начале каждой итерации n шага m компоненты тензора напряжений σ_{ij} вычисляем по формуле

$$\left(\sigma_{ij}\right)_n = \left(\sigma_{ij}\right)_{n-1} + \left(\Delta\sigma_{ij}\right)_n \,, \tag{1.2}$$

где $\left(\Delta\sigma_{ij}\right)_n$ – приращения компонент тензора напряжений, которые определяем согласно закону Гука на основе приращений компонент тензора деформаций.

Действительные значения напряжений $\left(\overline{\sigma_{ij}}\right)_n^m$, использующиеся для определения компонент вектора узловых реакций $\left\{R\right\}_n^m$, содержат компоненты девиатора напряжений $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$, вычисленные с учетом пластических составляющих тензора приращений деформаций, и равны:

$$\left(\overline{\sigma_{ij}}\right)_n^m = \frac{1}{3}\delta^{ij}\left(\sigma_{ij}\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(\sigma_o\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m \,. \tag{1.3}$$

В случае выполнения условия наличия пластического деформирования $\tau > \tau_s$, компоненты девиатора $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ вычисляем на основе действительного значения предела текучести τ_s [3]:

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(s^{ij}\right)_n^m \frac{\tau_s}{\tau}, \qquad (1.4)$$

где $\tau = \sqrt{s_{ij}s^{ij}/2}$ – действительное значение интенсивности касательных напряжений.

Напряжения, полученные по формулам (1.2) – (1.4), используем для дальнейшего вычисления вектора узловых реакций и проверяем по условию (1.1). Далее проводим вычисление действительных значений приращений деформаций пластичности $\left(\Delta\varepsilon_{ij}^p\right)_m$:

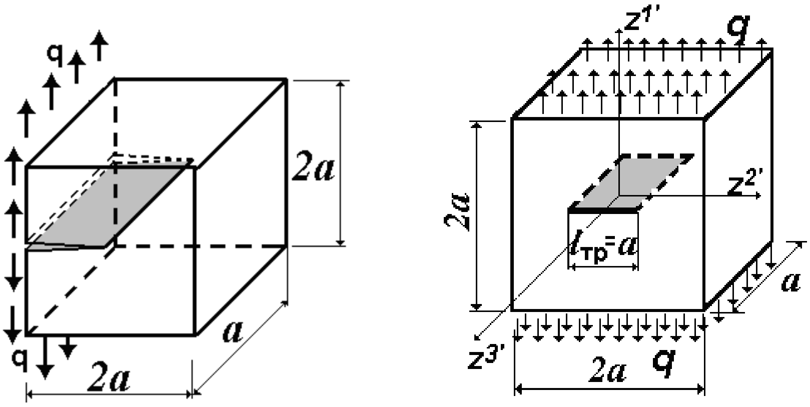
$$\left(\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(\Delta\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right)\left(\overline{s_{ij}}\right)_m \Big/ G_1,$$

где $G_1 = E/(1-2\nu)$, E – модуль упругости материала, ν – коэффициент Пуссона.

Достоверность приведенного алгоритма определения напряженно-деформированного состояния подтверждена результатами решения серии тестовых примеров [2].

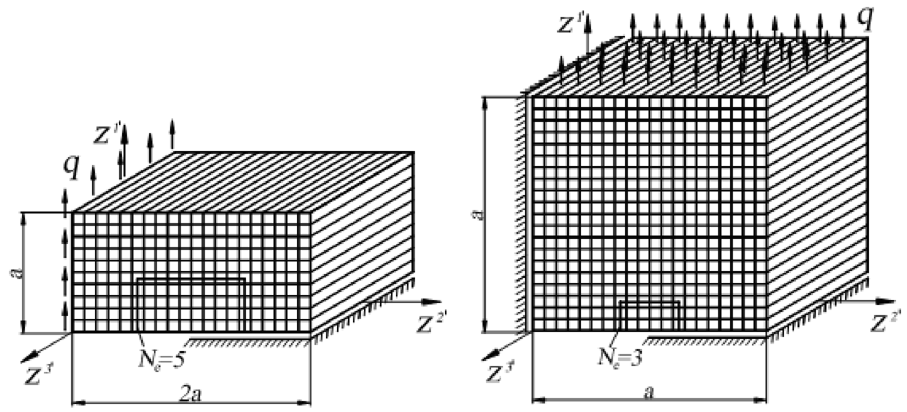
§2. Результаты вычисления *J*-интеграла на основе модифицированного метода реакций при наличии упругопластических деформаций.

Апробация предложенных в [6] подходов к определению *J*-интеграла проведена на тестовых задачах об изгибе призматического тела с боковой трещиной (рис.1, *а*) и растяжении призматического тела с центральной трещиной (рис.1, *б*). Их решение в двумерной постановке (для поперечных сечений в плоскости $z^{1'} - z^{2'}$ в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния) показало, что с появлением и развитием упругопластических деформаций значения *J*-интеграла, вычисленные как методом реакций, так и методом напряжений, незначительно зависят от размеров принятого контура интегрирования [1]. Вычисление *J*-интеграла модифицированным методом реакций в двумерной постановке дает практически одинаковые результаты [1]. В данной статье приведены результаты решения указанных задач в пространственной постановке. Дискретные модели ПМКЭ составлены с учетом условий симметрии (рис. 2). Размеры контура интегрирования определяем параметром N_e – количеством элементов, расположенных от вершины трещины до контура (на рис.2, *а* представлен контур размером $N_e = 5$, на рис.2, *б* – $N_e = 3$).



а *б*

Рис. 1



а *б*

Рис. 2

Решение задач проведено с использованием физико-механических характеристик материала, представленных в [4] для задачи о деформировании компактного образца: $E = 2,05 \times 10^{11}$ Па ; $\nu = 0,3$; закон пластического деформирования принят в таком виде: $\bar{\sigma} / \sigma_m = 1 + 0,645(\bar{\varepsilon}_p)^{0,388}$, где $\sigma_m = 637$ МПа – предел текучести материала; $\bar{\sigma}$ – интенсивность нормальных напряжений; $\bar{\varepsilon}_p$ – интенсивность деформаций.

Решение обеих задач проводилось до момента появления внутри контура упругопластических деформаций величиной $\varepsilon_p = 7\%$. На рис. 3 для задачи об изгибе призматического тела с боковой трещиной показаны графики изменения *J*-интеграла в крайних точках фронта трещины в зависимости от уровня упругопластических деформаций.

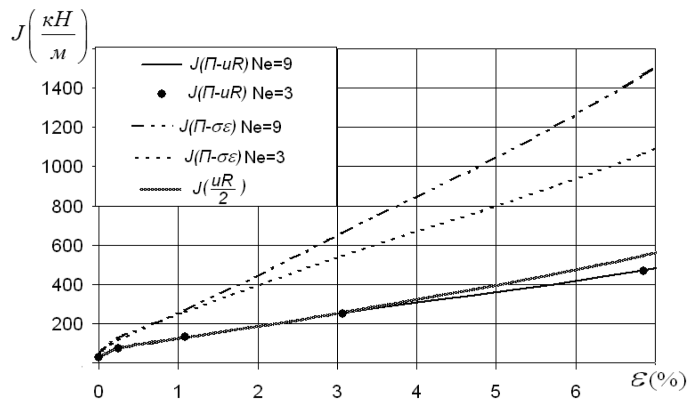


Рис. 3

Результаты показывают, что с увеличением уровня упругопластических деформаций различие между значениями *J*-интеграла, вычисленными на разных контурах методом напряжений (обозначены на рис. 3 $J(\Pi - \sigma\varepsilon)$), увеличивается, а результаты стандартного метода реакций (кривая $J(\Pi - UR)$, рис. 3) почти совпадают между собой и незначительно отличаются от результатов, полученных модифицированным методом реакций (кривая $J\left(uR/2\right)$, рис. 3). Распределение *J*-интеграла вдоль фронта трещины от ее середины до края, находящегося на боковой поверхности тела, симметрично относительно оси $z^{3'}$ и показано на рис. 4 для уровня упругопластических деформаций в вершине трещины 7%. Как видно, характер распределения *J*-интеграла, полученного на разных контурах методом напряжений, отличается не только количественно, но и качественно. Аналогичные распределения *J* -интеграла, полученные методом реакций, имеют небольшое количественное отличие в серединной части фронта трещины, а характер распределения *J*-интеграла вдоль фронта трещины качественно не меняется. Распределение *J*-интеграла, полученное модифицированным методом реакций, хорошо согласуется с результатами, полученными на разных контурах.

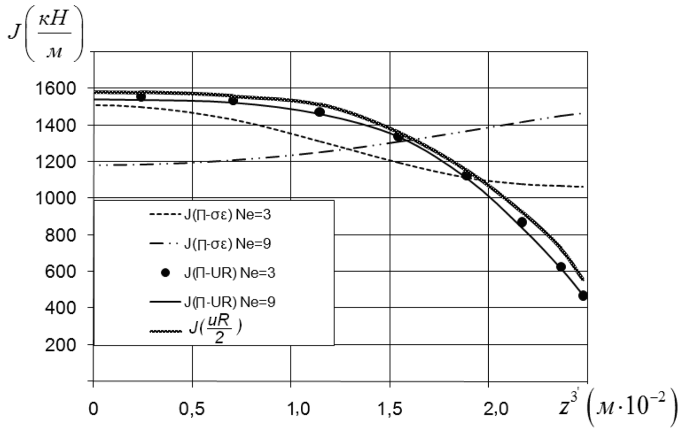


Рис. 4

Результаты аналогичных исследований, проведенных для задачи о растяжении призматического тела с центральной трещиной, представлены на рис. 5, 6. На рис. 5 показаны графики изменения *J*-интеграла в крайних точках фронта трещины в зависимости от уровня упругопластических деформаций. Так же, как и в предыдущей задаче, значения *J*-интеграла, полученные на разных контурах интегрирования методом реакций при аналогичном уровне упругопластических деформаций практически совпадают. Распределение *J*-интеграла, вычисленного модифицированным методом реакций, незначительно отличается от результатов метода реакций на разных контурах. Результаты вычисления *J*-интеграла методом напряжений на разных контурах имеют значительное отличие. Аналогичными предыдущей задаче являются и особенности распределений *J*-интеграла вдоль фронта трещины, полученных разными методами.

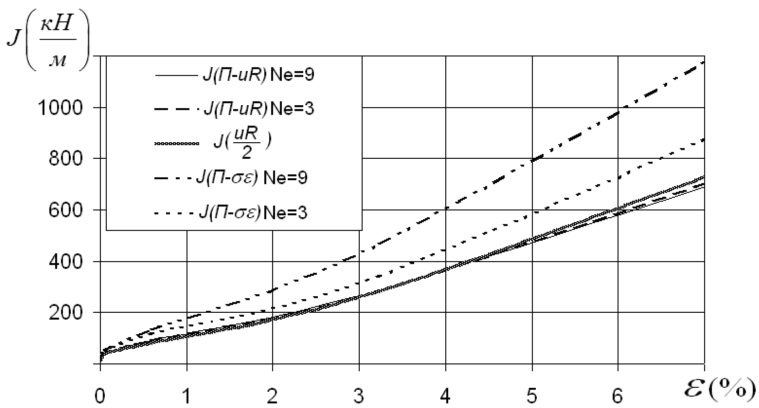


Рис. 5

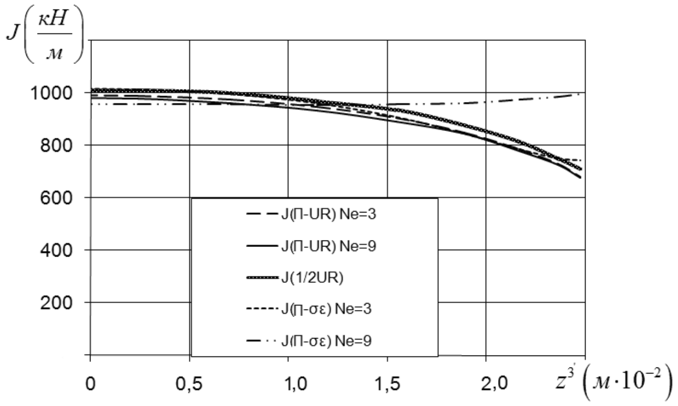
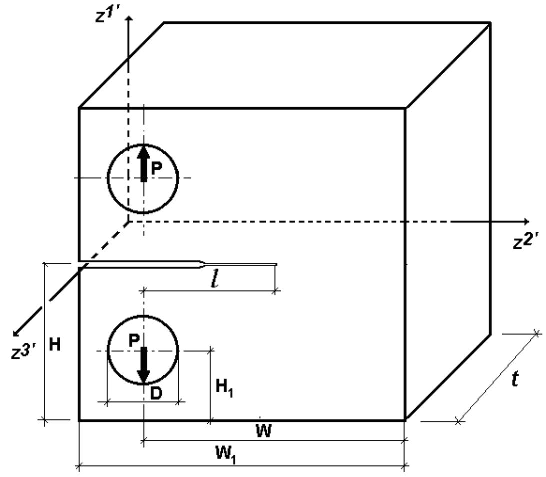


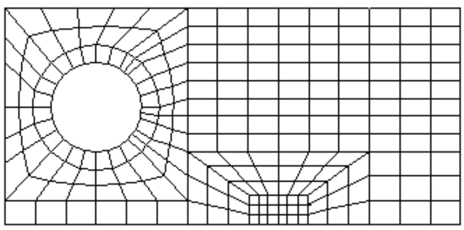
Рис. 6

На основе представленных результатов можно сделать вывод о том, что для достоверного определения распределения *J*-интеграла вдоль фронта трещины в задачах упругопластического деформирования призматических тел с трещинами необходимо использовать метод реакций. Модифицированный вариант метода реакций также дает возможность получать достаточно точные результаты.

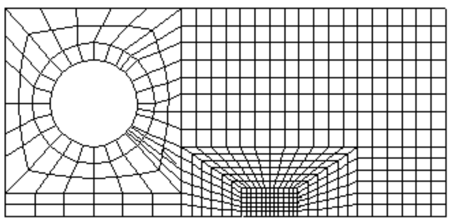
На основе предложенных подходов в пространственной постановке решена задача о вычислении *J*-интеграла при упругопластическом деформировании компактного образца (рис. 7, *а*). Вид поперечного сечения дискретных моделей показан на рис. 7, *б*, *в*.



а



б



в

Рис. 7

Моделирование деформирования образца, в соответствии с [4], проведено под воздействием нагрузки, монотонно возрастающей 0 до 70 кН. В [4] соответствующее решение получено для случаев плоской деформации и плоского напряженного состояния (результаты приведены на рис. 8 и обозначены «пд» и «пнс», соответственно). Зависимости *J*-интеграла от нагрузки в средней точке фронта трещины (кривые при $z^{3'} = 0$) и в точках фронта трещины на боковых поверхностях образца (кривые $z^{3'} = \pm 0{,}025$ м), полученные стандартным и модифицированным методом реакций (обозначения кривых $J(\Pi - uR)$ и $J(uR/2)$, соответственно) показаны на рис. 8.

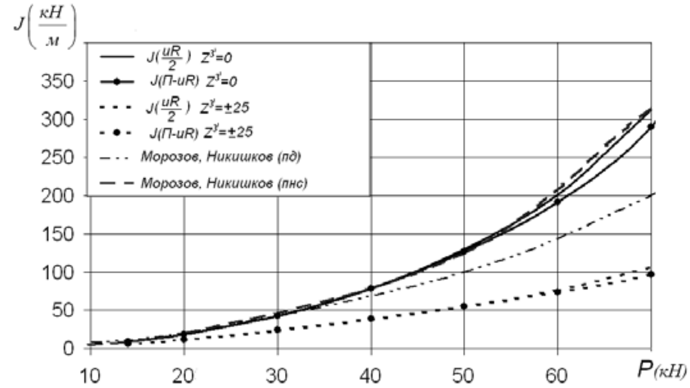


Рис. 8

Распределение *J*-интеграла вдоль фронта трещины при нагрузке 70 кН показано на рис. 9. Как видно, результаты вычисления *J*-интеграла модифицированным методом реакций хорошо согласуются с результатами вычисления *J*-интеграла стандартным методом реакций (по контуру).

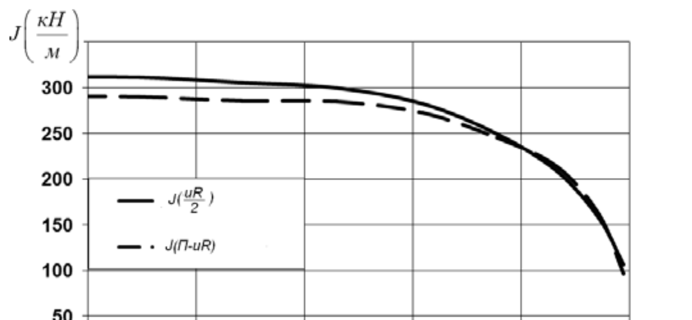


Рис. 9

Заключение.

На основе анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

с появлением и развитием упругопластических деформаций значения *J*-интеграла, полученные методом напряжений, зависят от размеров контура интегрирования;

вычисление *J*-интеграла методом напряжений позволяет получать достоверные значения при соблюдении условия сходимости только в двумерных задачах;

вычисление *J*-интеграла методом реакций позволяет получать достоверные значения как для двумерных, так и для пространственных задач;

определение J-интеграла модифицированным методом реакций позволяет получать результаты, близкие к результатам метода реакций.

Таким образом, использование метода реакций позволяет получать достоверные значения J-интеграла при решении пространственных задач упругопластического деформирования призматических тел.

Р Е З Ю М Е . На основі чисельних експериментів проведено аналіз інваріантності та достовірності результатів обчислення J-інтеграла модифікованим методом реакцій в задачах пружнопластичного руйнування. Розглянуто тіла з тріщинами нормального відриву при пружнопластичному деформуванні в умовах простого завантаження статичним силовим навантаженням без врахування розвантаження, що відповідає деформаційній теорії пластичності. Для демонстрації універсальності розробленого методу обчислення J-інтеграла, по відношенню до схем скінченноелементної дискретизації, розглядалися призматичні тіла, що дозволило використовувати не тільки традиційні схеми МСЕ, але й напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ).

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл (монографія). – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О. Богдан Д.В.* Ефективність визначення J-інтеграла в задачах пружнопластичного деформування // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 86. – С. 3 – 17.
3. *Качанов Л.М.* Теория пластичности. – М.: Наука, 1969. – 468 с.
4. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Либроком, 2010. – 256 с.
5. *Anderson T.* Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. – Boston: CRC Press, 2000. – 793 p.
6. *Bazhenov V.A., Saharov O.S., Maksimyuk Yu.V., Shkryl` A.A.* The Modified Method of Invariant J-Integral Definition in the Finite Element Models of the Prismatic Bodies // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 46 – 54.
7. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Spatial Problems of the Fracture of Materials Loaded Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 489 – 560.
8. *Kaminsky A.A.* Mechanics of the Delayed Fracture of Viscoelastic Bodies with Cracks: Theory and Experiment (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 485 – 548.
9. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Influence of Tension along a Mode I Crack in an Elastic Body on the Formation of a Nonlinear Zone // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 130 – 148.
10. *Lee W., Lee J.* Successive 3D FE analysis technique for characterization of fatigue crack growth behavior in composite-repaired aluminum plate // Composite Structures. – 2004. – **66**. – P. 513 – 520.
11. *Qian X., Dodds R., Choo Y.* Elastic–plastic crack driving force for tubular X-joints with mismatched welds // Engineering Structures. – 2005. – **27**. – P. 1419 – 1434.
12. *Qian X., Dodds R., Choo Y.* Mode mixity for tubular K-joints with weld toe cracks // Engineering Fracture Mechanics. – 2006. – **73**. – P. 1321 – 1342.
13. *Walters M., Paulino G., Dodds R.* Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading // Int. J. of Solids and Structures. – 2004. – **41**. – P. 1081 – 1118.
14. *Walters M., Paulino G., Dodds R.* Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions // Engineering Fracture Mechanics. – 2005. – **72**. – P. 1635 – 1663.

Поступила 04.06.2016 Утверждена в печать 30.01.2018