

В. В. Аврутов

АВТОНОМНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ШИРОТЫ  
С ПОМОЩЬЮ ИНЕРЦИАЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО МОДУЛЯ

*Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт»,  
пр. Победы, 37, 03056, г. Киев, Украина, e-mail: vyshgorod@gmail.com*

**Abstract.** A new method for latitude determination for the fixed base is presented. This method is based on strapdown inertial technology. For this aim, the Inertial Measurement Unit is used that is composed of three accelerometers, three gyroscopes and a plate of signal processing. It is shown that a permanent base declination does not influence on the latitude determination. The carried out experiments demonstrate a validity of this method. The experiments equipment consists of IMU with ring laser gyroscopes and accelerometers. A mathematical model of error in determination of the latitude is developed that depends on errors of gyroscopes and accelerometers. The results of calculation are presented to demonstrate the requirements of the new latitude determination method.

**Key words:** inertial measurement unit, latitude, accelerometers, gyroscopes.

**Введение.**

Решение навигационных задач производится различными методами и соответствующими устройствами. Если такими методами являются методы инерциальной навигации, то в качестве устройств используют инерциально-навигационные системы. Как правило, в качестве чувствительных элементов таких систем используют гироскопы и акселерометры [13], либо только акселерометры [9, 10].

Для нормальной работы инерциальных навигационных систем на этапе их начальной выставки необходимо знать начальные значения широты и долготы места [3, 13]. Обычно эти значения являются известными, если движение транспортных средств осуществляется из аэропортов, космодромов или морских портов. Если же движение начинается из новых мест с неизвестными координатами, то начальные значения широты и долготы места можно определить, используя астрономические методы [6], либо, применяя приемник спутниковой навигационной системы или интернет.

Однако, астрономические методы зависят от погодных условий, а спутниковый метод и доступ к интернету не являются автономными.

Известным автономным средством определения широты является гиросирот (гироскоп Фуко II рода), представляющий собой двухстепенной гироскоп в кардановом подвесе [4]. Для построения гиросирота необходима гировертикаль, с помощью которой ориентируется плоскость внутренней рамки и гироскоп или курсовая система, с помощью которой можно выставить ось вращения рамки в направлении восток – запад. Кроме того, время определения широты будет зависеть от времени переходного процесса такой механической системы.

Известен другой способ определения широты  $\varphi$ , основанный на бескарданной или бесплатформенной технологии [5]  $\cos \varphi = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ , где  $\omega_x, \omega_y$  – горизонталь-

ные проекции северной составляющей проекции угловой скорости Земли, измеряемые либо двумя гироскопами, работающими в режиме датчиков угловой скорости, либо измеряемые одним динамически настраиваемым гироскопом:  $\omega_x = \Omega \cos \varphi \cdot \cos \psi$ ;  $\omega_y = \Omega \cos \varphi \cdot \sin \psi$  ( $\psi$  – текущий угол курса,  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли).

Однако, и в этом случае необходимо горизонтировать площадку, на которой расположены гироскопы.

Кроме того, известна проблема контроля достоверности выходных сигналов датчиков (scalar checking) [11], которую решают наличием информационной избыточности при определении взаимной ориентации двух систем координат по измерениям проекций двух единичных векторов на оси обеих систем координат [8, 12].

Ниже представим новый способ определения начальной широты [2], при котором используется бесплатформенная технология, а также современные инерциальные датчики – гироскопы и акселерометры.

### §1. Описание способа определения широты с помощью инерциально-измерительного модуля.

Введем в рассмотрение следующие системы координат:  $O\xi\eta\zeta$  – географическая система координат (рис. 1), причем ось  $O\eta$  направлена на север, ось  $O\xi$  – на восток, а  $O\zeta$  – местная вертикаль,  $Oxyz$  – система координат, связанная с инерциально-измерительным модулем (ИИМ); его положение относительно Земли показано на рис. 1.

Обозначим через  $\varphi$  – широту места;  $\vec{g}$  – вектор ускорения силы тяжести;  $\vec{\Omega}$  – вектор угловой скорости вращения Земли.

Согласно скалярному произведению двух векторов

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{g} = \Omega \cdot g \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right), \quad (1.1)$$

где  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – модуль ускорения силы тяжести,  $\Omega = 15,04 \text{ град/час}$  – модуль угловой скорости вращения Земли.

С другой стороны, левую часть выражения (1.1) можно представить в виде

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{g} = \Omega_x \cdot g_x + \Omega_y \cdot g_y + \Omega_z \cdot g_z, \quad (1.2)$$

где  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  – проекции угловой скорости вращения Земли на оси  $Oxyz$ ,  $g_x, g_y, g_z$  – проекции ускорения силы тяжести на те же оси.

Сравнивая правые части равенств (1.1) и (1.2), имеем

$$\sin \varphi = -\frac{1}{\Omega \cdot g} (\Omega_x \cdot g_x + \Omega_y \cdot g_y + \Omega_z \cdot g_z), \quad (1.3)$$

а из выражения (1.3) получим искомую формулу для широты места:

$$\varphi = -\arcsin \left[ \frac{1}{\Omega \cdot g} (\Omega_x \cdot g_x + \Omega_y \cdot g_y + \Omega_z \cdot g_z) \right]. \quad (1.4)$$

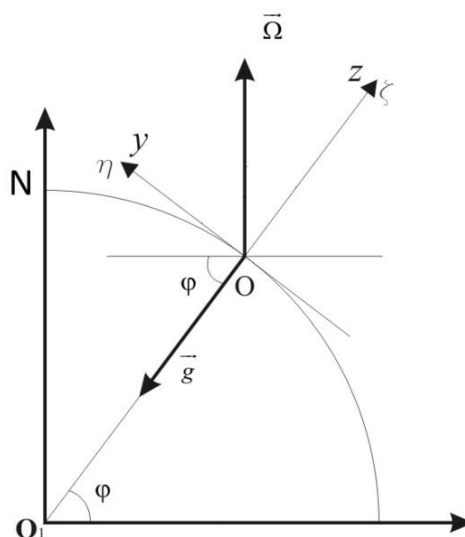


Рис. 1

Итак, для вычисления широты места необходимо иметь значения проекций угловой скорости вращения Земли и проекции ускорения силы тяжести на оси, связанные с ИИМ.

Для проверки справедливости последнего выражения примем, что оси ИИМ совпадают с осями географической системы координат:  $Ox = O\xi$ ,  $Oy = O\eta$ ,  $Oz = Oz$ . В этом случае имеем:

$$\Omega_x = 0; \Omega_y = \Omega \cos \varphi; \Omega_z = \Omega \sin \varphi; g_x = g_y = 0; g_z = -g. \quad (1.5)$$

Подставляя последние значения в формулу (1.3), получаем тривиальное выражение:  $\sin \varphi = \sin \varphi$ .

Покажем, что данный способ определения начальной широты инвариантен к постоянному наклону ИИМ относительно плоскости горизонта, а также отклонению ИИМ по азимуту.

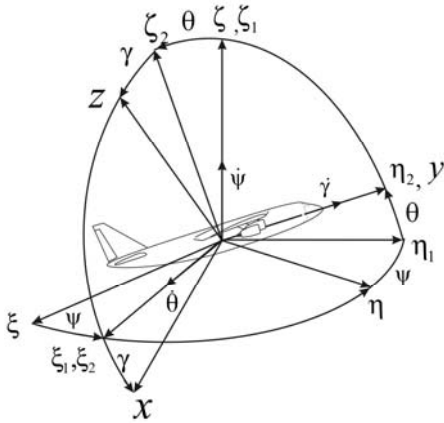


Рис. 2

## §2. Инвариантность определения широты к постоянным наклонам ИИМ.

Пусть ИИМ имеет наклон относительно плоскости горизонта, а также отклонение по азимуту, как показано на рис. 2. Здесь углы  $\psi, \theta, \gamma$  – постоянные углы смещения (рыскания, тангажа и крена) относительно географической системы координат. Системы координат связаны между собой следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n^b \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{C}_n^b$  – матрица направляющих косинусов:

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi - \sin \gamma \sin \theta \sin \psi & \cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \sin \theta \cos \psi & -\sin \gamma \cos \theta \\ -\cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \theta \sin \psi & \sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \sin \theta \cos \psi & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Из соотношения (2.1) можно получить матричные выражения для проекций ускорения силы тяжести –

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

а также проекции угловой скорости вращения Земли –

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n^b \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.2) получим такие формулы:

$$g_x = \sin \gamma \cdot \cos \theta \cdot g; \quad g_y = -\sin \theta \cdot g; \quad g_z = -\cos \gamma \cdot \cos \theta \cdot g. \quad (2.4)$$

А на основе соотношений (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \Omega_x &= (\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \sin \theta \cos \psi) \cdot \Omega \cos \varphi - \sin \gamma \cdot \cos \theta \cdot \Omega \sin \varphi; \\ \Omega_y &= \cos \theta \cos \psi \cdot \Omega \cos \varphi + \sin \theta \cdot \Omega \sin \varphi; \\ \Omega_z &= (\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \sin \theta \cos \psi) \cdot \Omega \cos \varphi + \cos \gamma \cdot \cos \theta \cdot \Omega \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставив правые части выражений (2.4) и (2.5) в правую часть (1.3). После несложных преобразований получим  $\sin \varphi = \sin \varphi$ .

Таким образом, постоянный наклон ИИМ относительно плоскости горизонта, а также отклонение ИИМ по азимуту не оказывают влияния на определение начальной широты места.

### §3. Экспериментальное определение широты с использованием ИИМ.

Для экспериментального определения широты использован ИИМ, состоящий из ортогонально расположенных трех кольцевых лазерных гироскопов и трех акселерометров.

Первый эксперимент проходил в г. Киев (широта места:  $\varphi = 50^\circ 27' 0''$ ).

Измерялись усредненные значения проекций угловой скорости вращения Земли (град/час) и проекций ускорения силы тяжести ( $\text{м/с}^2$ ) на оси, связанные с ИИМ:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= 9,426; \quad g_x = -0,0437; \\ \Omega_y &= 11,663; \quad g_y = 9,8117; \\ \Omega_z &= -1,055; \quad g_z = -0,0070. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Предварительная проверка показала, что  $\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2} = 15,033$  град/час, а  $g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = 9,8118$   $\text{м/с}^2$ .

Вычисленное значение широты составило  $\varphi = 50^\circ 36' 14''$ . Погрешность определения широты  $\Delta\varphi = 0^\circ 09' 14''$ .

Второй эксперимент проводился в г. Харьков (широта места:  $\varphi = 50^\circ 00' 00''$ ).

Измеренные усредненные значения проекций угловой скорости вращения Земли (град/час) и проекций ускорения силы тяжести ( $\text{м/с}^2$ ) на оси, связанные с ИИМ были равны:

$$\Omega_x = 9,556; \quad g_x = 0,0236; \quad \Omega_y = 11,460; \quad g_y = 9,8092; \quad \Omega_z = 0,057; \quad g_z = 0,0626. \quad (3.2)$$

Предварительная проверка показала, что

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2} = 14,942 \text{ град/час}; \\ g &= \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = 9,8089 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Вычисленное значение широты составило  $\varphi = 49^\circ 43' 30''$ . Погрешность определения широты  $\Delta\varphi = 0^\circ 16' 30''$ .

Для исследования погрешности вычисления значения широты в условиях первого эксперимента был расширен набор измерений ИИМ. Для этого осуществлялись последовательные развороты ИИМ в горизонтальной плоскости с шагом  $30^\circ$  в диапазоне от  $0$  до  $360^\circ$ . В каждой из ориентаций были измерены проекции угловой скорости вращения Земли (град/час) и проекции ускорения силы тяжести ( $\text{м/с}^2$ ). Полученные значения использованы для расчетов погрешности определения широты места, как разности вычисленного по (1.8) и эталонного значения широты. Результаты такого

эксперимента представлены на рис. 3, где показана зависимость погрешности определения широты при повороте и фиксации прибора в горизонтальной плоскости с шагом 30°.

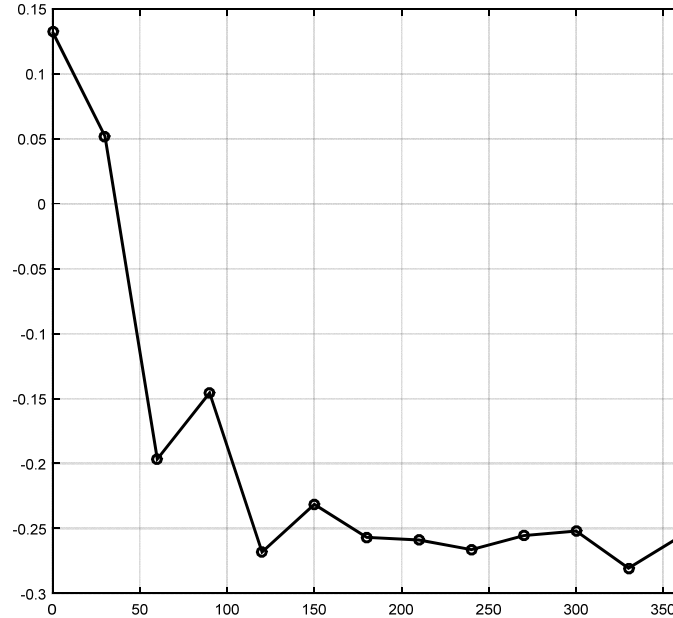


Рис. 3

Можно предположить, что основными причинами возникновения погрешности определения широты места, являются погрешности гироскопов и акселерометров.

#### §4. Разработка модели погрешности определения широты.

Исходя из выражения (1.4) можно определить широту как функцию шести переменных:

$$\varphi = f(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, g_x, g_y, g_z). \quad (4.1)$$

Для определения погрешности широты разложим выражение (1.4) в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка малости по каждой переменной:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial f}{\partial \Omega_x} \cdot \Delta\Omega_x - \frac{\partial f}{\partial \Omega_y} \cdot \Delta\Omega_y - \frac{\partial f}{\partial \Omega_z} \cdot \Delta\Omega_z - \frac{\partial f}{\partial g_x} \cdot \Delta g_x - \frac{\partial f}{\partial g_y} \cdot \Delta g_y - \frac{\partial f}{\partial g_z} \cdot \Delta g_z. \quad (4.2)$$

После несложных преобразований получим

$$\Delta\varphi = -\frac{\Omega_x \cdot \Delta g_x + \Omega_y \cdot \Delta g_y + \Omega_z \cdot \Delta g_z + g_x \cdot \Delta\Omega_x + g_y \cdot \Delta\Omega_y + g_z \cdot \Delta\Omega_z}{\sqrt{\Omega^2 g^2 - (\Omega_x \cdot g_x + \Omega_y \cdot g_y + \Omega_z \cdot g_z)^2}}. \quad (4.3)$$

Итак, точность определения широты места зависит от точности всех гироскопов и всех акселерометров.

Для случая, когда ИИМ выставлен в плоскости горизонта и меридиана, т.е.  $Ox = O\xi$ ,  $Oy = O\eta$ ,  $Oz = Oz$ , и с учетом (1.5), выражение (4.3) примет вид

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\Omega g \cos \varphi} \cdot (\Omega \cos \varphi \cdot \Delta g_y + \Omega \sin \varphi \cdot \Delta g_z - g \cdot \Delta\Omega_z). \quad (4.4)$$

Очевидно, в этом случае погрешность определения широты места зависит от погрешности двух акселерометров и одного гироскопа.

Оценим, какой дрейф должен иметь гироскоп при заданной точности определения широты места. Для этого оставим в последней формуле необходимые для расчетов величины и после этого получим формулу для оценки дрейфа гироскопа

$$\Delta\Omega_z = \Delta\varphi \cdot \Omega \cos\varphi. \quad (4.5)$$

Пусть  $\Delta\varphi = 1^\circ$  и  $\varphi = 60^\circ$ . С учетом того, что  $\Omega = 15,04$  град/час, получим  $\Delta\Omega_z = 0,13$  град/час.

Теперь оценим требуемую погрешность акселерометров при заданной точности определения широты места. Оставим в формуле (4.4) необходимые для расчетов величины:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{g \cos\varphi} \cdot (\cos\varphi \cdot \Delta g_y + \sin\varphi \cdot \Delta g_z). \quad (4.6)$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\Delta\varphi = -\frac{\Delta g}{g \cos\varphi} \sin(\varepsilon + \varphi), \quad (4.7)$$

где  $\Delta g = \sqrt{\Delta g_y^2 + \Delta g_z^2}$ ,  $\sin\varepsilon = \frac{\Delta g_y}{\Delta g}$ ,  $\cos\varepsilon = \frac{\Delta g_z}{\Delta g}$ .

Из последнего выражения получим формулу для оценки погрешности акселерометров

$$\Delta g = \Delta\varphi \cdot g \cos\varphi. \quad (4.8)$$

Пусть  $\Delta\varphi = 0,1^\circ$  и  $\varphi = 60^\circ$ . С учетом того, что  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>, получим

$$\Delta g = 0,0086 \text{ м/с}^2.$$

В таблице представлены численные оценки погрешностей гироскопов  $\Delta\Omega_z$  и акселерометров  $\Delta g$  в зависимости от погрешности определения широты места  $\Delta\varphi$ . Полученные численные оценки показывают, что для практической реализации данного метода определения широты места требуются достаточно точные гироскопы и навигационные акселерометры

$\Delta\varphi$ , град	$\Delta\varphi$ , угл. мин	$\Delta\Omega_z$ , град/час	$\Delta g$ , g
0,000449868	0,026992053	5,88577E-05	3,92384E-06
0,000899735	0,053984106	0,000117715	7,84769E-06
0,00179947	0,107968213	0,000235431	1,56954E-05
0,002699205	0,161952319	0,000353146	2,35431E-05
0,004498676	0,269920532	0,000588577	3,92384E-05
0,008997351	0,539841063	0,001177153	7,84769E-05
0,017994702	1,079682126	0,002354307	0,000156954

С другой стороны, перед применением предложенного способа определения широты необходимо калибровать ИИМ [1, 7]. Представляет практический интерес использования ИИМ, построенного на MEMS технологии. Однако, в этом случае, кроме калибровки необходимо будет применять наблюдающие устройства или оптимальную фильтрацию выходных сигналов инерциальных датчиков.

#### Выводы.

1. Предложен автономный метод определения широты места для неподвижного основания. Для этого необходимо иметь ИИМ, который содержит три акселерометра и три гироскопа. Постоянный наклон ИИМ относительно плоскости горизонта, а так-

же отклонение ИИМ по азимуту, не оказывают влияния на определение начальной широты места.

2. Проведенные эксперименты подтвердили справедливость данного метода. Разработана модель погрешности определения широты места, которая показала, что основными причинами возникновения погрешности определения широты места, являются погрешности гироскопов и акселерометров. Результаты численных расчетов показали, что для практической реализации данного метода определения широты места требуются достаточно точные гироскопы и навигационные акселерометры.

3. В будущем представляет практический интерес применения для этой задачи MEMS датчиков, прошедших предварительную калибровку и использующих оптимальную фильтрацию шумовых составляющих выходных сигналов.

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано новий метод визначення широти місця для нерухомої основи. Метод базується на безплатформовій інерціальній технології, для чого використовується інерціально-вимірювальний модуль. Цей модуль складається з трьох акселерометрів, трьох гіроскопів та плати обробки сигналів. Показано, що постійні нахили основи не впливають на визначення широти. Проведені експерименти підтвердили справедливість нового методу визначення широти місця. Експериментальне устаткування складалося з інерціально-вимірювального модуля з лазерних гіроскопів та навігаційних акселерометрів. Розроблено математичну модель похибки визначення широти місця, яка залежить від похибок акселерометрів та гіроскопів. Приведено результати обчислень, які демонструють вимоги до характеристик чутливих елементів.

1. *Аврутов В.В.* Испытания инерциальных приборов. – К.: НТУУ «КПИ», 2016. – 205 с.
2. *Патент України № 123355* від 26.02.2018: «Спосіб визначення широти місця».
3. *Мелешко В.В.* Инерциальные навигационные системы. Начальная выставка. – К.: Корнейчук, 1999. – 126 с.
4. *Павловский М.А.* Теория гироскопов. – К.: Вища шк., 1986. – 303 с.
5. *Патент Российской Федерации № 2 572 651* от 09.09.2014.
6. *Самотокин Б.Б., Мелешко В.В., Степанковский Ю.В.* Навигационные приборы и системы. – К.: Вища шк., 1986. – 343 с.
7. *Avrutov V.V., Sapegin A.N., Stefanishin Z.S., Cisarzh V.V.* Calibration of an Inertial Measurement Unit // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 2. – P. 228 – 236.
8. *Binder Ya.I., Paderina T.V., Litmanovich Yu A.* Advanced Borehole Attitude Determination without Measuring Axial Angular Rate Component // *Proc. of the IEEE/ION PLANS – 2006*, April 25 – 27, 2006. – San Diego, CA. – P. 963 – 968.
9. *Larin V.B., Tunik A.A.* About Inertial-Satellite Navigation System without Rate Gyros // *Appl. and Comp. Math.* – 2010. – **9**, N 1. – P. 3 – 18.
10. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Inertial-Navigation System without Angular-Rate Sensors // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 4. – P. 488 – 500.
11. *Lerner, G.M.* Scalar checking. In: *Spacecraft Attitude Determination and Control* (J.R. Wertz, Ed.), D.Riedel, Dordrecht, Holland, 1978. – P. 328 – 331.
12. *Litmanovich Yu.A.* On one approach to the use of redundant information in attitude determination from two vector observations // *Gyroscopy and Navigation.* – 2012. – **3**, N 4. – P. 280 – 285.
13. *Titterton D.H., Weston J.L.* Strapdown Inertial Navigation Technology. – Stevenage: Institution of Electrical Engineers, 2004, Series **17**. – 558 p.

Поступила 03.09.2017

Утверждена в печать 30.01.2018