

Я.М.Григоренко¹, Л.С.Рожок²

**СЛОИСТЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ПОЛЫЕ ЦИЛИНДРЫ
С ВОГНУТЫМ ГОФРИРОВАННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ**

¹ *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; yaagrigorenko@uandex.ru;*

² *Национальный транспортный университет,
ул. Омельяновича - Павленко, 1, 01010, Киев, Украина; r.l.s@ua.fm*

Abstract. A solution of problem is obtained and the stress state is studied for the hollow inhomogeneous layered cylinders with the cross sections in the form of concave semi-corrugations in dependence on rigidity of the middle layer. This problem is solved in the spatial statement with use of analytical methods of separation of variables, approximation of functions with discrete Fourier series, and numerical method of discrete orthogonalization. Analysis of findings is given.

Key words: discrete Fourier series, discrete-orthogonalization method, concave semi-corrugation, noncircular hollow inhomogeneous layered cylinder, stress state.

Введение.

Оболочечные конструкции широко применяются в авиа-, судо- и ракетостроении, в химическом машиностроении, промышленном строительстве и многих других областях современной техники [8, 9, 11, 17].

При создании новых конструкций машин, оборудования, сооружений на разных стадиях проектирования и принятия проектно-конструкторских решений требуется информация о влиянии конструктивных параметров на их напряженное состояние. Эта информация в отсутствии опытных данных может быть получена только с помощью теоретических моделей. Разработка перспективных видов конструкций зависит от наличия опережающих разработок эффективных средств их математического моделирования.

Поэтому представляется актуальной разработка теоретических моделей статического деформирования, устойчивости и колебаний оболочек и оболочечных конструкций, выполненных из неоднородного материала с учетом особенностей физико-механических свойств этих материалов, применительно к новым видам оболочечных конструкций [10, 13 – 16].

Одной из основных тенденций развития современной техники является широкое использование композитных материалов, имеющих неоднородную структуру [2, 5, 18, 19]. Неоднородность материала оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние оболочек и оболочечных систем, которое отличается от напряженного состояния традиционных оболочек из однородных изотропных материалов. В связи с этим математическая модель проектируемой конструкции должна учитывать специфику используемого для ее изготовления материала.

В данной статье исследовано напряженное состояние трехслойных полых цилиндров с гофрированным вогнутым поперечным сечением под действием внутреннего давления в зависимости от жесткости среднего слоя и изменения некоторых параметров кривизны поперечного сечения.

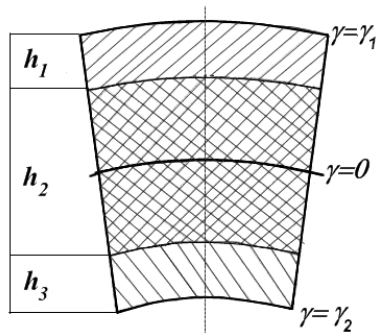


Рис. 1

§1. Постановка задачи и метод решения.

Рассмотрим трехслойные полые некруговые цилиндры симметричного строения относительно срединной поверхности (рис. 1), составленные из жестко скрепленных слоев, взаимодействующих без скольжения и отрыва, находящиеся под действием внутреннего давления $q = q_0 \sin(\pi s / l)$ ($q_0 = \text{const}$).

Примем, в общем случае, что в каждом слое материал является неоднородным по толщине и однородным по образующей и направляющей. Условия совместной работы слоев формулируются следующим образом:

на поверхности контакта i -ого и $i+1$ -ого слоев должны быть непрерывны напряжения $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\psi\gamma}$ и перемещения u_γ, u_s, u_ψ , т.е. при $\gamma = \gamma_i$ имеем

$$\sigma_\gamma^i = \sigma_\gamma^{i+1}; \quad \tau_{s\gamma}^i = \tau_{s\gamma}^{i+1}; \quad \tau_{\psi\gamma}^i = \tau_{\psi\gamma}^{i+1}; \quad u_\gamma^i = u_\gamma^{i+1}; \quad u_s^i = u_s^{i+1}; \quad u_\psi^i = u_\psi^{i+1}.$$

Отнесем рассматриваемые цилиндры к ортогональной криволинейной системе координат s, ψ, γ , где s – длина дуги по образующей, ψ – полярный угол в поперечном сечении, γ – нормальная координата по толщине цилиндра ($0 \leq s \leq l$; $0 \leq \psi \leq 2\pi$; $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$).

Первую квадратичную форму для цилиндров запишем в следующем виде:

$$dS^2 = ds^2 + A_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2, \quad (1.1)$$

где $A_2(\psi, \gamma) = H_2(\psi, \gamma)\omega(\psi)$, $H_2(\psi, \gamma) = H_2 = 1 + \gamma / R(\psi)$ – параметр Ламе; $R_\psi = R(\psi) = \left((dx/d\psi)^2 + (dy/d\psi)^2 \right)^{3/2} / \left(\frac{dx}{d\psi} \frac{d^2y}{d\psi^2} - \frac{dy}{d\psi} \frac{d^2x}{d\psi^2} \right)$ – радиус кривизны в поперечном сечении; $\omega(\psi) = \omega = \sqrt{(dx/d\psi)^2 + (dy/d\psi)^2}$ – коэффициент перехода от координаты дуги направляющей к угловому параметру ψ .

Поперечное сечение направляющей поверхности отсчета имеет вид соединенных вогнутых полугофров (рис. 2), описывается в параметрическом виде при помощи укороченной гипоциклоиды [12]

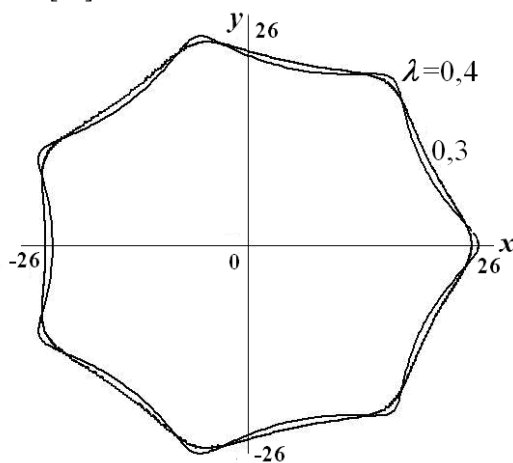


Рис. 2

$$x = (A - a) \cos \psi + \lambda a \cos \left(\frac{A - a}{a} \psi \right); \quad y = (A - a) \sin \psi - \lambda a \sin \left(\frac{A - a}{a} \psi \right),$$

где A – радиус неподвижной окружности; a ($a > 0$) – радиус подвижной окружности; λa ($\lambda < 1$) – расстояние до центра подвижной окружности.

Отношение радиуса неподвижной окружности к радиусу подвижной (A/a) определяет количество полугофров, а параметр λ – их амплитуду.

Приняв в качестве исходных уравнения пространственной теории упругости для ортотропного тела [3, 6, 7], а за разрешающие функции – компоненты напряжений σ_γ^i , $\tau_{s\gamma}^i$, $\tau_{\psi\gamma}^i$ и перемещений u_γ^i , u_s^i , u_ψ^i , с учетом (1.1) после некоторых преобразований получим разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами шестого порядка для каждого слоя (в области $0 \leq s \leq l$; $0 \leq \psi \leq 2\pi$; $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial \gamma} &= (c_2^i - 1) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \sigma_\gamma^i - \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial s} - \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}^i}{\partial \psi} + b_{22}^i \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma^i + \\ &+ b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s^i}{\partial s} + b_{22}^i \frac{1}{H_2^i A_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\psi^i}{\partial \psi}; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial \gamma} &= -c_1^i \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial s} - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma}^i - b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s} - b_{11}^i \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s^2} - \\ &- b_{66}^i \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{A_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial \psi} \right) - (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial^2 u_\psi^i}{\partial s \partial \psi}; \\ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}^i}{\partial \gamma} &= -c_2^i \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial \psi} - \frac{2}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{\psi\gamma}^i - b_{22}^i \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i \right) - \\ &- (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s \partial \psi} - b_{22}^i \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{A_2^i} \frac{\partial u_\psi^i}{\partial \psi} \right) - b_{66}^i \frac{\partial^2 u_\psi^i}{\partial s^2}; \\ \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma} &= c_4^i \sigma_\gamma^i - c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i - c_1^i \frac{\partial u_s^i}{\partial s} - c_2^i \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial u_\psi^i}{\partial \psi}; \\ \frac{\partial u_s^i}{\partial \gamma} &= a_{55}^i \tau_{s\gamma}^i - \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_\psi^i}{\partial \gamma} = a_{44}^i \tau_{\psi\gamma}^i - \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\psi^i. \end{aligned} \tag{1.2}$$

В системе уравнений (1.2) приняты такие обозначения:

$$\begin{aligned} b_{11}^i &= a_{22}^i a_{66}^i / \Omega^i; \quad b_{12}^i = -a_{12}^i a_{66}^i / \Omega^i; \quad b_{22}^i = a_{11}^i a_{66}^i / \Omega^i; \\ b_{66}^i &= (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^i{}^2) / \Omega^i; \quad \Omega^i = (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^i{}^2) a_{66}^i; \\ c_1^i &= -(b_{11}^i a_{13}^i + b_{12}^i a_{23}^i); \quad c_2^i = -(b_{12}^i a_{13}^i + b_{22}^i a_{23}^i); \quad c_4^i = a_{33}^i + c_1^i a_{13}^i + c_2^i a_{23}^i, \end{aligned}$$

где для ортотропного материала имеем

$$a_{11}^i = \frac{1}{E_s^i}; \quad a_{12}^i = -\frac{\nu_{s\psi}^i}{E_\psi^i} = -\frac{\nu_{\psi s}^i}{E_s^i}; \quad a_{13}^i = -\frac{\nu_{s\gamma}^i}{E_\gamma^i} = -\frac{\nu_{\gamma s}^i}{E_s^i}; \quad a_{22}^i = \frac{1}{E_\psi^i};$$

$$a_{23}^i = -\frac{\nu_{\psi\psi}^i}{E_{\psi}^i} = -\frac{\nu_{\psi\gamma}^i}{E_{\gamma}^i}; \quad a_{33}^i = \frac{1}{E_{\gamma}^i}; \quad a_{44}^i = \frac{1}{G_{\psi\gamma}^i}; \quad a_{55}^i = \frac{1}{G_{s\gamma}^i}; \quad a_{66}^i = \frac{1}{G_{s\psi}^i},$$

а для изотропного материала –

$$a_{11}^i = a_{22}^i = a_{33}^i = \frac{1}{E^i}; \quad a_{12}^i = a_{13}^i = a_{23}^i = -\frac{\nu^i}{E^i}; \quad a_{44}^i = a_{55}^i = a_{66}^i = \frac{2(1+\nu^i)}{E^i}.$$

Сформулируем граничные условия на торцах и боковых поверхностях цилиндра.

Пусть на торцах цилиндра имеют место граничные условия, соответствующие наличию диафрагмы абсолютно гладкой в своей плоскости и гибкой из нее, т.е.

$$\sigma_s^i = u_{\psi}^i = u_{\gamma}^i = 0 \quad \text{при } s = 0; \quad s = l. \quad (1.3)$$

На боковых поверхностях граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{\gamma}^+ = 0; \quad \tau_{s\gamma}^+ = 0; \quad \tau_{\psi\gamma}^+ = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1; \quad \sigma_{\gamma}^- = q_{\gamma}; \quad \tau_{s\gamma}^- = 0; \quad \tau_{\psi\gamma}^- = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \quad (1.4)$$

Для решения полученной краевой задачи используем численно-аналитический подход [4], основанный на разделении переменных вдоль образующей и направляющей цилиндра путем представления соответствующих функций в виде рядов Фурье, а также с помощью введения в разрешающую систему уравнений дополнительных функций, которые будут аппроксимированы дискретными рядами Фурье. В результате применения такого подхода, трехмерная краевая задача сводится к одномерной, которая описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями более высокого порядка. Полученную одномерную краевую задачу решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [1].

В соответствии с условиями на торцах цилиндра (1.3) и периодичностью всех факторов напряженно-деформируемого состояния по координате ψ , представим их в виде следующих рядов (в дальнейшем индекс слоя i опустим):

$$\sigma_{\gamma}(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^K \sigma_{\gamma, nk} \sin(\lambda_n s) \cos(k\psi); \quad \tau_{s\gamma}(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K \tau_{s\gamma, nk} \cos(\lambda_n s) \cos(k\psi);$$

$$\tau_{\psi\gamma}(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \tau_{\psi\gamma, nk} \sin(\lambda_n s) \sin(k\psi); \quad u_{\gamma}(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^K u_{\gamma, nk} \sin(\lambda_n s) \cos(k\psi);$$

$$u_s(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K u_{s, nk} \cos(\lambda_n s) \cos(k\psi); \quad u_{\psi}(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K u_{\psi, nk} \sin(\lambda_n s) \sin(k\psi);$$

$$q_{\gamma}(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^K q_{\gamma, nk} \sin(\lambda_n s) \cos(k\psi), \quad \text{где } \lambda_n = \pi n / l \quad (0 \leq s \leq l).$$

На этапе разделения переменных по угловой координате ψ в разрешающую систему уравнений предварительно вводим дополнительные функции, формально позволяющие разделить переменные по координате ψ , содержащие в себе произведения разрешающих функций на коэффициенты, препятствующие такому разделению. Эти функции имеют вид:

$$\varphi_1^j = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \sigma_{\gamma}; \tau_{s\gamma}; u_{\gamma}; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma} \right\} \quad (j = \overline{1, 5});$$

$$\varphi_2^j = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \{ \tau_{\psi\gamma}; u_{\psi} \} \quad (j = \overline{1, 2}); \quad \varphi_3^j = \frac{1}{A_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_{\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1, 3});$$

$$\varphi_4^j = \frac{1}{A_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_{\psi}}{\partial \psi}; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_{\psi}}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \quad (1.5)$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_4^2.$$

Ряды Фурье для дополнительных функций представляем в виде

$$\tilde{X}(\psi, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos k\psi; \quad \tilde{Y}(\psi, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin k\psi,$$

где $\tilde{X} = \{\varphi_1, \varphi_4, \varphi_6\}$; $\tilde{Y} = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5, \varphi_7\}$.

Таким образом, разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительными функциями для одномерной краевой задачи принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,nk}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,nk} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 + b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,nk}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,nk} + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,nk} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{\psi\gamma,nk}}{d\gamma} &= b_{66}\lambda_n^2 u_{\psi,nk} - c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k}; \\ \frac{du_{\gamma,nk}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,nk} + c_1 \lambda_n u_{s,nk} - c_2 \varphi_{4,k}^2 - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\ \frac{du_{s,nk}}{d\gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma,nk} - \lambda_n u_{\gamma,nk}; \quad \frac{du_{\psi,nk}}{d\gamma} = a_{44} \tau_{\psi\gamma,nk} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (n = \overline{0, N}; \quad k = \overline{0, K}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

с граничными условиями вида

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_2: \quad \sigma_{\gamma,nk}^- &= q_{\gamma,nk}; \quad \tau_{s\gamma,nk}^- = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,nk}^- = 0; \\ \gamma = \gamma_1: \quad \sigma_{\gamma,nk}^+ &= 0; \quad \tau_{s\gamma,nk}^+ = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,nk}^+ = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Входящие в систему уравнений (1.6) амплитудные значения дополнительных функций $\varphi_{m,j}^k$ вычисляем на каждом шаге интегрирования системы уравнений (1.5) при $\gamma = \text{const}$ по текущим значениям разрешающих функций. При этом имеют место соотношения, определяющие связанность всех уравнений системы (1.6), т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_{1,k}^j &= \varphi_{1,k}^j \{ \gamma; \sigma_{\gamma,nl}; \tau_{s\gamma,nl}; u_{\gamma,nl}; u_{s,nl} \} \quad (j = \overline{1,5}); \quad \varphi_{2,k}^j = \varphi_{2,k}^j \{ \gamma; \tau_{\psi\gamma,nl}; u_{\psi,nl} \} \quad (j = \overline{1,2}); \\ \varphi_{3,k}^j &= \varphi_{3,k}^j \{ \gamma; \sigma_{\gamma,nl}; u_{\gamma,nl}; u_{s,nl} \} \quad (j = \overline{1,3}); \quad \varphi_{4,k}^j = \varphi_{4,k}^j \{ \gamma; \tau_{\psi\gamma,nl}; u_{\psi,nl}; u_{\psi,nl} \} \quad (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_{5,k} &= \varphi_{5,k} \{ \gamma; u_{\gamma,nl} \}; \quad \varphi_{6,k} = \varphi_{6,k} \{ \gamma; u_{s,nl} \}; \quad \varphi_{7,k} = \varphi_{7,k} \{ \gamma; u_{\psi,nl} \} \quad (n = \overline{0, N}; \quad l = \overline{0, K}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Интегрирование системы уравнений (1.6) осуществляем при помощи устойчивого численного метода дискретной ортогонализации, который основан на применении метода Рунге – Кутты с ортогонализацией решений в отдельных точках интервала $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$. На каждом последующем шаге интегрирования, в ряде точек ψ_r интервала $[0; 2\pi]$, вычисляем значения дополнительных функций, согласно выражениям

(1.5). Для полученных таким образом дискретно заданных функций строим ряды Фурье, амплитудные значения которых подставляем в разрешающую систему уравнений (1.6) и производим очередной шаг интегрирования. В начале интегрирования амплитудные значения дополнительных функций определяем по соответствующим значениям разрешающих функций, согласно граничным условиям (1.7).

Применяемый подход с использованием метода дискретной ортогонализации и дискретных рядов Фурье позволяет получить решение задачи с достаточной степенью точности, поскольку с увеличением количества точек, в которых определяются значения дополнительных функций, дискретный ряд Фурье будет все меньше отличаться от обычного ряда Фурье.

§2. Числовые результаты и их анализ.

На основании изложенного подхода решена задача и проведено исследование напряженного состояния полых трехслойных цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых полугофров, находящихся под действием внутреннего давления $q_y = q_0 \sin(\pi s / l)$ ($q_0 = \text{const}$) в зависимости от механических параметров среднего слоя и изменения амплитуды полугофров, вызванных вариациями параметра λ .

Суммарная толщина цилиндра $H = h_1 + h_2 + h_3$, где толщины внутреннего и наружного слоев равны $h_1 = h_3 = 1$, а толщина среднего слоя $h_2 = 2$. Длина цилиндра $l = 60$. Параметры поперечного сечения укороченной гипоциклоиды (рис. 2) равны: $A = 28$; $a = -4$; $\lambda = 0,3; 0,4$. Будем рассматривать цилиндры, у которых внутренний и наружный слои изотропные с модулями упругости $E_1 = E_3 = E_0$ и коэффициентами Пуассона $\nu_1 = \nu_3 = \nu = 0,3$, а средний слой – изотропный с модулем упругости $E_2 = dE_0$; $d = 0,1; 0,25; 0,5; 1,0$ и коэффициентом Пуассона $\nu_2 = 0,3$, или ортотропный с параметрами [6] $E_s = 3,68E_0$; $E_\psi = 2,68E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{s\gamma} = 0,405$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$; $G_{s\psi} = 0,5E_0$; $G_{s\gamma} = 0,45E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,41E_0$.

Результаты решения задач приведены на рис. 3 – 5 в среднем сечении по длине цилиндра $l = 30$. Кривые для изотропного неоднородного среднего слоя обозначены сплошной линией, а для ортотропного среднего слоя – штриховой линией, соответственно.

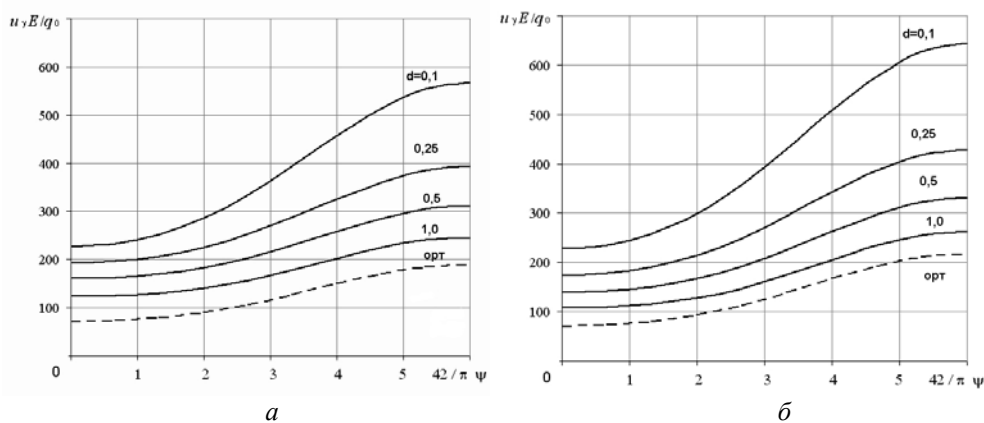


Рис. 3

Изменение величины амплитуды полугофров больше влияет на перераспределение значений перемещений при переходе от мест соединения полугофров ($\psi = 0$) к их впадинам ($\psi = \pi / 42$). При $\lambda = 0,3$ перемещения увеличиваются в 2,5; 2,0; 1,9; 2,0 раза для $d = 0,1; 0,25; 0,5; 1,0$, соответственно, и в 2,68 раза – для ортотропного среднего слоя, тогда как при $\lambda = 0,4$ перемещения увеличиваются в 2,83; 2,5; 2,38; 2,44 и 3,08 раза для тех же параметров среднего слоя.

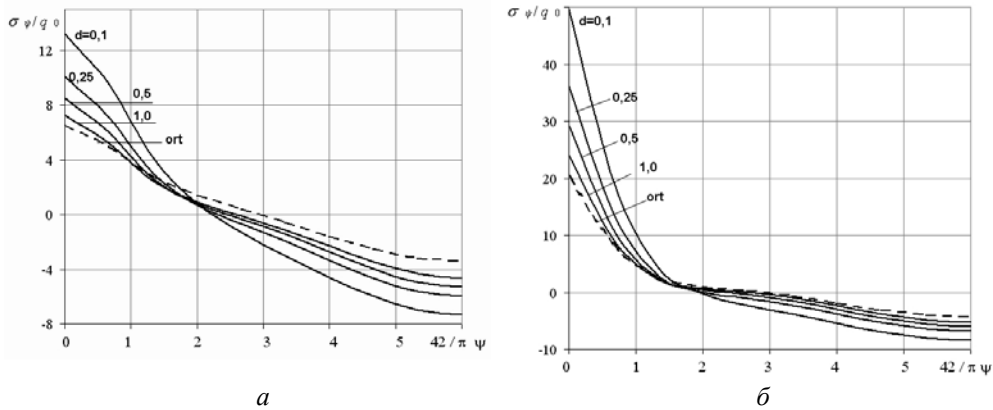


Рис. 4

На рис. 4, а, б даны графики распределения максимальных значений напряжений σ_ψ по направляющей цилиндра на внутренней поверхности для значений параметра $\lambda = 0,3; 0,4$. Наличие более мягкого среднего слоя для $d = 0,1; 0,25; 0,5$ по сравнению с однородным цилиндром ($d = 1,0$) приводит, соответственно, к увеличению значений напряжений в 1,83; 1,39; 1,17 раза и к уменьшению для ортотропного среднего слоя в 1,11 раза при $\lambda = 0,3$ и для соответствующих параметров среднего слоя при $\lambda = 0,4$ напряжения увеличиваются в 2,06; 1,51; 1,22 раза и уменьшаются для ортотропного среднего слоя в 1,18 раз.

Увеличение амплитуды полугофров приводит к увеличению значений напряжений более, чем в 3 раза для всех значений параметров среднего слоя. Кроме того, с увеличением амплитуды полугофров абсолютные значения напряжений в местах соединения и во впадинах полугофров уменьшаются в 1,56 – 1,9 раза при $\lambda = 0,3$ и в 4,58 – 5,98 раза при $\lambda = 0,4$.

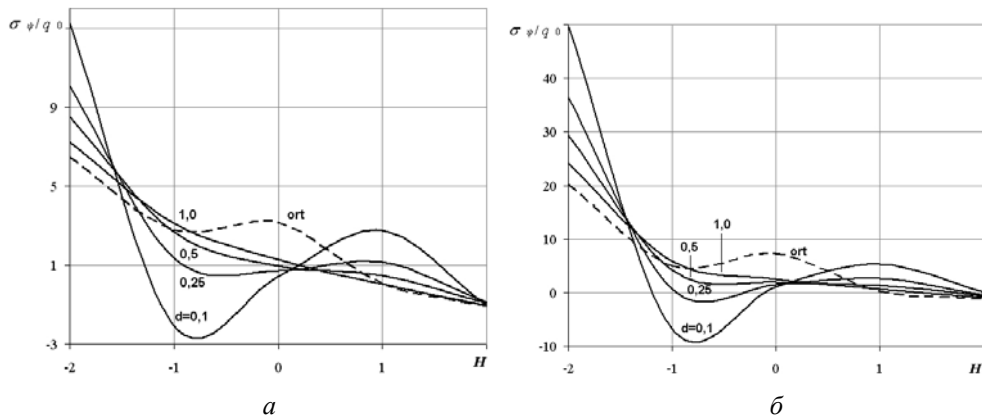


Рис. 5

Характер распределения напряжений σ_ψ по толщине цилиндра в вершинах полугофров ($\psi = 0$) в зависимости от механических характеристик среднего слоя для двух значений амплитуды полугофров представлен в виде графиков на рис. 5, а, б.

Заключение.

В пространственной постановке решена задача и проведен анализ напряженного состояния полых неоднородных слоистых цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых соединенных полугофров, описанных укороченной гипоциклоидой, в зависимости от изменения механических параметров среднего слоя и некоторых параметров кривизны поперечного сечения.

Из полученных результатов следует, что, варьируя механическими параметрами материала среднего слоя и амплитудой соединенных полугофров, вызванных изменением расстояния до центра подвижной окружности, можно влиять на жесткость рассматриваемых цилиндров, что, в свою очередь, существенно влияет на распределении полей перемещений и напряжений.

РЕЗЮМЕ. Отримано розв'язок задачі і досліджено напружений стан порожнистих неоднорідних шаруватих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді угнутих напівгофрів в залежності від жорсткості середнього шару. Задачу розв'язано в просторовій постановці із застосуванням аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз отриманих числових результатів.

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 171 – 174.
2. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 432 с.
3. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Статика упругих слоистых оболочек. – М.: НИИ Механики МГУ, 1999. – 215 с.
4. Григоренко Я.М., Рожок Л.С. Анализ напряженного stanu порожнистых цилиндрів з угнутих гофрованим поперечним перерізом // Матем. методи та фіз.- мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 70 – 77.
5. Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В. Моделирование статике и динамике оболочечных конструкций из композитных материалов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 196 с.
6. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
7. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наук. думка, 1972. – 501 с.
8. De Leo A., Contento A., Di Egidio A. Parametric study of the distribution of the tensile stresses in pavilion structures constituted by four sectors of barrel shells // Meccanica. – 2017. – **52**, N 10. – P. 2293 – 2305.
9. Galishin A.Z., Zolochevskii A.A., Sklepus S.N. Feasibility of Shell Models for Determining Stress–Strain State and Creep Damage of Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 4. – P. 398 – 406.
10. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory: Applications of Refined and Three-dimensional Theory. – **IIIB**. – Springer, 2016. – 108 p.
11. Hatanaka K., Rao S.M.V., Saito T., Mizukaki T. Numerical investigations on shock oscillations ahead of a hemispherical shell in supersonic flow // Shock Waves. – 2016. – **26**, N 3. – P. 299 – 310.
12. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1961. – 720 p.
13. Kwon H.-W., Hong S.-Y., Song J.-H. Vibrational energy flow analysis of coupled cylindrical thin shell structures // J. Mech. Sci. Tech. – 2016. – **30**, N 6. – P. 4049 – 4062.
14. Malek S., Williams Chr. The Equilibrium of Corrugated Plates and Shells // Nexus Netw. J. (2017).
15. Marchuk A.V., Gnidash S.V. Analysis of the Effect of Local Loads on Thick-Walled Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 368 – 377.
16. Sajadi S.Ya., Abolbashari M.H., Hosseini M. Geometrically nonlinear dynamic analysis of functionally graded thick hollow cylinders using total Lagrangian MLPG method // Meccanica. – 2016. – **51**, N 3. – P. 655 – 672.
17. Storozhuk E.A., Yatsura A.V. Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 386 – 397.
18. Tokova L., Yasinskyi A., Ma C.C. Effect of the layer inhomogeneity on the distribution of stresses and displacements in an elastic multilayer cylinder // Acta Mech. – 2017. – **228**, №8. – P. 2865 – 2877.
19. Wróbel G., Szymiczek M., Kaczmarczyk J. Influence of the Structure and Number of Reinforcement Layers on the Stress State in the Shells of Tanks and Pressure Pipes // Mech. of Comp. Mat. – 2017. – **53**, N 2. – P. 165 – 178.

Поступила 11.12.2017

Утверждена в печать 22.05.2018