

Н. А. Ярецкая

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЖЕСТКОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА  
И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ  
(ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ**

*Хмельницкий национальный университет,  
ул. Институтская, 11, 29016, Хмельницкий, Украина; e-mail: massacran2@ukr.net*

**Abstract.** A problem of contact interaction of the rigid cylindrical annular punch and half-space with initial (residual) stresses without taking into account the friction forces is considered for the case of unequal roots of the characteristic equation. This study is carried out in the general form for the theory of large initial (finite) deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. A numerical analysis is presented in the form of graphs for the case of Treloar's potential.

**Key words:** linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problem, annular stamp, half-space.

**Введение.**

Прикладные проблемы современной техники и новых технологий, связанные с необходимостью прогнозирования контактного поведения различных конструкций, стимулировали в последнее время развитие различных математических моделей и методов контактной механики для тел с различными свойствами [9, 12, 13].

Одним из важных факторов при контактном взаимодействии тел является влияние начальных (остаточных) напряжений, которые практически всегда присутствуют в реальных конструкциях и деталях машин. Поэтому разработка эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния с учетом начальных деформаций [1, 2, 4 – 7, 14, 15] является актуальной и важной научно-технической проблемой. Существует также ряд других обобщающих публикаций [10, 11, 16], которые полностью или частично связаны с тематикой настоящей статьи.

Достаточно подробный обзор работ, связанных с контактным давлением жестких штампов (в том числе и кольцевых) в случае отсутствия начальных напряжений, представлен в монографии [8].

Контактное взаимодействие жестких и упругих штампов с предварительно напряженными телами исследовано в [1, 2, 4 – 7, 13, 15]. При этом рассмотрены или упругие потенциалы конкретной структуры, или задача ставится в общем виде для сжимаемых (несжимаемых) тел с потенциалом произвольной структуры на основе линейризованной теории упругости. В работе [2] рассмотрено решение контактной задачи о давлении жесткого кольцевого штампа сложной конфигурации на упругий слой с начальными напряжениями; при этом используется потенциал гармонического типа. В этом случае штамп образовано вращением вокруг общей оси двух веток парабол, сопряженных в вершинах отрезком прямой, перпендикулярной к оси вращения (оси парабол, ограничивающие штамп, параллельные общей оси вращения).

В данной работе с использованием соотношений линейризованной теории упругости [4 – 7, 13, 15] представлено решение осесимметричной пространственной кон-

тактной задачи о давлении жесткого кольцевого штампа с плоским основанием на полупространство с начальными (остаточными) напряжениями без учета сил трения (для неравных корней разрешающего уравнения [7]). Исследование выполнено в общем виде для сжимаемых и несжимаемых тел для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

Предполагаем, что начальное напряженно-деформированное состояние в полупространстве является однородным.

### §1. Постановка задачи. Основные соотношения.

Пусть конечный жесткий кольцевой штамп с плоским основанием, геометрическая ось симметрии которого совпадает с осью  $y_3$  цилиндрической системы координат  $(r, \theta, y_3)$ , направлена внутрь полупространства (рис. 1) и давит на полупространство с силой  $P$  (после возникновения там начального деформированного состояния);  $R_1, R_2$  – соответственно, внутренний и внешний радиусы штампа. Принимаем, что внешняя нагрузка приложена только к свободному торцу упругого штампа, под действием которого все точки торца штампа перемещаются в направлении оси симметрии  $y_3$  на одну и ту же величину  $\varepsilon$ . Примем также, что поверхности вне области контакта остаются свободными от влияния внешних сил, а в зоне контакта перемещения и напряжения – непрерывные. Отметим, что аналогичная задача для слоя рассмотрена в работе [2].

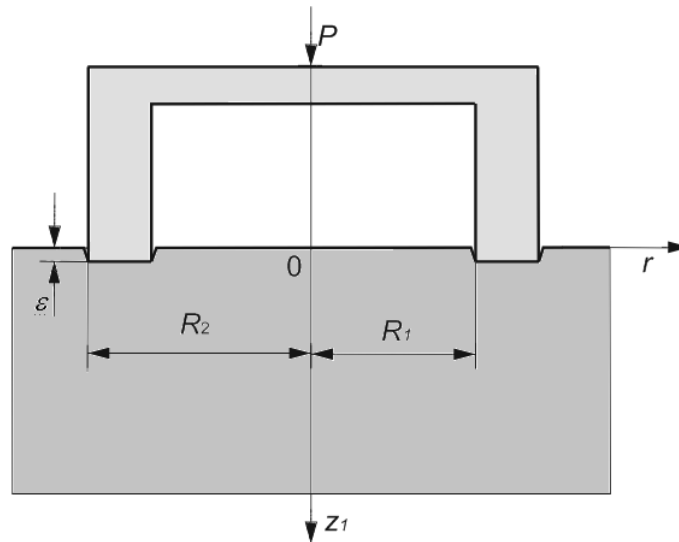


Рис. 1

Предположим, что исходное состояние полупространства – однородное и выполняются соотношения [7, 15]:

$$y_m = x_m + U_m^0; \quad U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) \lambda_i^{-1} y_i \quad (i, m = \overline{1, 3}).$$

Тогда основное уравнение в перемещениях [7, 15] для сжимаемых тел имеет вид

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0; \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}), \quad (1.1)$$

а для несжимаемых тел выполняется условие несжимаемости:

$$\begin{aligned} L'_{m\alpha} &= \kappa'_{m\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta; \quad L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m} \partial p' / \partial y_\alpha = 0; \\ q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i &= 0, \quad q'_{ij} = \lambda_i q_{ij} \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Выражения для определения составляющих тензора напряжений для сжимаемых и несжимаемых тел запишем в виде:

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta}; \quad Q'_{ij} = \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} P; \quad \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}; \quad \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}.$$

При однородных начальных напряжениях предполагаем, что имеют место условия  $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0$ ;  $S_0^{33} = 0$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ . При этих условиях решения уравнений (1.1), (1.2) представим через цилиндрические координаты  $(r, \theta, y_3)$  в таком виде:

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi} = 0, \quad (1.3)$$

где  $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$ .

Как отмечено выше, в данной статье ограничимся случаем неравных корней  $(\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2)$  уравнения (1.3).

В системе круговых цилиндрических координат  $(r, \theta, z_i)$ , где  $z_i = v_i^{-1} y_3$ ,  $v_i = \sqrt{n_i}$ ,  $(i=1,2)$ ,  $n_1 = \xi_2'^2$ ,  $n_2 = \xi_3'^2$ , такой постановке соответствуют граничные условия:

$$U_3 = \varepsilon, \quad R_1 < r < R_2; \quad (1.4)$$

$$Q_{33} = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty; \quad (1.5)$$

$$Q_{r3} = 0, \quad 0 < r < \infty; \quad (1.6)$$

$$U_3 = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty; \quad (1.7)$$

$$Q_{33} = -\sigma_z^0, \quad R_1 < r < R_2, \quad (1.8)$$

где  $\sigma_z^0 = (8\varepsilon\omega_3) / (\pi\sqrt{1-r^2})$  – при  $R_1 < r < R_2$  и  $\sigma_z^0 = 0$  – при  $0 < r < R_1$ ,  $R_2 < r < \infty$ ;  $\omega_3 = c_{44}(1+m_1)l_1(s-s_0)$ ,  $s_0 = (1+m_2)/(1+m_1)$ ,  $s = s_0 l_2 / l_1$ ; значения коэффициентов  $m_i$ ,  $c_{44}$ ,  $l_i$  зависят от вида начальных напряжений и характера упругого потенциала и приведены в [7].

Условие равновесия, которое устанавливает связь между осадкой торца и равнодействующей нагрузки  $P$  имеет вид

$$P = -2\pi \int_0^{R_0} r Q_{33}(0, r) dr. \quad (1.9)$$

## §2. Метод решения задачи.

Напряженно-деформированное состояние в предварительно напряженном полупространстве (для неравных корней, с учетом (1.4) – (1.8) и  $z_1 = 0$ ), представим в виде [7, 15]:

$$Q_{33} = \frac{\omega_4}{R_0} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta; \quad U_3 = -\frac{1}{\omega_5} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta; \quad U_r = \omega_6 \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta r) d\eta, \quad (2.1)$$

где  $R_0 = R_1/R_2$ ;  $\omega_4 = c_{44}(1+m_1)l_1(s-s_3)$ ;  $\omega_5 = \frac{v_1}{m_1(s_2-s_3)}$ ;  $s_2 = (m_2 v_1)(m_1 v_2)^{-1}$ ;  $s_3 = s_0 v_1 v_2^{-1}$ ;  $\omega_6 = s_3 - 1$ ;  $J_\nu(x)$  – функция Бесселя действительного аргумента;  $F(\eta)$  – неизвестная функция.

Удовлетворив условие (1.5), получим

$$\frac{\omega_4}{R_0} \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty. \quad (2.2)$$

Введем непрерывную неизвестную функцию  $f(r)$ ,  $R_1 < r < R_2$ , которая соответствует распределению контактных напряжений под жестким кольцевым штампом, и продолжим (2.2) на промежуток  $0 < r < \infty$  [2]:

$$\frac{\omega_4}{R_0} \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = f(r)(\delta(r - R_1) - \delta(r - R_2)) \quad (0 < r < \infty), \quad (2.3)$$

где  $\delta(r)$  – функция Хэвисайда.

Учитывая непрерывность функции  $f(r)$ , где  $f(r) = 0$  при  $r \leq R_1$  и  $r \geq R_2$ , представим  $f(r)$  в виде отрезка обобщенного ряда Фурье [2]:

$$L_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n}{R_1} r\right) Y_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) Y_0\left(\frac{\gamma_n}{R_1} r\right),$$

где  $\gamma_n$  – положительные корни уравнения  $J_0\left(\frac{R_2}{R_1} \gamma_n\right) Y_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) Y_0\left(\frac{R_2}{R_1} r\right) = 0$ ;  $Y_0(x)$  – функция Вебера.

Следовательно, имеем  $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n L_n(r)$ , где  $a_n$  – неизвестные коэффициенты.

Применив формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля к соотношению (2.3), получаем выражение

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = \frac{R_0}{\omega_4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(\eta) \quad (0 < \eta < \infty), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n(\eta) = \int_{R_1}^{R_2} r L_n(r) J_0(\eta r) dr = \frac{\gamma_n \eta^2}{\gamma_n^2 - (\eta R_1)^2} \left\{ \frac{R_2}{R_1} \left[ J_1\left(\frac{R_2}{R_1} \gamma_n\right) Y_0(\gamma_n) - Y_1\left(\frac{R_2}{R_1} \gamma_n\right) J_0(\gamma_n) \right] J_0(\eta R_2) - \right. \\ \left. - \left[ J_1(\gamma_n) Y_0(\gamma_n) - Y_1(\gamma_n) J_0(\gamma_n) \right] J_0(\eta R_1) \right\}. \end{aligned}$$

Используя второе выражение (2.1), соотношение (2.4) и граничное условие (1.4), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(r) = \frac{\varepsilon}{k_1} \quad (R_1 < r < R_2), \quad (2.5)$$

где  $k_1 = -\frac{R_0}{\omega_4 \omega_5}$ ;  $\varphi_n(r) = \int_0^{\infty} \Phi_n(\eta) J_0(\eta r) d\eta$ .

После определения  $a_n$  из системы (2.5) можно вычислить компоненты напряженно-деформированного состояния в упругом полупространстве по формулам (2.4), (2.1). Связь (1.9) между осадкой торца и равнодействующей нагрузкой  $P$  будет иметь вид  $P = 16\omega_3 \varepsilon (1 - \sqrt{1 - R_0})$ .

### §3. Числовые результаты.

Численное решение системы (2.5) проведено методом редукции для потенциала Трелоара при таких значениях параметров:  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $R_0 = R_1 / R_2 = 0,5$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $E = 3,92$ ,  $\sigma = 0,47$ ,  $\lambda_1 = 0,7$ ; 0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2; 1,3, где  $0 \leq r \leq R_0$ . Алгоритм решения реализован в виде программы в пакете Maple 15.

На рис. 2, 3 представлены, соответственно, распределения нормального контактного напряжения  $Q_{33}/3$  и радиального перемещения  $U_r/\varepsilon$  под штампом в зоне контакта в безразмерных координатах. Причем, значениям коэффициентов удлинения  $\lambda_1$  соответствуют кривые снизу вверх по возрастанию  $\lambda_1$ . Пунктирная кривая соответствует полупространству без начальных напряжений ( $\lambda_1 = 1$ ), сплошные – с начальными напряжениями.

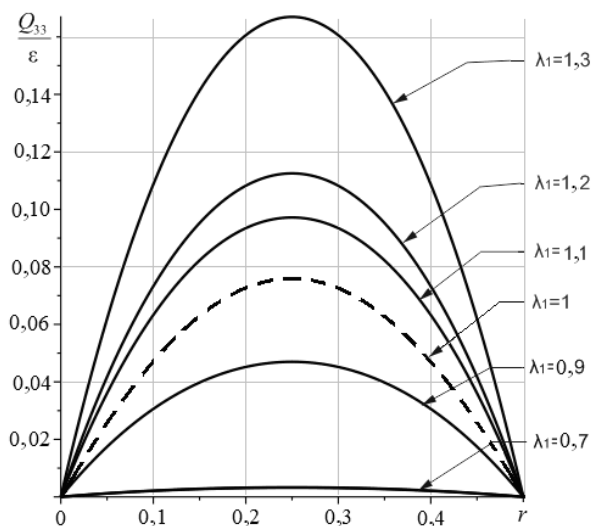


Рис. 2

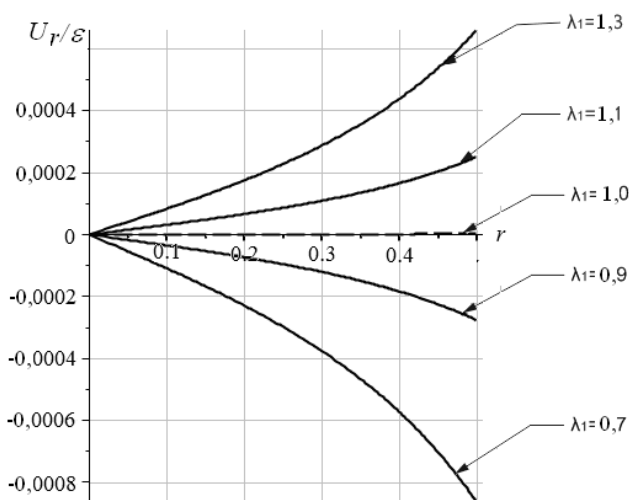


Рис. 3

### Заключение.

Из численного анализа следует, что максимальные по модулю значения контактных напряжений (рис. 2) достигаются в точках несколько близких к середине области контакта, в отличие от случая равных корней [2].

Отметим также, что из численных исследований следует, что даже при постоянной внешней нагрузке изменение упругого потенциала приводит к изменению характера распределения контактных напряжений под жестким кольцевым штампом. Влияние начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого полупространства, в который вдавливаются жесткий кольцевой штамп, заключается в том, что:

1) начальные напряжения в полупространстве приводят в случае сжатия ( $\lambda_1 < 1$ ) к уменьшению напряжений, а в случае растяжения ( $\lambda_1 > 1$ ) – к их увеличению;

2) в случае перемещений (рис. 3) – наоборот: при сжатии ( $\lambda_1 < 1$ ) начальные напряжения в полупространстве приводят к увеличению перемещений по абсолютной величине, а в случае растяжения ( $\lambda_1 > 1$ ) – к их уменьшению;

3) в случае отсутствия начальных напряжений полученные результаты совпадают с классическими [3].

Отметим, что полученные результаты с учетом предварительно напряженного состояния при контактном взаимодействии жесткого штампа и упругого полупространства могут быть использованы для регулирования контактных напряжений и перемещений при расчетах конструкций на прочность.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу контактної взаємодії жорсткого циліндричного кільцевого штампа і півпростору з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових (скінчених) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Чисельний аналіз представлено у вигляді графіків для потенціалу Трелоара.

1. Александров В.М., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 3. – С. 9 – 16.
2. Габрусева І.Ю., Шелестовський Б.Г. Контактна взаємодія кільцевого штампа з попередньо напруженим ізотропним шаром // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 138 – 146.
3. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости – Львов: Вища шк., 1981. – 136 с.
4. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
5. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчук: Press – Line, 2007. – 795 с.
6. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями: Навчальний посібник. – К.: Вища школа. – 1995. – 304 с.
7. Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницький: Вид. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
8. Развигте теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 494 с.
9. Gorelik L., Mordehai D. Atomically Informed Continuum Models for the Elastic Contact Properties of Hollow and Coated Rigid Cylinders at the Nanoscale // J. Applied Mechanics. – 2017. – 84, N 3. – P. 031009.
10. Hutchinson J.W., Thompson J.M.T. Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces. // J. Applied Mechanics. – 2017. – 84, N 6. – P. 061001.
11. Long J., Ding Y., Yuan W., Chen W., Wang G. General Relations of Indentations on Solids With Surface Tension. // J. Applied Mechanics. – 2017. – 84, N 5. – P. 051007.
12. Petrin M.O., Oyedele A.A., Ajide O.O. Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces // World J. of Engineering and Technology. – 2016. – 4, N 1. – P. 51 – 58.
13. Rudnitskii V.B., Dikhtyaruk N.N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 2. – P. 149 – 155.
14. Vasu T.S., Bhandakkar T.K. A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects // J. Applied Mechanics. – 2016. – 83, N 6. – P. 061009.
15. Yaretskaya, N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 4. – P. 378 – 388.
16. Zheng P., Cheng A.H.-D., Li H. Dynamic Green's Functions and Integral Equations for a Double-Porosity Dual-Permeability Poroelastic Material // J. Applied Mechanics. – 2017. – 84, N 6. – P. 061009.

Поступила 02.07.2017

Утверждена в печать 30.02.2018