

В. Ф. Мейш¹, Ю. А. Мейш², А. И. Мельниченко²

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН
В ДВУХСЛОЙНЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: vfmeish@gmail.com

²Национальный транспортный ун-т,
ул. Омеляновича-Павленко, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: juliameish@gmail.com

Abstract. A process of wave propagation in two-layer mediums is studied numerically according to the model of nonlinear fluid three-component medium. The cases of cylindrical and spherical symmetries are considered. The equations of continuum mechanics are used. The regularities of pressure wave propagation over the radial coordinate are shown for the two-layer soil medium. An analysis of findings is carried out in dependence on layer parameters for both cases of symmetry.

Key words: two – layer soil medium, cylindrical and spherical symmetry, waves processes, numerical methods.

Введение.

Изучение волновых процессов в жидких многокомпонентных средах в большинстве случаев проводится на основе двух следующих подходов. Согласно первому подходу полагается, что пространство заполнено несколькими сплошными средами, каждая из которых соответствует компоненте среды. При таких волновых процессах происходит взаимное проникновение и взаимосвязанное движение этих сред, каждая из которых, в общем, имеет свои параметры – скорость частичек, давление, температуру и т.д. Изучение движения среды на основе этого метода сводится к изучению условий совместного перемещения компонент и величин, характеризующих их взаимодействие. Развитие этого направления было положено в работе [3].

В данной работе предложена замкнутая система уравнений движения многокомпонентной среды, позволяющая учитывать взаимное проникновение компонент среды. Система включает уравнения сохранения массы и импульса для каждой компоненты. Условие совместного деформирования предусматривает равенство компонент давления. Уравнение сжатия компонент принималось в баротропном виде [3].

Наряду с первым подходом широкое развитие получил второй подход, согласно которого многокомпонентная среда рассматривается как единая сплошная среда с одним уравнением состояния, учитывающим свойства и взаимодействие компонент среды. Вид этого уравнения может быть разным в зависимости от свойств среды и степени учета этих свойств. Развитие второго подхода было положено в работе [2]. В этой работе принималось, что сжатие компонент в среде происходит мгновенно при действии нагрузки по тем же уравнениям, что и в свободном состоянии. Материал жидких и твердых частичек сжимается согласно нелинейному уравнению Тета, а газ – по адиабате Пуассона [2]. Экспериментальные исследования [2] показывают, что данная модель достаточно правильно отображает закономерности деформирования жидких многокомпонентных сред при динамических нагрузках с высокими амплитудами давления. Подтверждается, что при незначительном увеличении содержания газовой компоненты, от нуля до нескольких процентов общего объема среды, интенсивность

угасания нестационарных (взрывных) волн с расстоянием возрастает в десятки и сотни раз. При этом в десятки раз уменьшается скорость распространения максимумов возмущения. В рамках такого подхода численно рассмотрены волновые процессы в однослойных грунтовых средах [1, 2].

Различные аспекты поведения грунтовых сред при динамических нагрузках приведены в работах [6 – 8, 10 – 12, 14 – 18]. В практических приложениях, в ряде случаев, среда находится под действием импульсных и взрывных нагрузок, взаимодействуя с преградами различной формы, что отражено в работах [9, 13, 19 – 21]. В основном, указанные исследования проведены в однокомпонентных средах (жидкость или твердая среда).

В данной работе рассмотрены процессы распространения цилиндрических и сферических волн в двухслойных грунтовых средах на основе применения второго подхода, т.е. каждый слой грунтовой среды описывается согласно [1, 2]. Для численного решения указанных задач используется конечно-разностная схема Мак-Кормака [1, 5].

1. Постановка задач. Основные уравнения.

1.1. Модель трехкомпонентной среды (грунта). Грунт рассматривается как трехкомпонентная среда, состоящая из газообразной, жидкой и твердой компонент. При действии динамической нагрузки в микрообъеме грунта на каждую компоненту воздействует одинаковое давление P и она движется со скоростью U , а деформирование каждой компоненты под влиянием давления P происходит по тем же законам, что и в свободном состоянии. Для уравнения состояния такой трехкомпонентной среды (водонасыщенного грунта) введем такие обозначения: α_i – содержание по объему компонент; ρ_{i0} – плотность; V_{i0} – их удельный объем; c_{i0} – скорость звука в компонентах при атмосферном давлении P_0 ; i – номер компоненты (1 – воздух, 2 – жидкость, 3 – твердые частички). При давлении $P = P_0$ плотность среды ρ_0 и удельный объем V_0 определяем по формулам

$$\rho_0 = \frac{1}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_{i0}; \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1.$$

При давлении P параметры компонент обозначим V_i , ρ_i , c_i , а среды – V и ρ . Плотность среды при давлении P состоит из начальной плотности ρ_0 и составляющих, обусловленных сжатием каждой из компонент, т.е.

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{V_i}{V_{i0}}.$$

Если в последнее выражение подставить значение удельного объема компонент при давлении P , то получим уравнение сжатия нелинейной упругой многокомпонентной среды в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i}, \quad \text{где } \chi_i = 1 / \gamma_i. \quad (1)$$

Преимуществом этой модели является ее простота, возможность представления зависимости скорости звука, скорости волны от давления в виде простых соотношений. Скорость звука при давлении P определяем из условия $c = (dP / d\rho)^{1/2}$ в виде

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i}}{\left\{ \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i - 1} \right\}^{1/2}}. \quad (2)$$

1.2. *Цилиндрическая симметрия.* Движение двухслойной грунтовой среды для случая распространения цилиндрических волн описывается системой уравнений в эйлеровых координатах для каждого слоя [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho U^2 + P)] - \frac{1}{r} P = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho U)] = 0, \quad (3)$$

где r – пространственная координата, t – временная координата, U – скорость, ρ – плотность, P – давление.

Соответственно для каждого слоя записываем уравнения состояния

$$F(P, \rho) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i} - \frac{\rho_0}{\rho} = 0. \quad (4)$$

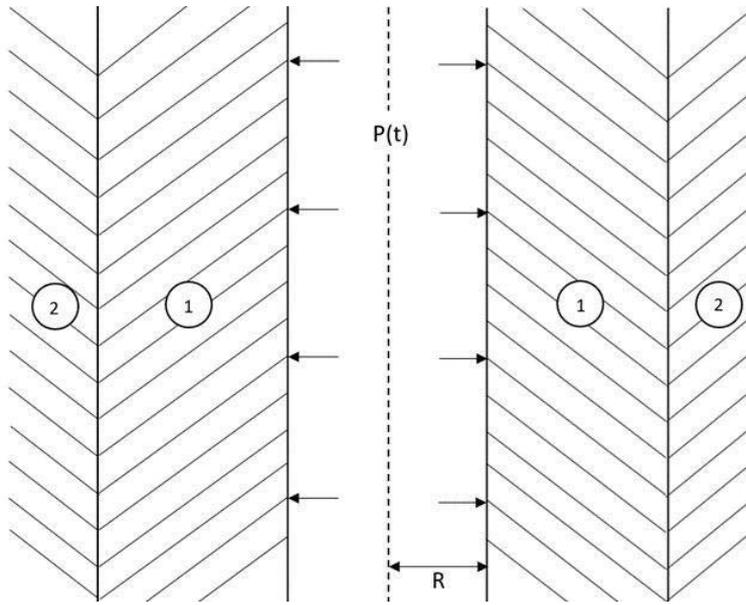


Рис. 1

В дальнейшем рассматриваем нестационарное поведение двухслойной среды при определенных начальных условиях. Предполагаем, что к границе некоторой цилиндрической полости радиуса $r = r_0$ (в случае цилиндрической симметрии) прилагается нагрузка $P(t)|_{r=r_0}$. Схематически данная постановка приведена на рис. 1. Индексом 1 обозначен слой при $R \leq r \leq 2R$, индексом 2 – $2R \leq r \leq \infty$.

1.3. *Сферическая симметрия.* Уравнения движения грунтовой среды в случае сферической симметрии записываем в виде системы уравнений в эйлеровых координатах для каждого слоя [4] в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2(\rho U^2 + P)] - \frac{2}{r} P = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2(\rho U)] = 0. \quad (5)$$

В уравнениях (5) приняты следующие обозначения: r , t – пространственная и временная координаты; U – скорость; ρ – плотность; P – давление.

В случае сферической симметрии к внутренней границе сферической полости радиуса $r = r_0$ прилагается нагрузка $P(t)|_{r=r_0}$. Схематически постановка задачи для случая сферической симметрии приведена на рис. 2. Индексом 1 обозначен слой при $R \leq r \leq 2R$, индексом 2 – $2R \leq r \leq \infty$.

Начальные условия для обоих случаев (цилиндрической и сферической симметрии) имеют вид

$$\rho(r_0, t_0) = \rho_0;$$

$$U(r_0, t_0) = 0;$$

$$P(r_0, t_0) = P_0(t_0),$$

где $P_0(t_0)$ – атмосферное давление; ρ_0 – плотность среды на границе полости при атмосферном давлении.

Граничные условия представлены на границе рассматриваемых полостей при $t > 0$ и записываем исходя из уравнений движения первого слоя среды – уравнения (3) – (5).

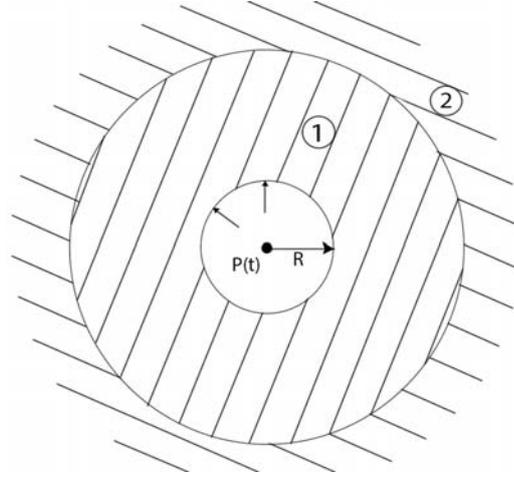


Рис. 2

2. Численный алгоритм решения задач.

2.1. Цилиндрическая симметрия. Алгоритм решения задачи о поведении двуслойной грунтовой среды при нагружении бесконечной цилиндрической полости нестационарной нагрузкой $P(t)|_{r=r_0}$ (уравнения (3), (4)) основан на применении конечно-разностной схемы предиктор-корректор Мак-Кормака [1, 5].

На шаге предиктор разностные уравнения для случая цилиндрической симметрии имеют вид:

$$\tilde{\rho}_k = \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\rho^n V^n)_{k+1} - (r\rho^n V^n)_k}{\Delta r} \right]; \quad (6)$$

$$(\tilde{\rho}\tilde{V})_k = (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k} \left\{ \frac{[r\rho(V^2 + P)^n]_{k+1} - [r(\rho V^2 + P)^n]_k}{\Delta r} - P_k^n \right\}; \quad F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0.$$

На шаге корректор уравнения записываются следующим образом:

$$\rho_k^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\tilde{\rho}\tilde{V})_k - (r\tilde{\rho}\tilde{V})_{k-1}}{\Delta r} \right] \right\}; \quad (7)$$

$$(\rho V)_k^{n+1} = 0,5 \left\{ (\rho^n V^n)_k + (\tilde{\rho}^n \tilde{V}^n)_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{[r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})^n]_k - [r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})^n]_{k-1}}{\Delta r} - \tilde{P}_k \right] \right\};$$

$$F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Для определения искомых величин на поверхности цилиндрической полости используем следующие разностные уравнения:

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0^n - \frac{\tau}{r_0} \left[\frac{-3r_0(\rho_0^n U_0^n) + 4r_1(\rho_1^n U_1^n) - r_2(\rho_2^n U_2^n)}{2\Delta r} \right]; \quad (8)$$

$$(\tilde{\rho}\tilde{U})_0 = (\rho^n U^n)_0 - \frac{\tau}{r_0} \left[\frac{-3r_0(\rho_0^n U_0^n + P_0^n) + 4r_1(\rho_1^n U_1^n + P_1^n) - r_2(\rho_2^n U_2^n + P_2^n)}{2\Delta r} - P_0^n \right];$$

$$F(\tilde{P}_0, \tilde{\rho}_0) = 0.$$

На шаге корректор уравнения на границе полости имеют вид

$$\rho_0^{n+1} = \tilde{\rho}_0 - \frac{\tau}{r_0} \left[\frac{-3r_0(\tilde{\rho}_0\tilde{U}_0) + 4r_1(\tilde{\rho}_1\tilde{U}_1) - r_2(\tilde{\rho}_2\tilde{U}_2)}{2\Delta r} \right]; \quad (9)$$

$$(\rho U)_0^{n+1} = (\tilde{\rho}\tilde{U})_0 - \frac{\tau}{r_0} \left[\frac{-3r_0(\tilde{\rho}_0\tilde{U}_0 + \tilde{P}_0) + 4r_1(\tilde{\rho}_1\tilde{U}_1 + \tilde{P}_1) - r_2(\tilde{\rho}_2\tilde{U}_2 + \tilde{P}_2)}{2\Delta r} - \tilde{P}_0 \right];$$

$$F(P_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}) = 0.$$

Учитывая, что разностная схема Мак-Кормака является явной, то при расчетах использовано условие численной устойчивости

$$(|U| + c)\tau / \Delta r < 1, \quad (10)$$

где величина c соответствует локальной скорости звука в рассматриваемых средах (2).

2.2. Сферическая симметрия. В случае сферической симметрии разностные уравнения движения для схемы Мак-Кормака на границе полости при $r = r_0$ задаем следующим образом. На шаге предиктор разностные уравнения имеют вид

$$\tilde{\rho}_k = \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{(r^2 \rho^n U^n)_{k+1} - (r^2 \rho^n U^n)_k}{\Delta r} \right]; \quad (11)$$

$$(\tilde{\rho}\tilde{U})_k = (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left\{ \frac{[r^2 \rho(U^2 + P)^n]_{k+1} - [r^2 (\rho U^2 + P)^n]_k}{\Delta r} - 2P_k^n r_k \right\};$$

$$F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0.$$

На шаге корректор уравнения записываем следующим образом:

$$\rho_k^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{(r^2 \tilde{\rho}\tilde{U})_k - (r^2 \tilde{\rho}\tilde{U})_{k-1}}{\Delta r} \right] \right\}; \quad (12)$$

$$(\rho U)_k^{n+1} = 0,5 \left\{ (\rho^n U^n)_k + (\tilde{\rho}\tilde{U})_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{[r^2 (\tilde{\rho}\tilde{U}^2 + \tilde{P})^n]_k - [r^2 (\tilde{\rho}\tilde{U}^2 + \tilde{P})^n]_{k-1}}{\Delta r} - 2\tilde{P}_k r_k \right] \right\};$$

$$F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Величины ρ_0^{n+1} и P_0^{n+1} определяем согласно следующим формулам:

$$\rho_0^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_0^n + \tilde{\rho}_0 - \frac{\tau}{r_0} \left[\frac{-3r_0(\tilde{\rho}_0\tilde{V}_0) + 4r_1(\tilde{\rho}_1\tilde{V}_1) - r_2(\tilde{\rho}_2\tilde{V}_2)}{2\Delta r} \right] \right\};$$

$$F(P_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}) = 0.$$

В соотношениях (9) – (12) функция $F(P, \rho)$ имеет такой вид:

$$F(P, \rho) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i} - \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (13)$$

3. Численные результаты.

3.1. *Цилиндрическая симметрия.* Рассмотрим бесконечную цилиндрическую полость радиуса $r = R$ в двухслойной грунтовой среде – уравнения (3), (4). Схематически постановка задачи приведена на рис. 1. Предполагается, что к внутренней границе полости прилагается нагрузка $P(R, t)$, которая имеет вид $P(R, t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$, где $A = 10^7$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с; $\eta(t)$ – функция Хевисайда.

Первый грунтовый слой находится в пределах области $R \leq r \leq 2R$, второй слой – $2R \leq r \leq \infty$. Параметры уравнения состояния (1) варьировались $\alpha_i, \gamma_i, \rho_{i0}, c_{i0}$ ($i = \overline{1, 3}$).

Рассмотрено два случая прохождения волн по двухслойной грунтовой среде. *Первый случай* – прохождение волн из менее плотной грунтовой среды (1-й слой) в более плотный слой (2-й слой). В первом случае для первого слоя приняты следующие параметры уравнения состояния (1):

$\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$; $\rho_{10} = 1,2 \text{ кг/м}^3$; $\rho_{20} = 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\rho_{30} = 2,65 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $c_{10} = 330 \text{ м/с}$; $c_{20} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$; $c_{30} = 4,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$; $\gamma_1 = 1,4$; $\gamma_2 = 7$; $\gamma_3 = 4$. Для второго слоя параметры уравнения состояния приняты аналогичными предыдущему слою, за исключением величин α_i : $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,35$; $\alpha_3 = 0,65$.

Второй случай – прохождение волн из более плотной грунтовой среды (1-й слой) в менее плотную среду (2-й слой). В этом варианте для первого слоя полагалось: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,35$; $\alpha_3 = 0,65$. Для второго слоя – $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$.

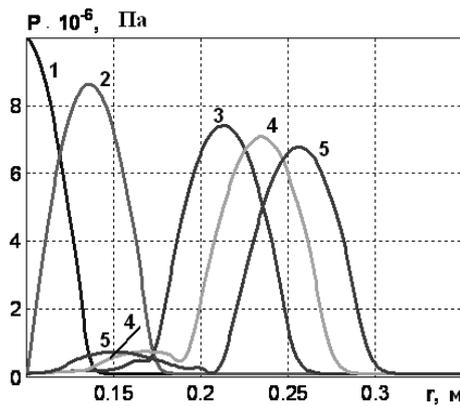


Рис. 3

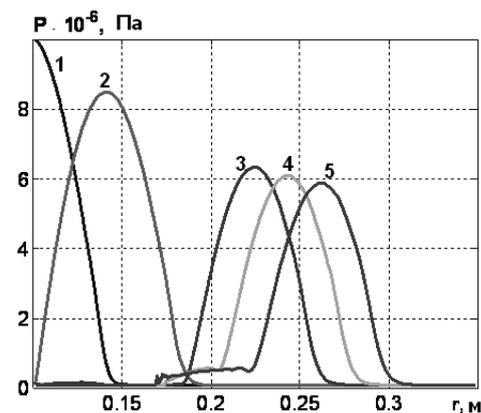


Рис. 4

На рис. 3, 4 представлены численные результаты для данной задачи. Рис. 3 соответствует зависимости прохождения волн давления P от пространственной координаты r для первого случая (прохождение волн из менее плотной грунтовой среды в более плотную). Рис. 4 – результаты расчетов для второго случая (прохождение волн из более плотной среды в менее плотную). Кривые с индексами 1 – 5 на рис. 3, 4 соответствуют величинам давления в такие времена: $t_1 = 0,5T$; $t_2 = T$; $t_3 = 2T$; $t_4 = 2,25T$; $t_5 = 2,5T$. Для обоих случаев расчетов наблюдается наличие волн отражения при прохождении границы раздела грунтовых сред $r = 2R$ – кривые с индексами 4 и 5.

3.2. *Сферическая симметрия.* Рассмотрена замкнутая сферическая полость радиуса $r = R$ в двухслойной грунтовой среде – уравнения (5). Схематически постановка задачи приведена на рис. 2. К внутренней границе полости прилагается нагрузка $P(R, t)$. Вид и параметры нагрузки аналогичны случаю цилиндрической симметрии. Геометрия ($1 - R \leq r \leq 2R$; $2 - 2R \leq r \leq \infty$) и параметры слоев ($\alpha_i, \gamma_i, \rho_{i0}, c_{i0}$ ($i = \overline{1, 3}$)) также аналогичны случаю цилиндрической симметрии.

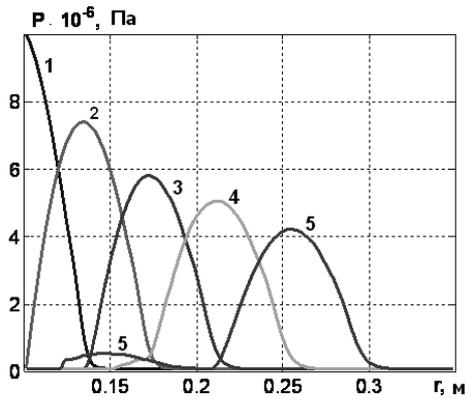


Рис. 5

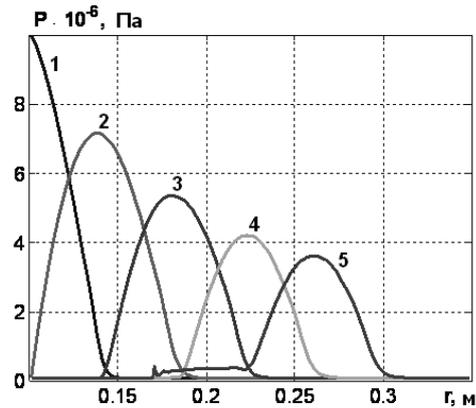


Рис. 6

На рис. 5, 6 приведены результаты расчетов для указанного случая симметрии. Рис. 5 соответствует зависимости прохождения волн давления P от координаты r для первого случая (прохождение волн давления из менее плотной среды в более плотную). Рис. 6 соответствует второму случаю прохождения волн давления из более плотной среды в менее плотную. Кривые с индексами 1 – 5 на рис. 5, 6 соответствуют временам $t_1 = T$; $t_2 = 2T$; $t_3 = 3T$; $t_4 = 4T$; $t_5 = 5T$. Волны отражения на рис. 5, 6 наблюдаются (в отличие от случая цилиндрической симметрии) только при $t_5 = 5T$. Сравнение результатов расчетов для цилиндрической и сферической симметрий имеет как качественный, так и количественный характер: для случая волн давления (случай 1) для цилиндрической симметрии волны 4 и 5 приходят в рассматриваемую область по координате r во времена $t_4 = 2,25T$; $t_5 = 2,5T$; для волн при сферической симметрии для волн 4 и 5 – при $t_4 = 4T$; $t_5 = 5T$. Также наблюдается значительное отличие по амплитудам волн давления со временем прохождения их по координате r . Указанные факторы объясняются различием симметрии – уравнения движения для цилиндрической симметрии (уравнения движения среды (3), (4)) и сферической симметрии (уравнения движения среды (4), (5)).

Заключение.

В работе численно исследован процесс распространения волн в двухслойных грунтовых средах согласно модели нелинейной жидкой трехкомпонентной среды. Рассмотрены случаи цилиндрической и сферической симметрий. Для описания процесса распространения волн использованы уравнения механики сплошных сред. Представлены закономерности распространения волн давления по пространственной координате r в двухслойной грунтовой среде для случаев цилиндрической и сферической симметрий. Проведен анализ результатов в зависимости от параметров сред слоев для обоих случаев симметрий (цилиндрическая и сферическая).

РЕЗЮМЕ. Чисельно досліджено процес розповсюдження хвиль в двошарових ґрунтових середовищах згідно з моделлю нелінійного рідкого трикомпонентного середовища. Розглянуто випадки циліндричної та сферичної симетрії. Для опису процесу розповсюдження хвиль застосовано рівняння механіки суцільних середовищ. Представлено закономірності розповсюдження хвиль тиску по радіальній координаті в двошаровому ґрунтовому середовищі для випадків циліндричної та сферичної симетрії. Проведено аналіз результатів в залежності від параметрів шарів для обох випадків симетрії.

1. Головка К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / Под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд-во полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
2. Ляхов В.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. – М.: Недра, 1982. – 288 с.

3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.И. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
5. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
6. Aysen A. Soil Mechanics: Basic Concepts and Engineering Applications. – New York: CRS Press, 2005. – 468 p.
7. Beresnev I. Numerical model of the spherical elastic wave propagation in a nonlinear medium // Int. J. Modern Physics C. – 1990. – N 2(1). – P. 250 – 253.
8. Brady C.N. The Nature and Properties of Soil. – New York: Macmillan Pub. Co. – 1992. – 621 p.
9. Cichocki K. Effects of underwater blast loading on structures with protective elements // Int. J. of Impact Engineering. – 1999. – 22, N 6. – P. 609 – 617.
10. Das B.M. Fundamentals of Soil Dynamics. – Amsterdam: Elsevier, 1984. – 399 p.
11. Das B.M., Ramana G.V. Principles of Soil Dynamics. – Delhi: Cengage India Private Limited, 2011. – 576 p.
12. Kamatchi P., Ramana G.V., Nagpal A.K., Iyer N.R. Modelling Propagation of Stress Waves through Soil Medium for Ground Response Analysis // J. Engineering. – 2013. – N 5. – P. 611 – 621.
13. Kambouchev N., Noels L., Rodovitzky R. Numerical simulation of the fluid – structure interaction between air blast waves and free – standing plates // Computers and Structures. – 2007. – 85. – P. 923 – 931.
14. Lugovoi P.Z., Meish Yu.A. Nonstationary Deformation of Longitudinally and Transversally Reinforced Cylindrical Shells on an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 1. – P. 62 – 72.
15. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A. Nonstationary Dynamics of a System Consisting of a Cylindrical Shell and a Soil Medium of Periodic Structure // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 350 – 353.
16. Marconi F. Investigation of the interaction of a blast wave with an internal structure // AIAA Journal. – 1994. – 32, N 8. – P. 1561 – 1567.
17. Meish Yu.A. Nonstationary Vibrations of Transversally Reinforced Elliptic Cylindrical Shells on a Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 6. – P. 643 – 647.
18. Punmia B.C., Jain A.K. Soil Mechanics and Foundations. – New Delhi: Laxmi Publishing. – 2005. – 994 p.
19. Rose T.A., Smith P.D., Mays G.S. Effectiveness of walls designed for the protection of structures against air blast from high explosives // Proc. of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. – 1995. – 110, N 1. – P. 78 – 85.
20. Tiwari R., Chakraborty T., Matsagar V. Dynamic analysis of tunnel in soil subjected to internal blast loading // Geotechnical and Geological Engineering. – 2017. – 35, N 4. – P. 1491 – 1512.
21. Zhang Y., Liu Y., Tan Y., Feng J. Effect of underground stress waves with varied wavelengths on dynamic responses of tunnels // Geotechnical and Geological Engineering. – 2017. – 35, N 5. – P. 2371 – 2380.

Поступила 14.09.2017

Утверждена в печать 22.05.2018