

Н. В. Никитина

БИФУРКАЦИИ В БАЗОВЫХ МОДЕЛЯХ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract. Two Rossler's problems (three-dimensional and four-dimensional) and a problem with set of singular points (a model of a rigid body with a linear feedback chain) are considered. The equation of set of singular points is written. A new interpretation of the symmetry principle in three-dimensional systems is given. The mechanisms of appearance of regular attractors and their degeneration into the strange ones are established.

Key words: nonlinear systems, symmetry principles, limit cycle, bifurcation, chaos.

Введение.

Учитывая даже определенный опыт исследования нелинейных систем [1 – 8, 10 – 13] проблема существования регулярных и странных аттракторов в многомерных системах остается открытой и связана с изучением механизмов возникновения аттракторов. В восьмидесятых годах прошлого века несколько многомерных моделей было предложено О. Рёсслером [11]. Две модели получили популярность и их можно причислить к базовым, часто используемым для тестов различных численных методов хаотической динамики [2, 11]. В многомерных системах (четырёхмерных, например) сложно осуществить качественный анализ в силу большой размерности. В случае численного анализа исчезает физическая сторона явления и прогноз становится весьма слабым.

Рассмотрим задачу существования аттрактора (регулярного и странного) в трехмерной и четырехмерной системах. Представим следующий вариант исследования: определяем особые точки системы; составляем уравнения движения в новых координатах; устанавливаем устойчивость и характер траектории.

Запишем систему четырех уравнений О. Рёсслера [1, 11]

$$\frac{d\xi}{dt} = -\eta - \zeta; \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi + a\eta + \psi; \quad \frac{d\zeta}{dt} = b + \xi\zeta; \quad \frac{d\psi}{dt} = c\psi - d\zeta. \quad (1)$$

Примем следующие значения параметров: $(a, b, c, d) = (0, 25; 3; 0, 05; 0; 5)$. Приравняем правые части системы (1) нулю. Система алгебраических уравнений

$$-\eta - \zeta = 0; \quad \xi + a\eta + \psi = 0; \quad b + \xi\zeta = 0; \quad c\psi - d\zeta = 0$$

имеет такие решения:

$$\xi_* = -\sqrt{b \frac{d-ac}{c}}; \quad \zeta_* = \sqrt{\frac{bc}{d-ac}}; \quad \eta_* = -\zeta_*; \quad \psi_* = d \sqrt{\frac{b}{c(d-ac)}}.$$

Вводим систему координат $Ox_1x_2x_3x_4$, в которой особая точка находится в нуле

$$x_1 = \xi - \xi^*; \quad x_2 = \eta - \eta^*; \quad x_3 = \zeta - \zeta^*; \quad x_4 = \psi - \psi^*.$$

Система уравнений (1) в новых координатах примет следующий вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_3; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2 + x_4; \quad \frac{dx_3}{dt} = \zeta_* x_1 + \xi_* x_3 + x_1 x_3; \quad \frac{dx_4}{dt} = -dx_3 + cx_4. \quad (2)$$

1. Качественный анализ трехмерной системы.

Рассмотрим систему трех уравнений, которая получена из системы (2)

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_3; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = \zeta_* x_1 + \xi_* x_3 + x_1 x_3. \quad (3)$$

Система (3) также принадлежит О.Рёсслеру и качественное исследование подобных систем имеет свое значение в динамике химических реакций с перемешиванием [8]. Систему (3) можно представить в виде двух двумерных подсистем

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2; \quad (4)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_3; \quad \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_3), \quad (5)$$

где

$$f_3(x_1, x_3) = \zeta_* x_1 + \xi_* x_3 + x_1 x_3.$$

Система разделена на две подсистемы таким образом, чтобы линейная подсистема (4) определяла процесс на плоскости $x_1 x_2$. Подсистема (5) содержит нелинейное уравнение трехмерной системы (3) и определяет процесс на плоскости $x_1 x_3$. Плоскость $x_2 x_3$ исключена из рассмотрения, так как система (3) не содержит соответствующей правой части. Подсистемы на плоскостях $x_1 x_2$ и $x_1 x_3$ связаны между собой переменной x_1 . Подсистема (4) является диссипативным осциллятором $\ddot{x}_2 - a\dot{x}_2 + x_2 = 0$, траектория которого уходит из нуля плоскости $x_1 x_2$. Предположим, что подсистема (5) устойчива; тогда в системе (3) может образоваться трехмерный аттрактор. Эти физические предположения составляют основу доказательства теоремы о существовании аттрактора в системе (3).

Рассмотрим принцип кососимметрии для нелинейных двумерных систем, который был введен в работе [3]. Предполагается, что нелинейный осциллятор имеет линейную и нелинейную составляющие диссипации. Линейная порождает в нуле неустойчивую особую точку (неустойчивый фокус) и линейную составляющую кососимметрии траектории. Нелинейная составляющая ограничивает также область ухода траектории из нуля кососимметричной кривой. Эта кривая образует предельный цикл. Пример нелинейной двумерной системы – осциллятор Ван-дер-Поля, который образует кососимметричный предельный цикл при малых и больших значениях параметра

$$dx_1 / dt = x_2, \quad dx_2 / dt = -x_1 + \mu(x_2 - x_1^2 x_2), \quad (6)$$

где μ – параметр. Кососимметрия связана с двумя осями координат. В нелинейной системе вида (6) (с линейной и нелинейной составляющей диссипации)

$$dx_1 / dt = F_1(x); \quad dx_2 / dt = F_2(x) \quad (7)$$

существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (7), связаны следующими условиями:

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(-x_1, x_2); F_2(x_1, -x_2) = -F_2(-x_1, x_2); \quad (8)$$

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2); F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2). \quad (9)$$

Условия (8), (9) создают кососимметрию, которая образует кососимметричный предельный цикл. Нелинейная составляющая диссипации ограничивает область и, таким образом, останавливает уход изображающей точки. Приведенные сведения из методов качественного анализа двумерных систем будут применены для подсистем (4), (5) при доказательстве существования аттрактора в системе (3).

Предположение. Пусть трехмерная нелинейная система (3) приводится к виду (4), (5). Особая точка трехмерной системы в нуле $(0,0,0)$ – седлофокус. На одной координатной плоскости x_1x_2 подсистема (4) образует линейный диссипативный осциллятор; особая точка на плоскости – неустойчивый фокус. Линейная система на плоскости x_1x_2 отвечает условиям (8), (9). Траектория на плоскости x_1x_2 имеет фокусные точки. На плоскости x_1x_3 вторая подсистема (5) – нелинейная, которая ограничивает уход траектории от нуля. Особая точка в нуле $(0,0)$ имеет характеристические показатели (ХП) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Здесь $\lambda_{1,2} = \xi_* / 2 \pm \sqrt{(\xi_* / 2)^2 - \zeta_*}$; $\xi_* < 0$.

Теорема. Если трехмерная система (3) удовлетворяет условиям Предположения, то в окрестности особой точки $(0,0,0)$ рождается аттрактор.

Доказательство. Так как особая точка трехмерной системы в нуле – седлофокус, то траектория уходит от нуля. В трехмерной системе первая подсистема (4) (плоскость x_1x_2) имеет неустойчивую особую точку в нуле и удовлетворяет условиям (8), (9). Подсистема линейная и образование замкнутой кривой не происходит. Подсистемы (4), (5) связаны между собой через переменную x_1 . Одновременно вторая подсистема включается в режим притяжения к нулю на плоскости x_1x_3 . В этом случае уход траектории на плоскости x_1x_2 остановлен. На плоскости x_1x_3 доминирует процесс притяжения. Поле, порожденное уравнениями в вариациях подсистемы (5), – это поле, которое образует аттрактор. Траектория трехмерной системы (3) либо замыкается, находясь в окрестности нуля $(0,0,0)$ трехмерной системы, либо (в силу избытка седлофокусных решений) осуществляет бесконечный поиск, стремясь замкнуться, в окрестности нуля, образуя странный аттрактор. Теорема доказана.

На рис. 1, а, б, в приведены координатные портреты системы (3). При изменении параметра a ($a = 0,3$) в системе возникает удвоение периода (рис. 2, а, б), что является признаком разрушения периодического движения. Дальнейшее изменение параметра a ($a = 0,4$) порождает хаотический аттрактор (рис. 2, в).

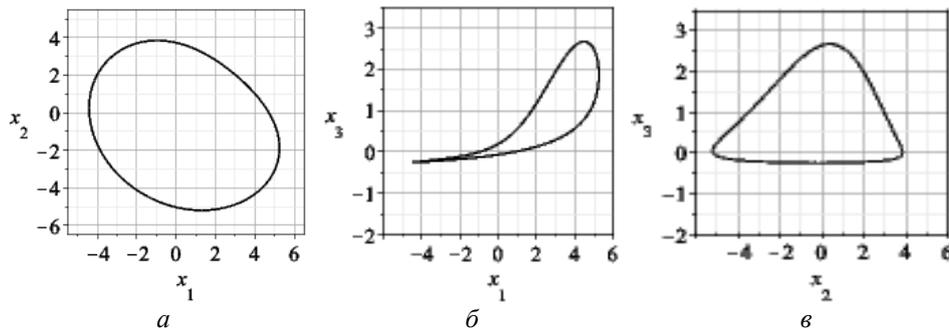


Рис. 1

2. Замечание о симметрии проекций замкнутой траектории на координатные плоскости.

Пусть при некоторых значениях параметров траектория замыкается. На плоскости x_1, x_2 она близка к кососимметрии. Трехмерная система (1) содержит седлофокусные решения, которые делают кососимметрию приближенной. Увеличение седловой составляющей в частном решении приводит к возникновению кратного периода колебаний либо к хаотическим колебаниям.

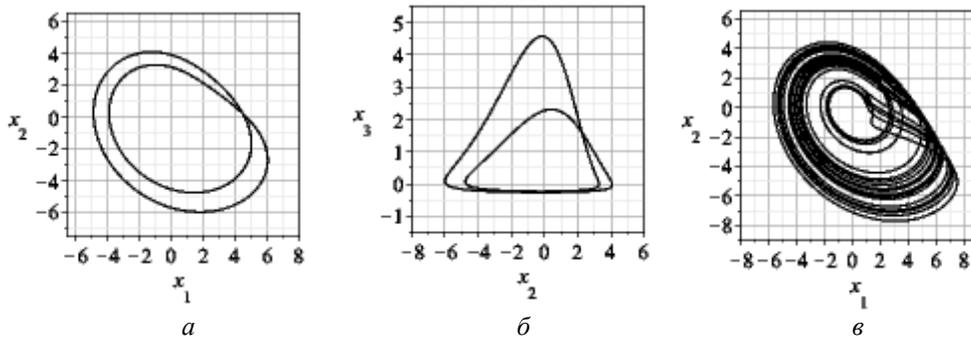


Рис. 2

3. Четырехмерная система.

Рассмотрим четырехмерную систему вида (2).

Утверждение 1. Если к плоскостям, на которых пребывает трехмерная система вида (3), добавляются две (x_2, x_4, x_3, x_4) и взаимодействие на плоскостях определяется уравнениями

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_4; \frac{dx_4}{dt} = cx_4; \tag{10}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -|\xi_*| x_3; \frac{dx_4}{dt} = -dx_3, \tag{11}$$

то изображающая точка теряет устойчивость.

Доказательство. К плоскостям, на которых пребывает изображающая точка, добавятся две: x_2, x_4, x_3, x_4 . На этих двух плоскостях траектория (уравнения (10), (11)) уходит из нуля. На плоскости x_2, x_4 характеристическое уравнение системы (10) имеет корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = c$. На плоскости x_3, x_4 характеристическое уравнение системы (11) имеет корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -|\xi_*|$. Тогда система (2) теряет устойчивость. Траектория системы (2) не образует аттрактор, а медленно увеличивает отклонения от нуля, совершая колебания хаотического характера в силу седлофокусных решений. Утверждение 1 доказано.

На рис. 3, а, б, в приведены координатные портреты медленно возрастающей круговой траектории системы (2).

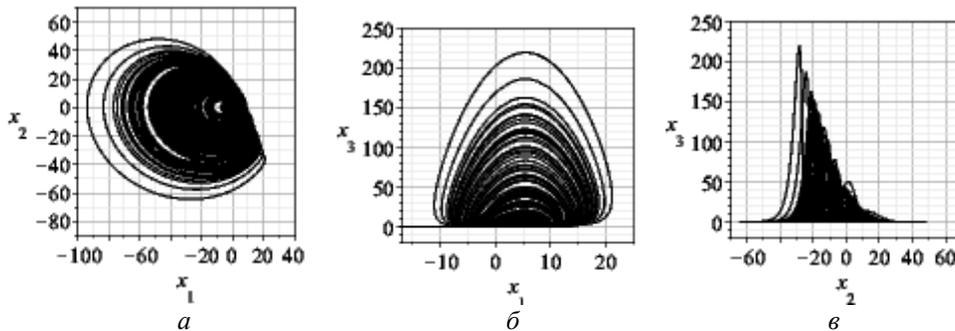


Рис. 3

4. Базовая математическая модель с множеством особых точек.

Заголовок этого параграфа принят согласно работ [5, 8], где приводится численный анализ движения модели твердого тела с линейной цепью обратной связи, предназначенной для стабилизации движения. Речь идет о модели, которая обладает *множеством особых точек*. Ниже составлено уравнение множества и приведен анализ влияния множества особых точек на качество движения. Уравнения движения представлены дифференциальной системой третьего порядка

$$\frac{dx}{dt} = -bx + y + 2cyz; \frac{dy}{dt} = -x - by + cxz; \frac{dz}{dt} = \alpha z - cxy, \quad (12)$$

которая получена из уравнений Эйлера с учетом цепи обратной связи. Поиск особых точек осуществляется с помощью системы алгебраических уравнений

$$-bx + y + 2cyz = 0; -x - by + cxz = 0; \alpha z - cxy = 0. \quad (13)$$

Из третьего уравнения системы (13) запишем

$$z = \frac{cxy}{\alpha}. \quad (14)$$

Второе уравнение системы (13) умножим на $-b$ и сложим с первым уравнением. Учитывая равенство (14), получаем

$$x^2 = \frac{\alpha(1+b^2)}{bc} + \frac{2\alpha z}{bc}. \quad (15)$$

Первое уравнение системы (13) умножим на b и сложим со вторым уравнением. Учитывая равенство (14), получаем

$$y^2 = \frac{\alpha(1+b^2)}{2bc} - \frac{\alpha z}{2bc}. \quad (16)$$

Особая точка в нуле системы (12) имеет ХП, согласно характеристического уравнения

$$\lambda^3 + \lambda^2(1+b*(b-2\alpha)) + \lambda(1+b(1+2\alpha)) - \alpha(b+1) = 0,$$

$$Re\lambda_{1,2} < 0; \lambda_3 > 0; |Re\lambda_{1,2}| > |\lambda_3|. \quad (17)$$

Применяя равенства (15), (16), получим кривую в виде эллипса, которая на плоскости xu ограничивает в определенной мере уход из нуля траектории в силу ХП (17)

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (18)$$

где $A^2 = \frac{3(b^2+1)\alpha}{bc^2}$; $B^2 = \frac{3(b^2+1)\alpha}{4bc^2}$.

Утверждение 2. *Особые точки системы (12) на плоскости xu в области, ограниченной эллипсом (18), имеют тип устойчивого фокуса.*

Доказательство. Запишем уравнения движения на плоскости xu в виде

$$\frac{dx}{dt} = -bx + y; \frac{dy}{dt} = -x - by.$$

Особая точка в нуле (на плоскости xu) имеет следующие ХП: $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm i$. Поле линейной системы распространяется на плоскость, ограниченную эллипсом (18). В этой области траектория притягивается к нулю. *Утверждение 2* доказано.

5. Об одной интерпретации принципа симметрии в трехмерных системах.

Системы вида (12) отличаются от трехмерных систем, для которых в работе [4] развит принцип симметрии. В [4] трехмерные системы разделены на подсистемы из двух уравнений. Система вида (12) разделена на три подсистемы, которые связаны с плоскостями $xу$, xz , yz . Каждая подсистема состоит из трех уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F_{1x}(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = F_{1y}(x, y); \quad \frac{dz}{dt} = F_{1z}(x, y) \quad (19)$$

$$(F_{1x} = -bx + y; \quad F_{1y} = -x - by; \quad F_{1z} = -cxy);$$

$$\frac{dx}{dt} = F_{2x}(x, z); \quad \frac{dy}{dt} = F_{2y}(x, z); \quad \frac{dz}{dt} = F_{2z}(x, z) \quad (20)$$

$$(F_{2x} = -bx; \quad F_{2y} = x(-1 + cz); \quad F_{2z} = \alpha z);$$

$$\frac{dx}{dt} = F_{3x}(y, z); \quad \frac{dy}{dt} = F_{3y}(y, z); \quad \frac{dz}{dt} = F_{3z}(y, z) \quad (21)$$

$$(F_{3x} = y(-1 + cz); \quad F_{3y} = -by; \quad F_{3z} = \alpha z).$$

Рассмотрим подсистему, которая может организовать на плоскости $xу$ кососимметричный портрет. Подсистема (19) содержит два линейных уравнения и одно нелинейное, которые порождают кососимметрию на координатной плоскости $xу$ при выполнении следующих условий [3]:

$$F_{1x}(x, -y) = -F_{1x}(-x, y); \quad F_{1y}(x, -y) = -F_{1y}(-x, y); \quad F_{1z}(x, -y) = -F_{1z}(-x, y). \quad (22)$$

Траектория трехмерной системы уходит из нуля в силу седлофокусной особой точки (см. (17)); система в вариациях (19) имеет ХП – $\lambda_1 = 0; \lambda_{2,3} = -b \pm i$, что указывает на кососимметричный характер замкнутой траектории на плоскости $xу$. Нелинейность $F_{1z} = -cxy$ вынуждает кососимметричную траекторию замкнуться.

Рассмотрим подсистему на плоскости xz . Подсистема (20) отвечает качеству симметрии на плоскости xz . Согласно принципа симметрии на плоскости [9] замыкание траектории на плоскости xz происходит при выполнении следующих условий в уравнениях (20): четность функции F_{2z} относительно x , нечетность функции F_{2x} относительно x . Тогда ось z становится осью симметрии:

$$F_{2x}(-x, z) = -F_{2x}(x, z); \quad F_{2y}(-x, z) = -F_{2y}(x, z); \quad F_{2z}(-x, z) = F_{2z}(x, z). \quad (23)$$

Рассмотрим подсистему на плоскости yz . Подсистема (21) отвечает качеству симметрии на плоскости yz . Согласно принципа симметрии на плоскости [9] замыкание траектории на плоскости yz происходит при выполнении следующих условий в уравнениях (21): четность функции F_{3z} относительно y , нечетность функции F_{3x} относительно y . Тогда ось z становится также осью симметрии:

$$F_{3x}(-y, z) = -F_{3x}(y, z); \quad F_{3y}(-y, z) = F_{3y}(y, z); \quad F_{3z}(-y, z) = F_{3z}(y, z). \quad (24)$$

Условия (22) – (24) могут порождать регулярный аттрактор. Параметры, при которых, например, справедливо *Утверждение 2*, имеют значения

$$(b, c, \alpha) = (0, 4; 5; 0, 26). \quad (25)$$

6. О существовании регулярного аттрактора в системе (12).

Докажем утверждение о существовании аттрактора в системе (12).

Утверждение 3. В системе (12) при значениях параметров (25) существует регулярный аттрактор.

Доказательство. Множество особых точек по контуру эллипса (18) не включено в траекторию системы (12) и относительно этих точек не образуется аттрактор. Траектория образует аттрактор относительно особой точки (0,0,0) в силу симметрии проекций на координатные плоскости [3, 4, 9]. Утверждение 3 доказано.

На рис. 4, а, б, в приведены координатные портреты системы (12) и эллипс (18) (рис. 4, а), а также след эллипса (18) на плоскостях xz , yz .

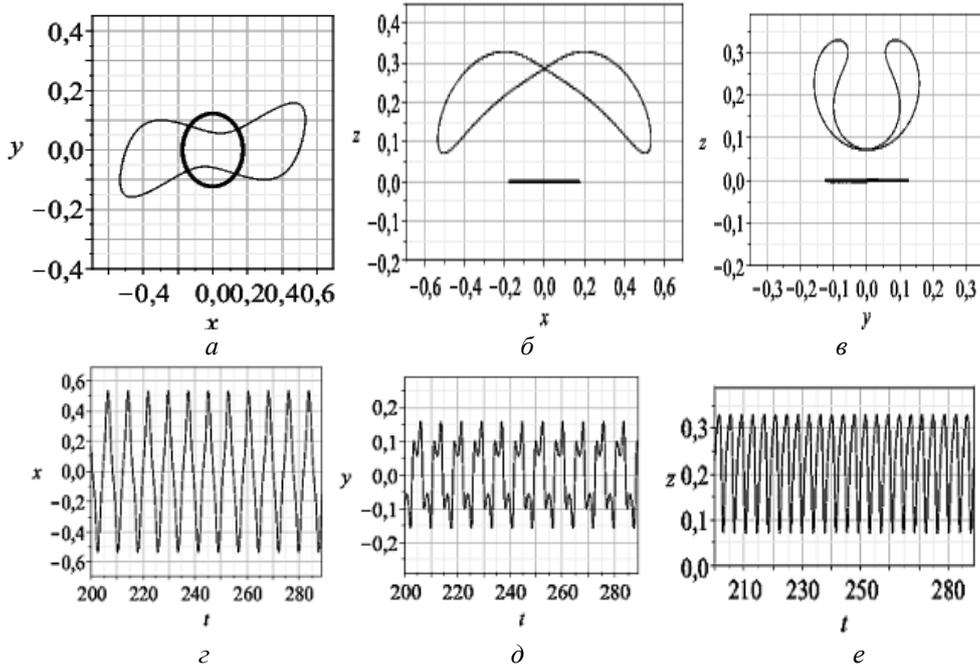


Рис. 4

На рис. 4, г, д, е приведена временная реализация системы (12). Отметим, что при значениях параметров (25) особая точка на эллипсе с координатой $x = 0, y = B$ и в малой окрестности этой точки имеет определенное влияние на траекторию. Это видно по временной реализации (рис. 4, д), на которой показано удвоение периода. Влияние особой точки из множества на эллипсе состоит в изменении периода колебаний изображающей точки, что вызывает самоорганизацию системы (12) в виде удвоения периода. Удвоение периода выступает как один из признаков (этапов) разрушения периодического движения, которое переходит в хаос.

7. Перерождение аттрактора в странный.

Примем следующие значения параметров [8]:

$$(b, c, \alpha) = (0, 4; 5; 0,175). \tag{26}$$

При этих значениях параметров особые точки на эллипсе (18) имеют влияние на траектории системы (12). Уменьшились величины A, B в эллипсе (18). Множество особых точек приблизилось к точке (0,0,0) и каждая особая точка может влиять на движение траектории. В силу того, что система (12) имеет седловую составляющую движения, траектория, теряя симметрию, хаотизируется. Трехмерный регулярный аттрактор перерождается в странный. Детализация хаотического движения может быть проведена с помощью уравнений в вариациях системы (12). Таким образом, изменение одного параметра (α) из перечня (25) усилило влияние множества особых точек на

движение. Седловая составляющая, доминируя, изменила качество движения. На рис. 5, *a*, *б*, *в* приведены координатный портрет системы (12) и эллипс (18) (рис. 5, *a*), а также координатные портреты и следы эллипса (18) на плоскостях xz , yz . На рис. 5, *г*, *д*, *е* приведена временная реализация системы (12). Отклонения по координате x на координатных плоскостях существенно меньше при хаотическом режиме движения по сравнению с регулярным движением.

Заметим, что начальные значения координат системы (12) при построении рисунков для всех рассматриваемых случаев весьма малы ($\ll 1$). Выбор начальных условий сильно влияет на координатные портреты хаотического движения.

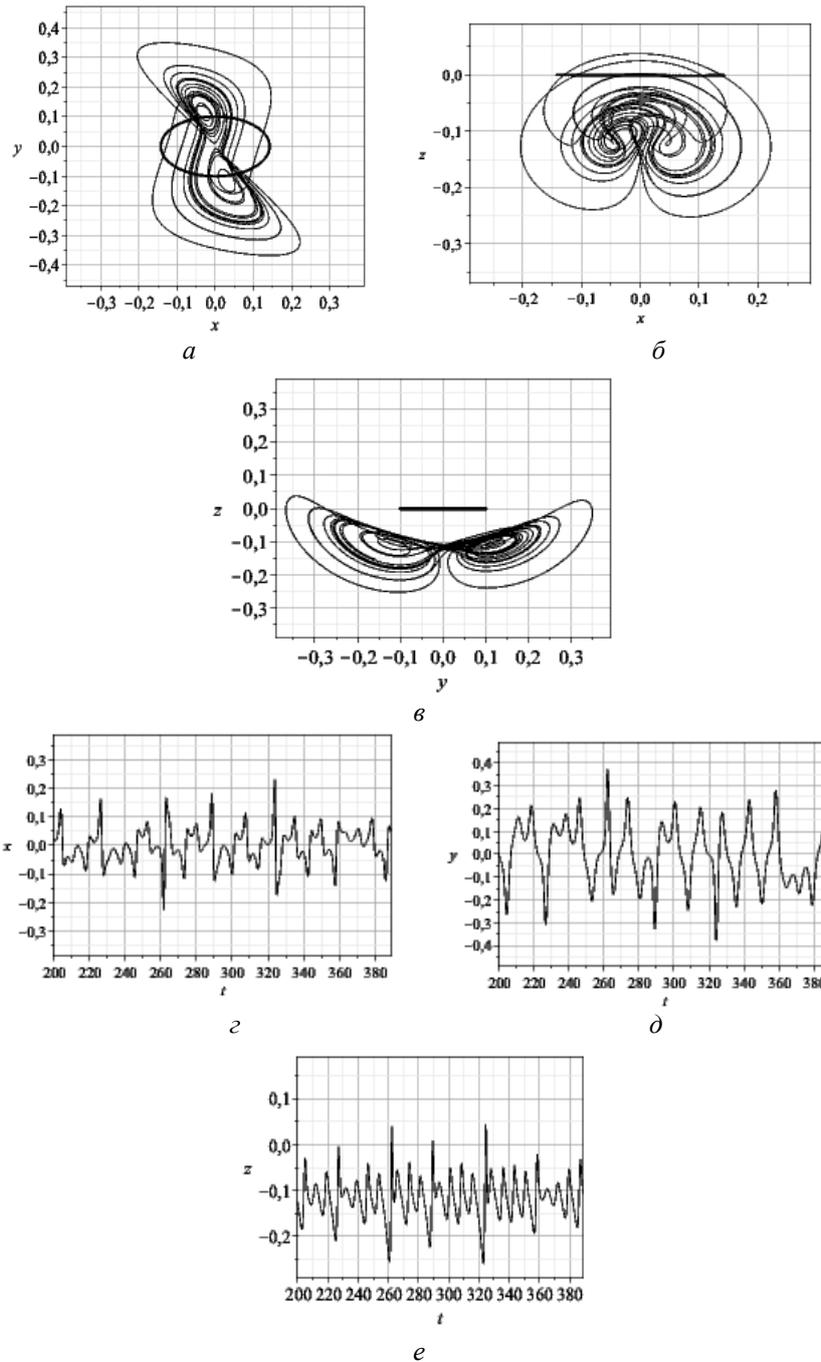


Рис. 5

Таким образом, множество особых точек порождено эллипсом (18). В одном случае эти точки устойчивые и почти не влияют на траекторию системы (12). Тогда особая точка в нуле рождает лишь регулярный аттрактор.

Заключение.

Предлагаемый качественный анализ – шире, нежели численный эксперимент, на что указывают следующие положения:

1) детализация перехода к системе координат, в которой нуль совпадает с особой точкой;

2) приведена новая интерпретация принципа симметрии в трехмерных системах. Установление качества кососимметрии и симметрии координатных портретов системы указывает на прямую связь симметрии с решением проблемы существования аттрактора. Симметрия (кососимметрия) на координатных плоскостях порождает замыкание траектории многомерной (трехмерной) системы;

3) численный анализ не установил отсутствие аттрактора в четырехмерной системе [5, 8]. В тоже время типовой подход доказательства в системе вида (2) и вида (12) позволяет продвинуться в вопросе существования аттракторов и перерождения регулярных аттракторов в странные;

4) анализ механизма перехода от регулярного аттрактора к странному при множестве особых точек является оригинальным и связан с топологией пространства, в котором движется изображающая точка системы (12).

РЕЗЮМЕ Розглянуто дві системи О. Ресслера (тривимірну і чотиривимірну) і систему з множиною особливих точок (модель твердого тіла з лінійним ланцюгом зворотнього зв'язку). Складено рівняння множини особливих точок. Наведено нову інтерпретацію принципу симетрії в тривимірних системах. Встановлено механізми виникнення регулярних аттракторів і переродження їх в дивні.

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
2. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
3. Никитина Н.В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – К.: Феникс, 2012. – 235 с.
4. Никитина Н.В. Принцип симметрии в трехмерных системах // Доп. НАН України. – 2017. – № 7. – С. 21 – 28.
5. Leipnik R.B. Double Strange Attractor in Rigid Body Motion with Linear Field back control // Phys. Lett. – 1981. – **86A**, N 2. – P. 63 – 67.
6. Leonov G.A. Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 2008. – 160 p.
7. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcation and Synchronization of Two Coupled Generators // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 369 – 379.
8. Neimark Yu.I., Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
9. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equation. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 550 p.
10. Nikitina N.V. Analysis of Mechanisms of Stability Loss of an Orbit in Mathematical Models of Three-dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 121 – 132.
11. Rössler O.E. Chemical turbulence: chaos in a simple reaction-diffusion system // Zeitschrift für Naturforschung – 1976. – B. 31 a, H.10. – S. 1168 – 1172.
12. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 с.
13. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 с.

Поступила 29.01.2018

Утверждена в печать 22.05.2018