

А. В. Константинов<sup>1</sup>, О. С. Лимарченко<sup>2</sup>,  
В. В. Лукьянчук<sup>2</sup>, А. А. Нефедов<sup>2</sup>

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ  
«КОНСТРУКЦИЯ – ЖИДКОСТЬ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ»**

<sup>1</sup>*Институт математики НАН Украины,  
ул. Терещенковская, 3, 01601, Киев, Украина; e-mail: akonst.im@mail.ru;*  
<sup>2</sup>*Киев. нац. ун-т имени Тараса Шевченко,  
просп. Глушкова, 4е, 01033, Киев, Украина; e-mail: olelim2010@yahoo.com*

**Abstract.** Two variants of reduction of oscillations of structures with liquid are considered. The controlling algorithm, which includes analytically determined compensation of force interaction of liquid with structure, is proposed for reduction of oscillations of the carrying structure. In this case with minor errors it is possible to reach the state, when the structure motion occurs as if the liquid becomes solidified. In the case of seismic excitation of the system motion it is suggested to use pendulum suspension of the system instead of its rigid fixation. Specificity of selection of the length of pendulum suspension is discussed. The use of pendulum suspension results in considerable lowering of force interaction of liquid with structure and reduction of waves on a free surface of liquid especially for high-frequency excitation. The adduced numerical examples show advantages of the suggested technique.

**Key words:** nonlinear dynamics, combined motion, reduction of oscillations, control with compensation of liquid mobility, seismic excitation, pendulum suspension.

**Введение.**

Различные перемещения и маневры конструкций с жидкостью со свободной поверхностью сопровождаются совместным движением конструкции и жидкости и приводят к ограниченной возможности выполнения точного маневрирования. В основном эта проблема связана с деформированием ограниченного объема жидкости. Для ограничения подвижности жидкости часто применяют пассивные демпферы [2, 3], однако они имеют ряд недостатков. Во-первых, их наличие приводит к существенному увеличению массы конструкции, а, во-вторых, как правило, конкретные пассивные демпферы работают наиболее эффективно для какого-то одного фиксированного уровня заполнения резервуара (например, горизонтальные ребра), что в условиях переменного уровня заполнения жидкостью снижает их полезность. Поэтому важным представляются динамические приемы снижения подвижности жидкости за счет рациональных способов закрепления конструкций или приемы активной компенсации эффекта подвижности жидкости путем разработки алгоритмов управления, основанных на учете влияния мобильности жидкости.

В данной статье на основе нелинейной модели совместного движения резервуара с жидкостью рассмотрено два возможных механизма активного снижения эффектов подвижности жидкости в резервуарах и уменьшения влияния жидкого наполнения на движение несущей конструкции. В основу положена модель, построенная путем применения постановки задачи динамики в форме вариационного принципа Гамильтона – Остроградского с предварительным исключением всех кинематических граничных

условий задачи [1]. При этом с помощью метода модальной декомпозиции описание системы сводится к шести параметрам поступательного и углового движения жидкости и  $N$  параметрам движения жидкости со свободной поверхностью при учете движения жидкости со свободной поверхностью в рамках модели, учитывающей  $N$  форм колебаний свободной поверхности жидкости. В этом случае число переменных задачи равняется числу степеней свободы системы, т.е. размерность разрешающей системы уравнений является минимальной, что имеет некоторые преимущества перед другими аналитическими методами решения задач динамики жидкости со свободной границей [4 – 6, 11]. Заметим также, что из-за предварительного исключения кинематических граничных условий эта модель имеет ряд преимуществ в реализации, что позволило рассматривать не только заданные поступательные движения несущей конструкции, но и совместные движения системы «конструкция – жидкость» при поступательном и угловом движении несущего тела.

При исследовании динамики конструкций с жидкостью обычно масса жидкости превосходит массу конструкции, что приводит не только к интенсивному влиянию подвижности жидкости на движение всей системы в целом, но и к существенному изменению частот системы, которые могут измениться на 30 – 100% по сравнению со случаем заданного движения несущего тела, где рассматриваются лишь парциальные частоты. Более того, изменению подвержены лишь частоты, соответствующие антисимметричным формам колебаний, что меняет не только их величины, но и взаиморасположение в общем ряду частот. Это приводит к тому, что результаты исследования резонансных явлений в жидкости со свободной поверхностью в подвижном резервуаре в рамках постановки, предусматривающей заданное движение несущего тела, далеки от реальности особенно в нелинейном диапазоне возмущений. В принятой модели принимаются во внимание колебания на собственных частотах форм, возбуждаемых в рамках нелинейной теории, которые опускаются в прикладных исследованиях работ [4, 11]. В итоге это привело к согласованию результатов моделирования поведения системы в окрестности резонанса с экспериментальными данными [4, 12, 13].

В работах [1, 9, 10] были разработаны математическая модель и метод исследования совместного движения резервуара и частично заполняющей его жидкости. В рамках этой модели колебания в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» могут происходить под действием сил и моментов, приложенных к стенке конструкции при ее как поступательном, так и вращательном движении. Рассматривались разные варианты маятникового закрепления конструкции. При этом модель учитывает взаимное влияние колебаний жидкости и, в отличие от работ [4, 11], массы конструкции и жидкости входят в эту модель в качестве параметров. При этом главное внимание уделено факторам совместности движения в системе «резервуар – жидкость», что традиционно представляет собой сложную задачу в динамике конструкций с жидкостью [1 – 4, 6 – 8, 11, 13].

### **1. Объект и модель исследования.**

Рассмотрим цилиндрический резервуар, частично заполненный жидкостью. Резервуар рассматриваем как абсолютно твердое тело, которое может совершать поступательное и вращательное движение под действием активных внешних сил и моментов, а также при наличии кинематических возмущений. Жидкость принимается идеальной, несжимаемой, однородной, а ее начальное движение – безвихревым. В дальнейших исследованиях в рамках данной статьи применяется математическая модель, выведенная в [1], прошедшая многостороннюю апробацию, включая сравнение с качественными результатами экспериментов [4, 12, 13].

В качестве независимых параметров приняты амплитуда возбуждения форм колебаний свободной поверхности жидкости  $a_i$ , параметры поступательного  $\varepsilon_i$  и вращательного  $\alpha_i$  движения несущей конструкции. Согласно теореме о том, что безвихревое движение идеальной однородной жидкости полностью определяется движением

ее границ ( $a_i$  определяют движение свободной поверхности,  $\varepsilon_i$  и  $\alpha_i$  – движение твердых границ области, занимаемой жидкостью), выбранные параметры полностью характеризуют динамику системы. При этом по этим параметрам полностью восстанавливаются характеристики движения свободной поверхности жидкости  $\xi$ , поле скоростей жидкости и угловая скорость движения резервуара  $\omega$ .

В математическом плане система уравнений движения представляет собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которой вторые производные неизвестных входят линейно, что создает предпосылки для аналитического приведения рассматриваемой системы уравнений к форме Коши, удобной для последующего численного интегрирования. Система уравнений движения имеет такой вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_{+i} a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pij}^{3*} + E_{pij}^{3*} - E_{prj}^{3*} + E_{prj}^{3*}) \right] + \quad (1) \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[ E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\
& + \dot{\varepsilon} \cdot \left[ \sum_i a_i \vec{D}_{ir}^2 + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijk}^4 \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \vec{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\vec{F}_{pir}^3 + \vec{F}_{pri}^3) + \right. \\
& \left. + \sum_{i,j} a_i a_j (\vec{F}_{pij}^4 + \vec{F}_{pij}^4 + \vec{F}_{prj}^4) \right] + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + \\
& + g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) + g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_i \ddot{a}_i \left( \vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\varepsilon} + \\
& + \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left( \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) \right] = \\
& = \frac{\vec{F}}{M_F + M_T} + \vec{g} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \left( \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \quad (2) \\
& - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left( \sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right) - \\
& - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left( \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} + \\
& + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[ \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_i a_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right] + \\
& + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
& = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left( \omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \quad (3) \\
& + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) + \\
& + 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left( \sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) + \frac{2g}{\rho} (M_r h_r + M_f h_f) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
& + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[ (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) \right] + \\
& + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \left. \right] + \frac{2}{\rho} M_{ex}^r.
\end{aligned}$$

Система уравнений движения содержит три группы связанных уравнений:  $N$  уравнений (1) для определений обобщенных амплитудных параметров движения свободной поверхности жидкости; три уравнения (2) для определения параметров поступательного движения конструкции и три уравнения (3) для определения углового движения конструкции. В целом система содержит  $N + 6$  уравнений, которые описывают совместное движение нелинейной системы конструкция – жидкость.

В систему уравнений (1) – (3) входят индексные выражения, которые характеризуют динамические связи в системе, инерциальные и статические характеристики конструкции, а также внешние силы и моменты, действующие на конструкцию. При этом все эти коэффициенты определяются в квадратурах от форм колебаний свободной поверхности жидкости и потенциалов Стокса – Жуковского [1].

Если представить систему уравнений движения для поступательных и угловых движений системы в форме

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\vec{F} + \vec{R}}{M_F + M_T} + \vec{g}; \quad \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} \right) \right] = \frac{1}{\rho} (M_R^r + M_{ex}^r),$$

где  $\vec{F}$  и  $M_{ex}^r$ , соответственно, внешние сила и момент, приложенные к конструкции, а  $\vec{R}$  и  $M_R^r$  – главные векторы сил и моментов давления жидкости на стенки конст-

рукции, которые согласно вариационному подходу определяются автоматически как составная часть техники варьирования. Из уравнений движения (1) – (3) можно установить аналитические выражения для этих параметров силового и моментного взаимодействия жидкости с конструкцией (заметим, что в литературе по динамике конструкций с жидкостью такое силовое взаимодействие определяется обычно путем интегрирования сил давления на стенках резервуара, что значительно сложнее и рассмотрено лишь для более частных случаев; здесь же такой результат получается автоматически как составная часть техники варьирования и для более общего случая)

$$\vec{R} = \rho \left[ \left( \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \sum_i \ddot{a}_i \left( \vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) \right]; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_R^r = & -\frac{\rho}{2} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} - \\ & -\rho \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] + \\ & + \rho \sum_{p,s=1}^3 \left( \omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left( A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\ & + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\ & + \rho \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left( \sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Получение этих параметров силового взаимодействия в аналитическом виде позволяет не только количественно оценить силовое воздействие жидкости, но и предложить новые алгоритмы управления конструкциями с жидкостью.

## 2. Задачи управления конструкциями с жидкостью на основе компенсации влияния жидкого наполнения.

Рассмотрим случай чисто поступательного движения конструкции с жидкостью в горизонтальной плоскости. В этом случае движение конструкции полностью задается только одним параметром поступательного движения  $\varepsilon_x$ , соответственно, два других уравнения, соответствующих движению по направлениям  $y$  и  $z$  из системы уравнений (2), а также три уравнения системы (3), соответствующие угловому движению конструкции, опускаются. Рассматривается модель движения жидкости, учитывающая  $N = 12$  форм колебаний свободной поверхности жидкости.

Рассмотрим задачу о разгоне конструкции с жидкостью при действии на нее силы, приложенной к конструкции в форме краткосрочного импульса длительностью  $t_{im} = 2$  с. Принималось, что конструкция представляет собой вертикально расположенный круговой цилиндрический резервуар радиуса  $R = 1$  м, с глубиной заполнения  $H = 1$  м, заполненный водой, масса резервуара принималась как 10% от массы жидкости (случай существенного влияния подвижности жидкости). При этом рассматривалось четыре варианта импульсов, имеющих одинаковую длительность и площадь (сообщаемое системе количество движения) – прямоугольный импульс (рис. 1), импульс в виде равнобедренного треугольника (рис. 2), импульс в виде прямоугольного

треугольника с вертикальным задним фронтом (рис. 3), в виде прямоугольного треугольника с вертикальным передним фронтом (рис. 4). На рис. 1 – 4 представлены графики изменения скорости движения конструкции в направлении  $x$  во времени для случая движения системы при «затвердевшей» жидкости (штриховая линия), для случая полного учета подвижности жидкости (сплошная линия), а также для случая движения системы, когда действие импульса силы сопровождается компенсацией силового отклика жидкости на стенки резервуара, определенной согласно формуле (4). Заметим, что при этом действие компенсации подвижности жидкости выполняется на всем интервале движения в отличие от действия кратковременного импульса активной силы. При этом результаты расчетов изменения скорости движения конструкции полностью совпали со случаем движения системы с «затвердевшей» жидкостью. Результаты вычислений приведены в безразмерную форму путем отнесения линейных размеров к радиусу резервуара.

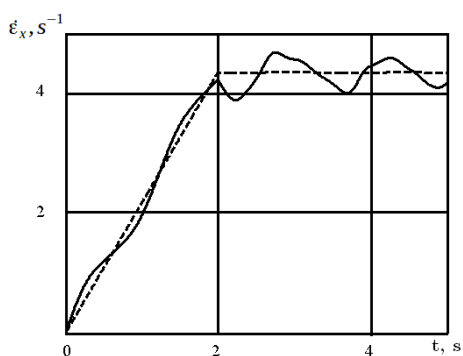


Рис. 1

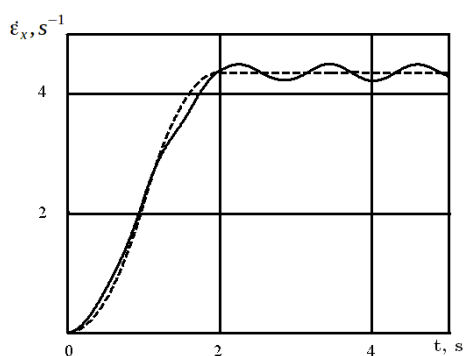


Рис. 2

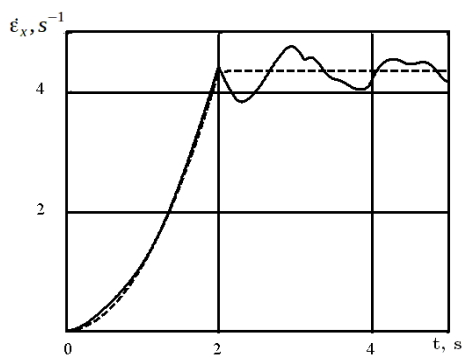


Рис. 3

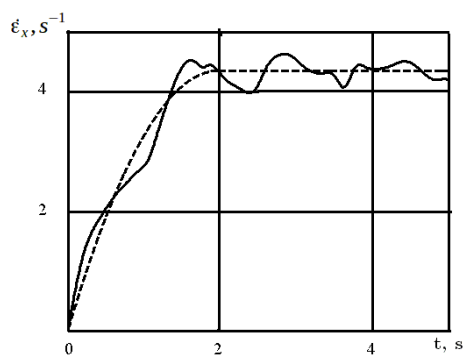


Рис. 4

Рассмотрены также задачи торможения движения резервуара, движущегося с начальной скоростью  $\dot{\epsilon}_x(0) = -2$  1/с. Торможение выполнялось такими же импульсами и в такой же последовательности, как и в случае задачи о разгоне движения. Площадь импульса торможения равняется количеству движения конструкции с жидкостью. Как и ранее рассмотрены задачи о торможении при тех же параметрах системы в рамках трех постановок: движение для «затвердевшей» жидкости (штриховая линия), движение в рамках полного учета мобильности жидкости (сплошная линия), а также движение с полным учетом мобильности жидкости, но при наличии компенсации влияния жидкости на стенки резервуара. Результаты расчетов изменения скорости движения конструкции во времени для случая задачи торможения четырьмя видами импульсов приведены на рис. 5 – 8.

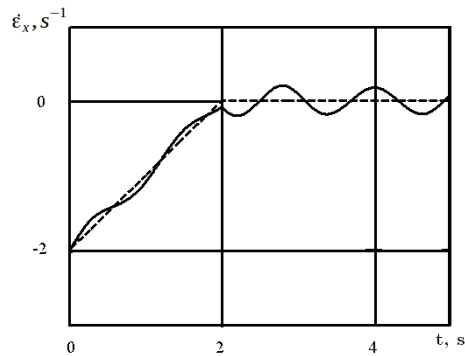


Рис. 5

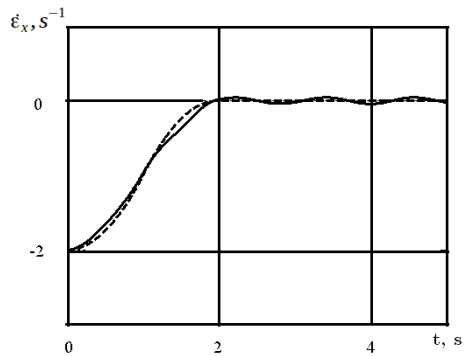


Рис. 6

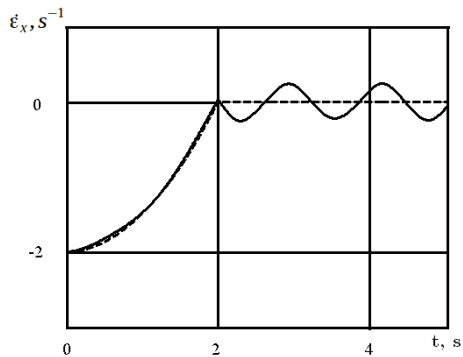


Рис. 7

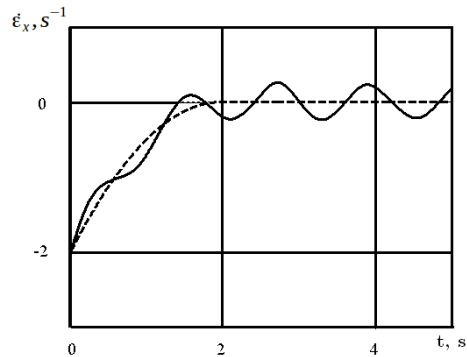


Рис. 8

Как видно из результатов расчетов, при действии на конструкцию с компенсацией сил давления жидкости на стенки резервуара конструкция совершает движение, которое с высокой точностью совпадает со случаем движения конструкции с «затвердевшей» жидкостью. Интересно отметить, что при торможении с учетом компенсации подвижности жидкости резервуар практически стоит на месте, хотя жидкость продолжает совершать внутри резервуара интенсивное волновое движение, влияние которого компенсируется. Фактически в таком движении с обратной связью в виде компенсации подвижности жидкости удастся повысить точность квазитвердого движения конструкции по заранее требуемой траектории (программное движение).

Рассмотренные примеры соответствуют случаю, когда интенсивность приложения нагрузки не велика. Для определения степени отклонения режима движения с компенсацией подвижности жидкости рассмотрен также случай более интенсивных нагрузок на конструкцию. На рис. 9 – 11 приведены результаты расчетов скорости поступательного движения конструкции для рассмотренной выше задачи при изменении времени действия нагрузки. Рис. 9 соответствует длительности действия нагрузки 0, 25с; рис. 10 – 0,5с; рис. 11 – 1с. При этом на рисунках кривая 1 соответствует случаю движения системы с затвердевшей жидкостью, кривая 2 – случаю учета подвижности на основе модели совместного движения системы конструкция – жидкость, а кривая 3 – случаю совместного движения конструкции с жидкостью при дополнительном приложении к системе силы, компенсирующей подвижность жидкости. Как видно из результатов расчетов, при высокоинтенсивном разгоне системы скорость движения конструкции при учете подвижности жидкости в рамках модели совместного движения отличается от скорости движения конструкции с «затвердевшей жидкостью» сильнее, чем в случае не высокоинтенсивного разгона. Аналогично, при рассмотрении движения с учетом компенсации подвижности жидкости уже становятся

заметными отличия от движения системы с «затвердевшей» жидкостью. Причем эти отличия носят как колебательный характер, так и характер накопительного отклонения. Возможно такие погрешности удалось бы снизить путем повышения точности интегрирования системы уравнений (1), (2), однако пока это не проверялось.

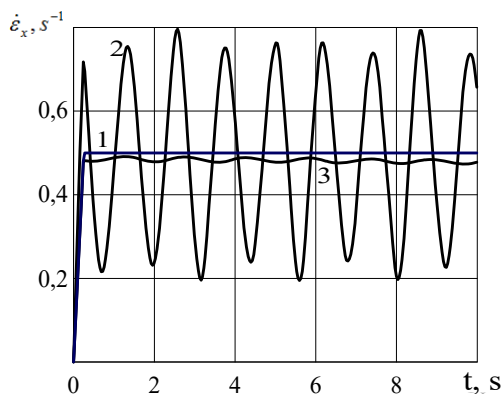


Рис. 9

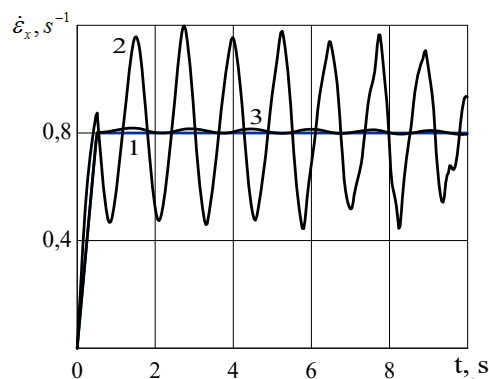


Рис. 10

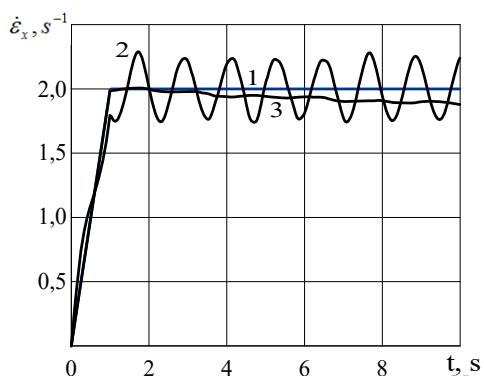


Рис. 11

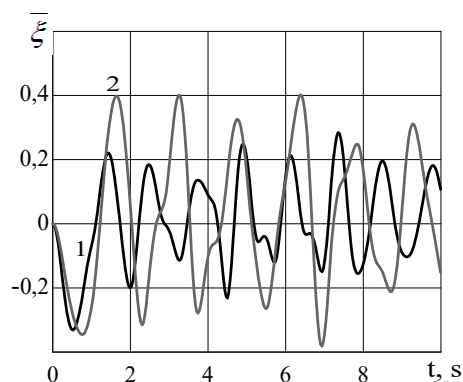


Рис. 12

На рис. 12 показано изменение возмущения волн на свободной поверхности жидкости на стенке резервуара для случая модели совместного движения системы без силовой компенсации подвижности жидкости (кривая 1) и с силовой компенсацией подвижности жидкости (кривая 2) для случая действия импульса силы длительностью 1 с. Как видно из результатов, в целом волновое движение жидкости при учете силовой компенсации превосходит случай моделирования системы без компенсации подвижности, однако эти различия значительны на начальном этапе движения системы и постепенно ослабевают с ростом времени.

Заметим, что с точки зрения математической теории управления внесение в систему силовой компенсации подвижности жидкости эквивалентно внесению в систему обратной связи по ускорению амплитуд форм колебаний жидкости со свободной поверхностью и квадратов скоростей изменения этих амплитуд, что вытекает из формы выражения для силового отклика жидкости (4). Предлагаемая схема управления движением не является оптимальной, однако позволит повысить точность реализации программных движений конструкций с жидкостью со свободной поверхностью.



### 3. Снижение подвижности жидкости при сейсмическом возмущении движения конструкции с жидкостью.

Одной из важных инженерных задач является задача динамики конструкций с жидкостью при сейсмическом возмущении. Сейсмические возмущения бывают достаточно разнообразными и их характер существенно зависит от степени приближения изучаемой конструкции к эпицентру землетрясения. В то же время основные возмущения в системе формируются, прежде всего, начальным этапом сейсмического воздействия. В задаче сейсмического возмущения грунта обратное влияние конструкции на грунт пренебрежимо мало, потому в математической постановке задачи следует считать движение земной коры заданным, т.е. рассматривать задачу при заданных кинематических возмущениях системы. Если упрощенно предполагать, что возмущение земной коры происходит только в горизонтальном направлении, то в системе уравнений (1) – (3) следует положить  $\varepsilon_x(t)$  заданным, а также положить  $\varepsilon_y = 0$  и  $\varepsilon_z = 0$ ; соответственно, система уравнений (2) исключается из рассмотрения. В обычной постановке задача сводится к поступательному движению конструкции по заданному закону. Заметим, что такое комбинированное рассмотрение системы, когда по части переменных (параметрам поступательного движения конструкции) движение считается заданным, а по другой части (параметрам углового движения системы) рассматривается модель совместного движения системы, в задачах динамики конструкций с жидкостью рассматривается впервые.

В качестве средства снижения амплитуд колебаний жидкости предлагается применить не фиксированное закрепление конструкции на грунте, а ее закрепление в форме маятникового подвеса. При этом маятниковый подвес реализуется не путем подвешивания конструкции, а за счет подвижности основания на криволинейной поверхности (что эквивалентно). Учитывая выбор углов вращения конструкции с жидкостью и то, что рассматривается сейсмическое возмущение в одной плоскости, это приведет к тому, что в системе будут наблюдаться повороты только относительно оси  $Oy$  (угол вращения  $\alpha_2$ ), а два других угла будут тождественно равны нулю.

Будем считать, что сейсмическое возмущение грунта можно приближенно описать законом  $\varepsilon(t) = A \exp(-\alpha t) \sin \omega t$ , где  $\alpha$  и  $\omega$  являются характеристиками затухания и частоты сейсмического возмущения. Такой упрощенный закон сейсмически подобного возмущения представлен на рис. 13 для двух расчетных вариантов.

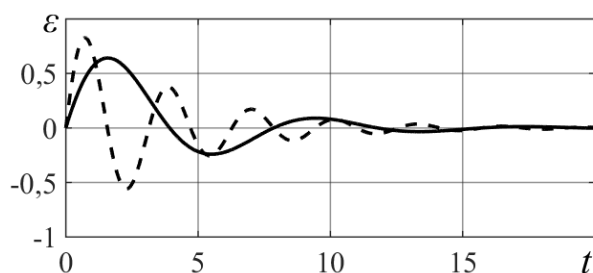
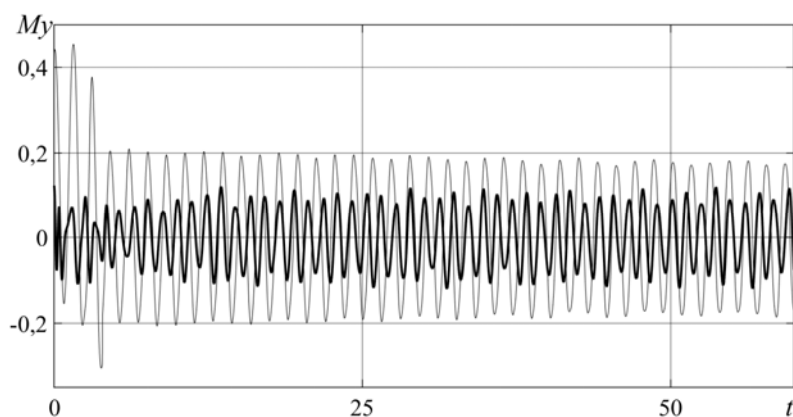


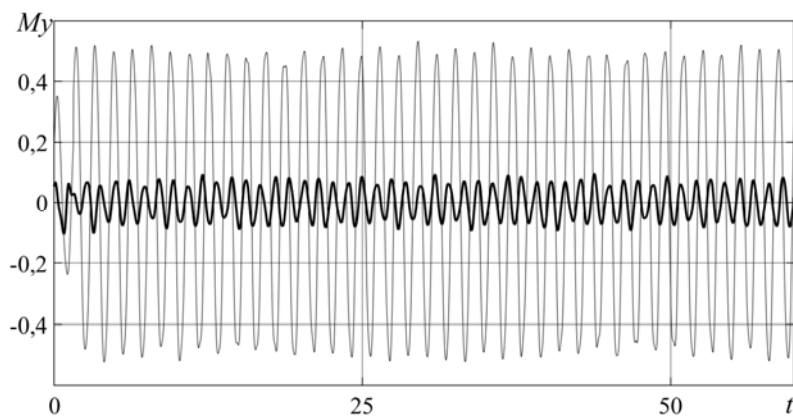
Рис. 13

Для резервуара с параметрами, рассмотренными в предыдущем разделе данной статьи и с моментами инерции, определенными согласно работе [1, 9], рассматривались случаи закрепления резервуара на маятниковом подвесе длины  $l$  (толстая сплошная кривая в последующих рисунках) и для закрепления резервуара с грунтом, которое далее приводит к поступательному движению конструкции (тонкая сплошная кривая на последующих рисунках).

На рис. 14 представлены результаты сравнения момента давления жидкости на стенку резервуара относительно точки, совпадающей с центром невозмущенной свободной поверхности,  $M_y$  для частоты возмущения движения грунта  $\omega = 0,8$  1/с (вариант *а*) и  $\omega = 2,0$  1/с (вариант *б*). При этом длина подвеса принималась  $l = 8R$ , а амплитуда внешнего возмущения подбиралась чтобы максимальные возмущения свободной поверхности жидкости были порядка  $0,3R$ . Как видно из рисунков, в случае маятниковой подвеса опрокидывающий момент значительно снижается, причем для более высокой частоты сейсмического возмущения это снижение проявляется существеннее.



*а*



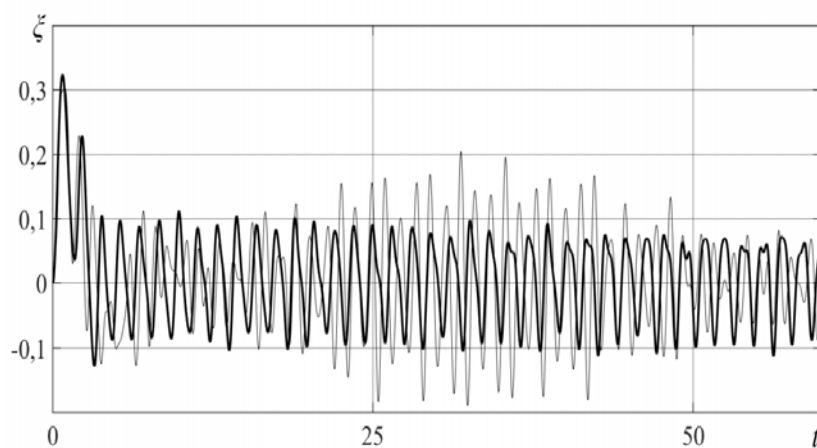
*б*

Рис. 14

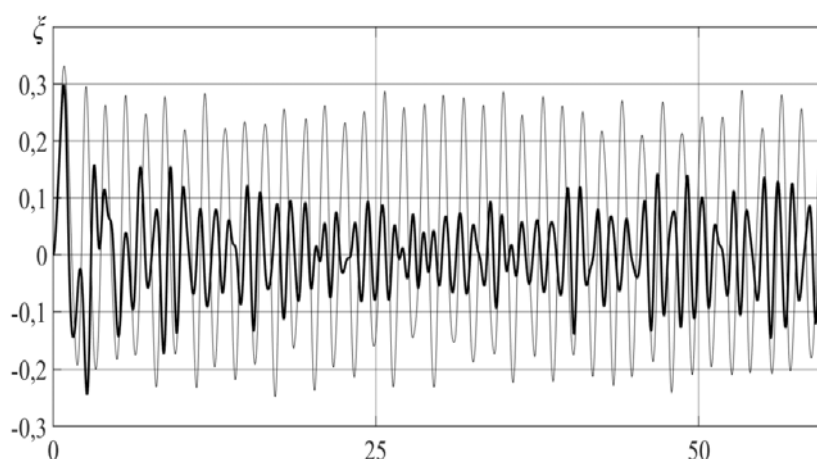
В работе [9] было показано, что маятниковый подвес существенно влияет на перераспределение собственных частот колебаний конструкции и жидкости. Частота квазитвердых колебаний конструкции при этом понижается, а частоты колебаний жидкости избирательно меняются. Изменение касается только частот с окружным номером  $m = 1$  (антисимметричные формы колебаний). При этом на коротких длинах подвеса увеличение первой частоты антисимметричных форм колебаний может быть почти в два раза. Это указывает на важность рассмотрения такого типа задач именно в совместной постановке. Такое изменение частот в зависимости от длины маятниково-

го подвеса приводит не только к существенному изменению значений самих частот, но и к изменению взаимного расположения частот с разными окружными номерами, что в итоге приводит к тому, что в разных диапазонах длин подвеса следует ожидать разного проявления нелинейных свойств системы, поскольку форма колебаний с наименьшей частотой в разных диапазонах будет разной. Соответственно, при анализе поведения системы на маятниковом подвесе отдельно будут проанализированы случаи для длинных ( $l = 8R$ ), средних ( $l = 3R$ ) и коротких ( $l = R$ ) маятниковых подвесов.

Приведем результаты определения параметров волнообразования жидкости для двух видов сейсмического кинематического возмущения движения для трех диапазонов длин маятникового подвеса. Для анализа представлены значения возмущений свободной поверхности на стенке бака во времени. Рисунки показывают результаты сравнения возмущений свободной поверхности жидкости на стенке бака в случае поступательного движения конструкции (тонкая сплошная линия) и движения конструкции на маятниковом подвесе (жирная сплошная линия) для длинного (рис. 15), среднего (рис. 16) и короткого (рис. 17) маятниковых подвесов. При этом вариант *a* соответствует частоте сейсмического возмущения  $\omega = 0,8$  1/с, а вариант *б* – частоте  $\omega = 2,0$  1/с.



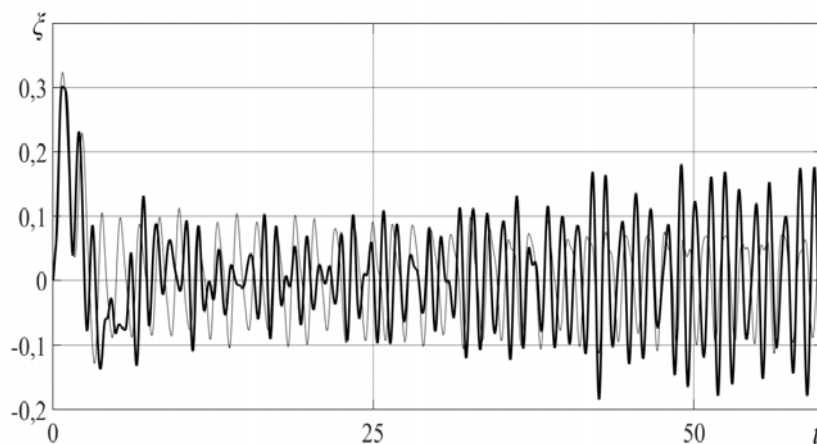
*a*



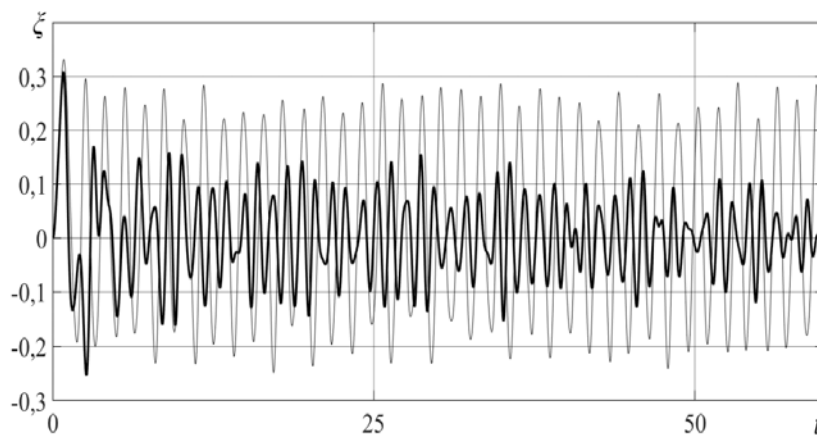
*б*

Рис. 15

Как видно из рисунков, эффективность маятникового подвеса по снижению амплитуд волн практически не проявляется для низких частот сейсмического возмущения движения. Для более высоких частот эффективность маятникового подвеса выражена ярче. При этом для более коротких подвесов снижение амплитуд волн существеннее. Заметим, что при изменении амплитуд волн проявляется модуляция колебаний, при этом частота модуляции возрастает с уменьшением длины маятникового подвеса.

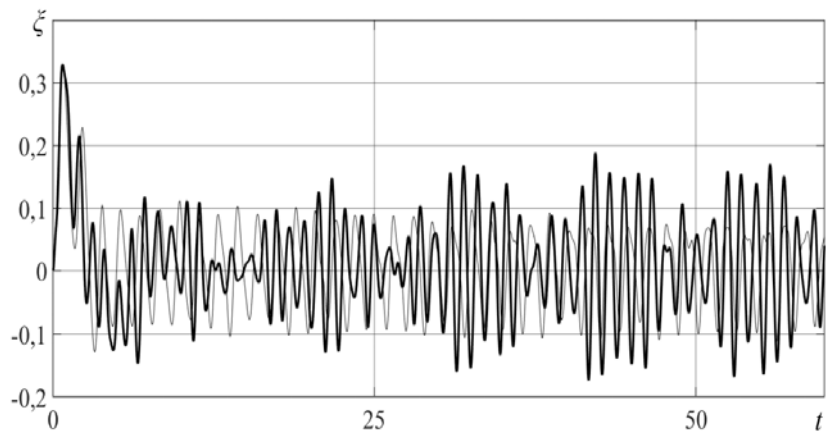


*a*

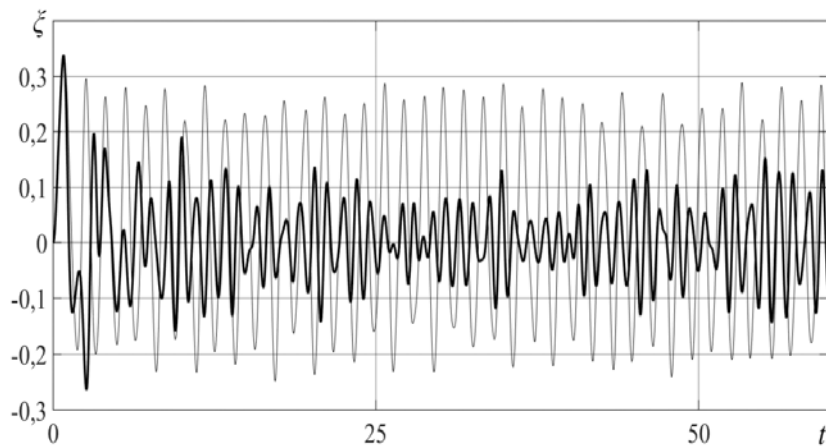


*б*

*Рис. 16*



*a*



*б*

*Рис. 17*

В целом применение маятникового подвеса в качестве средства снижения негативных последствий сейсмического возмущения является эффективным для снижения силового и моментного взаимодействия конструкции с жидкостью и для снижения возмущений на свободной поверхности жидкости, что особенно проявляется для коротких подвесов, когда распределение частот в системе наиболее существенно меняется по сравнению со случаем поступательного движения системы, а именно, когда частота первой антисимметричной формы смещается с первой позиции на третью и далее.

**Заключение.**

Основываясь на аналитических возможностях нелинейной динамической модели совместного движения конструкций с жидкостью, предложено два приема для решения прикладных проблем динамики конструкций с жидкостью, связанных с гашением колебаний жидкого наполнения конструкции и ее квазитвердого движения.

Для реализации высокоточной маневрирования предложен алгоритм управления движением конструкций с жидкостью, основанный на компенсации силового взаимо-

действия конструкций с жидкостью. На примере задачи о разгоне и торможения движения резервуара показана эффективность такого подхода для построения законов управления движением. Предложенная схема управления фактически представляет собой управление с обратной связью по ускорениям амплитуд возмущения форм колебаний свободной жидкости.

Для предотвращения негативных последствий землетрясений предложено вместо фиксированного закрепления конструкции на земной поверхности применить закрепление конструкции с жидкостью на маятниковом подвесе. Показана эффективность такого приема для уменьшения силового и моментного взаимодействия конструкции с жидкостью, а также для снижения волнового движения жидкости. В соответствии с ранее установленной спецификой проявления динамических свойств конструкций с жидкостью показаны особенности поведения конструкции для длинных, средних и коротких длин подвесов.

**РЕЗЮМЕ** Розглянуто два варіанти зменшення коливань конструкцій з рідиною. Для зменшення коливань несучої конструкції пропонується використовувати алгоритм керування, до якого включено аналітично визначену компенсацію силової взаємодії рідини з конструкцією. В цьому випадку при незначних похибках вдається досягти такого стану, коли рух конструкції відбувається так, ніби рідина затверділа. У випадку сейсмічного збурення руху системи запропоновано замість жорсткого закріплення конструкції використовувати для закріплення маятниковий підвіс. Вказано специфіку підбору довжини маятникового підвісу. Показано, що використання маятникового підвісу призводить до суттєвого зменшення силової взаємодії рідини з конструкцією і зменшення амплітуд хвиль на вільній поверхні, особливо для високочастотного збурення. Наведено чисельні приклади, що ілюструють переваги запропонованих прийомів.

1. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – К.: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с.
2. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
3. Abramson H. (Ed.) The dynamic behavior of liquid in moving container – Washington: NASA SP-106, 1966. – 467 p.
4. Faltinsen O.M., Rognebakke O.M., Timokha A.N. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // Physics of fluids. – 2006. – 1, N 18. – P. 1 – 14.
5. Henderson D.M., Miles J.W. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line // J. Fluid Mech. – 1994. – 275. – P. 285 – 299.
6. Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 950 p.
7. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 4. – P. 353 – 364.
8. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 12 – 63.
9. Limarchenko O.S., Semenovich K.O. Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system // J. of Mathematical Sciences. – 2017. – 222, N 3. – P. 296 – 303.
10. Limarchenko O.S., Tkachenko R.V. Influence of Spring Attachment on the Dynamics of a Fluid-Filled Cylindrical Tank on a Moving Platform // Int. Appl. Mech. – 2015. – 50, N 3. – P. 289 – 294.
11. Lukovsky I. A. Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. – Berlin: De Gruyter, 2015. – 410 p.
12. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // Int. J. of Recent Trends in Engineering. – 2009. – 1, N 6. — P. 1 – 5.
13. Zhang C., Li Y., Meng Q. Fully nonlinear analysis of second-order sloshing resonance in a three-dimensional tank // Computers & Fluids. – 2015. – 116. – P. 88 – 104.

Поступила 20.02.2018

Утверждена в печать 22.11.2018