

В. Д. Кубенко<sup>1</sup>, С. Д. Саленко<sup>2</sup>

**ВОЛНООБРАЗОВАНИЕ В УПРУГОМ СЛОЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ  
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ**

<sup>1</sup>Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua

<sup>2</sup>ГУ «Отделение гидроакустики института геофизики им. С.И. Субботина НАНУ»,  
ул. Преображенская 3, 65082, Одесса, Украина; e-mail: salenkos@ukr.net

**Abstract.** An analytical solution of a plane problem on action of the nonstationary load on the surface of elastic layer is constructed. The Laplace and Fourier integral transforms are applied. The solution is obtained in the form of series by reflected waves, from which a finite number of terms are retained in the calculations. A transition to the space of originals is carried out by a joint inversion of integral transforms. The Numerical calculations are performed for a load that suddenly appears on the surface of a layer and propagates with the constant velocity. The normal stress on the axis of symmetry is calculated for the time interval during of which the extension head wave passes four times through the thickness of layer. The results of comparison with a similar problem for mixed boundary conditions are presented.

**Key words:** elastic layer, nonstationary load, wave process, integral transforms.

**Введение.**

Исследование волновых процессов в слоистой среде является предметом многочисленных публикаций и связано с рядом практических приложений, таких как механика материалов, прикладная геофизика, оптика, медицина. В большинстве работ, посвященных исследованию волновых процессов в слоистой среде, рассмотрены стационарные волновые процессы, для которых основным параметром, определяющим выбор метода исследования, является соотношение между длиной волны и характерным размером тела. Среди исследований нестационарных процессов в упругих телах с плоскими границами основное количество публикаций посвящено изучению распространения волн в упругом полупространстве. В первых работах [4, 11, 17, 19, 20] упор делается на использовании асимптотических методов и обнаружении качественных особенностей возникающих волновых процессов, таких как выделение отдельных типов волн и их фронтов, рассеяние и затухание в специфических направлениях, поведение волн в дальней зоне, обнаружение сингулярностей и др. Рассматривается преимущественно точечный (линейный в случае плоской задачи) источник, моделируемый дельта-функцией. Доминирующим является применение интегральных преобразований по временной и пространственным переменным и их обращение методом Каньяра [9]. Не задаваясь целью анализа всех публикаций в этом направлении, отметим работу [8], в которой методами интегральных преобразований и их совместного обращения по методике Каньяра получены выражения для двух компонент вектора упругого перемещения (осесимметричная задача) при нестационарном нагружении по круговой площадке конечного радиуса в случае однородного и квадратичного распределения нагрузки вдоль радиуса. Вычисленные перемещения являются разрывными, что обусловлено избранной зависимостью действующей нагрузки от времени в виде дельта-функции. В статье [18] для аналогичной задачи обращение преобразований Лапласа и Ханкеля производится сведением к несобственным интегралам и их

вычислением численными методами. Ряд обобщений приведен в книге [24]. Случай заглубленного источника, приложенного к поверхности наклонной плоскости, рассмотрен в публикациях [10, 22]. Методом Каньяра (или Каньяра-де Хуупа) исследуется действие подвижной нестационарной нагрузки [5, 12]. Подобные задачи решаются также численными методами, преимущественно конечно-элементными.

Перечисленные выше исследования имеют дело с полубесконечными объектами: полупространством в осесимметричном случае или полуплоскостью в случае плоской задачи. Для таких объектов характерным является возбуждение волновых возмущений на границе и последующее беспрепятственное распространение акустических или упругих волн в массиве объекта. Для объекта ограниченных размеров, в частности, для слоя, как уже отмечалось, характерной особенностью волновых процессов, возбуждаемых на одной из границ, является многократное поочередное отражение возбужденных волн от каждой из границ. Тем самым в теле создается сложное поле давлений и скоростей (напряжений в упругом слое), изменяющееся каждый раз с приходом той или иной отраженной волны в рассматриваемую точку. Такая задача значительно сложнее и требует разработки соответствующих подходов к ее решению. Установившиеся процессы в слоистых средах исследованы достаточно широко [7, 13, 23]. В монографиях [4, 19] впервые дана постановка нестационарной первой краевой задачи для упругого слоя и при помощи асимптотических методов исследуется поведение волновых полей в дальней по отношению к области приложения нагрузки зоне. В публикации [16] применительно к изучению раннего этапа проникания затупленного индентора в поверхность упругого слоя с использованием методики Каньяра построено решение, позволяющее проанализировать характер распространения прямых и многократно отраженных упругих волн и напряженное состояние вдоль оси симметрии задачи в плоском случае. Наконец, в работах [14, 15] методами интегральных преобразований построено точное аналитическое решение нестационарной плоской задачи для упругого слоя со смешанными условиями на гранях при действии поверхностной, распределенной по области конечных размеров, нагрузке.

В данной работе построено аналитическое решение плоской задачи о действии нестационарной нагрузки определенного типа на поверхность упругого слоя, одна из граничных поверхностей которого является свободной, другая – жестко закрепленной. Применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Вследствие однородности полученных трансформант для перехода в пространство оригиналов используется метод совместного обращения интегральных преобразований [3, 9]. Решение строится в виде ряда по отраженным волнам. В отличие от решения, полученного в [15] для смешанных условий на гранях, граничные условия первой и второй задач теории упругости обуславливают ветвящийся волновой процесс, когда при каждом отражении от границы падающая волна одного типа порождает отраженные волны обоих типов (волны расширения и сдвига). Поэтому при вычислениях приходится ограничиваться лишь конечным числом отражений. В данной работе построен волновой процесс на интервале времени, в течение которого головная волна в слое четырежды проходит толщину слоя. При этом учтены все волны, возникающие при взаимодействии волновых фронтов с гранями слоя в пределах рассмотренного интервала. Приведенные числовые результаты иллюстрируют развитие нормального напряжения вдоль оси симметрии задачи и выполнены для нагрузки, которая внезапно возникает на поверхности слоя и распространяется по ней с постоянной скоростью.

Отметим, что возможное решение рассматриваемой нестационарной задачи лучевым методом позволяет определить характеристики процесса только на фронте волны и в непосредственной близости к фронту; предложенное ниже решение дает возможность получить распределение напряжения по всей толщине слоя.

### §1. Постановка задачи.

Рассмотрим плоскую задачу о действии нестационарной нагрузки на поверхность упругого слоя толщиной  $h$ . Отнесём слой к декартовым координатам  $x, z$ , так что ось  $x$  направлена вдоль границы слоя, ось  $z$  – в глубину слоя. Нагрузка  $\Omega(x, t)$  в виде нормального напряжения возникает в некоторый начальный момент времени  $t = 0$ .

Введем следующие безразмерные обозначения:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}; \bar{z} = \frac{z}{R}; \bar{u}_j = \frac{u_j}{R}; \bar{t} = \frac{c_p t}{R}; \bar{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{\lambda + 2\mu}; c_0 = \sqrt{\frac{K}{\gamma}}; \alpha = \frac{c_p}{c_0}; \beta = \frac{c_s}{c_0};$$

$$b = \frac{\beta}{\alpha}; c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}}; c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}; j, k = x, z,$$

черта над которыми ниже будет опущена.

Здесь  $R$  – некоторый характерный линейный размер;  $\lambda, \mu$  – упругие постоянные Ламе;  $c_p, c_s$  – соответственно скорости распространения волн расширения и сдвига в материале слоя;  $\gamma, K$  – соответственно, плотность и модуль всестороннего сжатия материала слоя;  $u_j$  – компоненты вектора перемещений.

Поведение упругой среды описывается волновыми потенциалами  $\Phi$  и  $\Psi$ , которые в случае плоской задачи удовлетворяют волновым уравнениям [1]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

и связаны с упругими перемещениями и напряжениями соотношениями [1]

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}; u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \sigma_{zz} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2b^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x};$$

$$\sigma_{xz} = b^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right).$$

В качестве граничных условий при  $z = 0$  рассмотрим первую краевую задачу теории упругости, согласно которой на границе задаётся нормальное  $\sigma_{zz}$  и касательное  $\sigma_{xz}$  напряжения. При  $z = h$  примем условие жёсткого закрепления

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \Omega(x, t); \sigma_{xz}|_{z=0} = 0;$$

$$u_x|_{z=h} = 0; u_z|_{z=h} = 0. \quad (1.3)$$

Начальные условия для потенциалов нулевые:

$$\Phi|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{t=0} = 0; \Psi|_{t=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (1.4)$$

## §2. Общее решение.

Если волновые уравнения (1.1) подвергнуть интегральным преобразованиям Лапласа по времени (с учётом нулевых начальных условий) и Фурье по координате  $x$  (предполагая, что при  $|x| \rightarrow \infty$  потенциалы и их первые производные стремятся к нулю) [6], они приобретут вид

$$\frac{d^2 \Phi^{LF}}{dz^2} - \left( \frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \Phi^{LF} = 0; \frac{d^2 \Psi^{LF}}{dz^2} - \left( \frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \Psi^{LF} = 0, \quad (2.1)$$

где  $s$  и  $\xi$  – соответственно, параметры преобразования Лапласа и Фурье.

Общее решение уравнений (2.1) записывается в виде

$$\Phi^{LF} = A(s, \xi) e^{-\frac{\xi}{\alpha} z} + \overline{A(s, \xi)} e^{\frac{\xi}{\alpha} z}; \Psi^{LF} = B(s, \xi) e^{-\frac{\xi}{\beta} z} + \overline{B(s, \xi)} e^{\frac{\xi}{\beta} z};$$

$$P = \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}; \quad S = \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}.$$

Здесь  $A(s, \xi); \dots; \overline{B(s, \xi)}$  — функции, подлежащие определению из граничных условий. В результате удовлетворения граничным условиям (1.3) определяются произвольные постоянные, и выражение для изображения  $\sigma_{zz}^{LF}$  выглядит следующим образом (выражения для перемещений и касательного напряжения не приводятся, имея в виду, что их получение может быть выполнено аналогично):

$$\sigma_{zz}^{LF} = \frac{1}{\alpha^2} \left( q_1 e^{-\frac{z}{\alpha} P} A(s, \xi) + q_1 e^{-\frac{z}{\alpha} P} \overline{A(s, \xi)} - i 2 \beta \xi S e^{-\frac{z}{\beta} S} B(s, \xi) + i 2 \beta \xi S e^{-\frac{z}{\beta} S} \overline{B(s, \xi)} \right). \quad (2.2)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} A(s, \xi) &= \frac{\Delta_A}{\Delta}; \quad \overline{A(s, \xi)} = \frac{\Delta_{\overline{A}}}{\Delta}; \quad B(s, \xi) = \frac{\Delta_B}{\Delta}; \quad \overline{B(s, \xi)} = \frac{\Delta_{\overline{B}}}{\Delta}; \\ \Delta_A &= -\Omega^{LF} \frac{e^{hP/\alpha} e^{hS/\beta}}{\alpha \beta^3} (q_2 e^{-hP/\alpha} e^{-hS/\beta} - q_1 q_3 e^{-2hS/\beta} + q_1 q_4); \\ \Delta_{\overline{A}} &= -\Omega^{LF} \frac{e^{hP/\alpha} e^{hS/\beta}}{\alpha \beta^3} (q_1 q_4 e^{-2hP/\alpha} e^{-2hS/\beta} - q_1 q_3 e^{-2hP/\alpha} + e^{-2hP/\alpha} e^{hS/\beta}); \\ \Delta_B &= -\frac{2i}{\alpha^2 \beta^2} \Omega^{LF} P \xi e^{hP/\alpha} e^{hS/\beta} (\alpha q_1 e^{-hP/\alpha} e^{-hS/\beta} - \beta q_3 e^{-2hP/\alpha} - \beta q_4); \\ \Delta_{\overline{B}} &= -\frac{2i}{\alpha^2 \beta^2} \Omega^{LF} P \xi e^{hP/\alpha} e^{hS/\beta} (\alpha q_1 e^{-hP/\alpha} e^{-hS/\beta} - \beta q_3 e^{-2hS/\beta} - \beta q_4 e^{-2hP/\alpha} e^{-2hS/\beta}); \quad (2.3) \\ \Delta &= D e^{hP/\alpha} e^{hS/\beta} \left\{ 1 + \left[ a (e^{-hS/\beta} + e^{-hP/\alpha}) + c e^{-hP/\alpha} e^{-hS/\beta} + e^{-2hP/\alpha} e^{-2hS/\beta} \right] \right\}; \\ a &= -\frac{q_3}{q_4} \frac{\alpha q_1^2 + \beta q_2}{\alpha q_1^2 - \beta q_2}; \quad c = \frac{4 \alpha q_1 q_2}{q_4 (\alpha q_1^2 - \beta q_2)}; \quad D = -\frac{q_4 (\alpha q_1^2 - \beta q_2)}{\alpha^4 \beta^3}; \\ q_1 &= s^2 + 2 \beta^2 \xi^2; \quad q_2 = 4 \beta^2 \xi^2 P S; \quad q_3 = \alpha \beta \xi^2 + P S; \quad q_4 = \alpha \beta \xi^2 - P S. \end{aligned}$$

Взаимодействие порожденных действующей нагрузкой волн с граничными поверхностями слоя обуславливает появление многократно отраженных волн в нем. При этом падающая волна одного типа при каждом взаимодействии с границей порождает отраженные волны обоих типов. Таким образом, первично порожденные действующей нагрузкой продольно поляризованная и поперечно поляризованная волны, отражаясь от границы  $z = h$ , обуславливают появление четырех отраженных волн, которые, взаимодействуя с границей  $z = 0$ , порождают восемь отраженных волн второй очереди, и этот процесс при отсутствии потерь может продолжаться бесконечно долго. Построить решение в пространстве оригиналов для произвольного количества отражений в выбранной формулировке граничной задачи не представляется возможным ввиду существенной громоздкости выражений.

Для получения решения задачи в обозримом виде, представим функцию  $\sigma_{zz}^{LF}$  из (2.2) в виде ряда по отраженным волнам в упругом слое, для чего разложим функцию  $1/\Delta$  из (2.3) в бесконечный степенной ряд вида  $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots$ , имея в виду, что выражение в квадратных скобках в выражении  $\Delta$  существенно меньше 1 при больших значениях параметра  $s$ , что обеспечивает сходимость указанного разложения. Такой ряд может быть формально записан в виде

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R(P, S, s, \xi, n) e^{-N(n,z)hP/\alpha} e^{-M(n,z)hS/\beta}, \quad (2.4)$$

где  $N(n, z) = F_1(n)h \pm z$ ,  $M(n, z) = F_2(n)h \pm z$ , а  $F_1(n), F_2(n)$  — некоторые функции  $n$ , принимающие целочисленные значения. Ограничивая рассмотрение задачи конечным интервалом времени, бесконечный ряд (2.4) заменяем конечной суммой от 0 до  $N$ , где  $N$  — число отражений, учитываемых в решении. Оригинал такой суммы представляет собой точное решение задачи на интервале времени, безразмерная величина которого есть  $[0, N]$ .

Как показывает опыт решения подобных по постановке задач со смешанными граничными условиями [15], характерные особенности волновых процессов (при конечных временах взаимодействия) обнаруживаются уже на интервале времени  $0 \leq t \leq 4$ . Напомним, что в используемых безразмерных обозначениях волна расширения проходит за единицу безразмерного времени толщину упругого слоя  $h$  и, таким образом, на рассматриваемом интервале времени волна расширения, как головная волна, претерпевает три отражения.

Из (2.2) – (2.4) получаем следующее выражение для искомого напряжения  $\sigma_{zz}^{LF}$ :

$$\sigma_{zz}^{LF} = \Omega^{LF} R^{LF}(s, \xi), \quad (2.5)$$

где введены такие обозначения:

$$\begin{aligned} R^{LF}(s, \xi) = & R_1^{LF} e^{-\frac{z}{\alpha}P} + R_2^{LF} e^{-\frac{z}{\beta}S} + \\ & + \left( R_3^{LF} e^{-\frac{2h-z}{\alpha}P} + R_4^{LF} e^{-\frac{2h-z}{\beta}S} + R_5^{LF} e^{-\frac{h-z}{\alpha}P} e^{-\frac{h}{\beta}S} + R_6^{LF} e^{-\frac{h-z}{\beta}S} e^{-\frac{h}{\alpha}P} \right) + \\ & + \left[ R_7^{LF} e^{-\frac{h}{\alpha}P} e^{-\frac{h+z}{\beta}S} + R_8^{LF} e^{-\frac{h}{\beta}S} e^{-\frac{h+z}{\alpha}P} + R_9^{LF} e^{-\frac{2h}{\alpha}P} e^{-\frac{z}{\beta}S} + \right. \\ & + R_{10}^{LF} e^{-\frac{2h}{\beta}S} e^{-\frac{z}{\alpha}P} + R_{11}^{LF} e^{-\frac{2h+z}{\alpha}P} + R_{12}^{LF} e^{-\frac{2h+z}{\beta}S} + R_{13}^{LF} e^{-\frac{3h}{\alpha}P} e^{-\frac{h-z}{\beta}S} + \\ & \left. + R_{14}^{LF} e^{-\frac{3h-z}{\alpha}P} e^{-\frac{h}{\beta}S} + R_{15}^{LF} e^{-\frac{2h}{\alpha}P} e^{-\frac{2h-z}{\beta}S} + R_{16}^{LF} e^{-\frac{4h-z}{\alpha}P} + R_{17}^{LF} e^{-\frac{4h+z}{\alpha}P} + R_{18}^{LF} e^{-\frac{4h}{\alpha}P} e^{-\frac{z}{\beta}S} \right]; \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$R_1^{LF} = \frac{\alpha q_1^2}{\alpha q_1^2 - \beta q_2}; R_2^{LF} = -\frac{\beta q_2}{\alpha q_1^2 - \beta q_2}; R_3^{LF} = -\alpha \frac{q_1^2}{q_4(\alpha q_1^2 - \beta q_2)};$$

$$R_4^{LF} = -\beta \frac{q_2 q_3}{q_4(\alpha q_1^2 - \beta q_2)}; R_5^{LF} = \alpha \frac{q_2 q_1}{q_4(\alpha q_1^2 - \beta q_2)}; R_6^{LF} = R_5^{LF};$$

$$R_7^{LF} = \alpha \frac{q_1 q_2 (\alpha q_1^2 + 3\beta q_2)}{q_4 (\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2}; R_8^{LF} = -\alpha \frac{q_1 q_2 (3\alpha q_1^2 + \beta q_2)}{q_4 (\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2};$$

$$R_9^{LF} = -2\alpha\beta \frac{q_1^2 q_2 q_3}{q_4 (\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2}; R_{10}^{LF} = R_9^{LF}; R_{11}^{LF} = \alpha \frac{q_1^2 q_3 (\alpha q_1^2 + \beta q_2)}{q_4 (\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2};$$

$$R_{12}^{LF} = -\beta \frac{q_2 q_3 (\alpha q_1^2 + \beta q_2)}{q_4 (\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2}; \quad R_{13}^{LF} = \alpha \frac{q_1 q_2 q_3}{q_4^2} \frac{\alpha q_1^2 + \beta q_2}{(\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2};$$

$$R_{14}^{LF} = \alpha \frac{q_1 q_2 q_3}{q_4^2} \frac{5\alpha q_1^2 + \beta q_2}{(\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2}; \quad R_{15}^{LF} = -\frac{q_2}{q_4^2} \frac{\beta q_4^2 (\alpha q_1^2 - \beta q_2) + 4\alpha^2 q_1^2 q_2 + \beta q_3^2 (\alpha q_1^2 + \beta q_2)}{(\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2};$$

$$R_{16}^{LF} = -R_{13}^{LF}; \quad R_{17}^{LF} = \alpha \frac{(q_1 q_2 q_3)^2 (\alpha q_1^2 + \beta q_2)^2}{q_4^2 (\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2}; \quad R_{18}^{LF} = -\beta \frac{\alpha q_1^2 + \beta q_2}{(\alpha q_1^2 - \beta q_2)^2}.$$

Как будет показано в следующем пункте, в процессе волнообразования в упругом слое каждое слагаемое в выражении  $R^{LF}(s, \xi)$  отвечает определенной волне: первые два члена, содержащие  $R_1^{LF}, R_2^{LF}$ , отвечают расходящимся волнам, порожденным действующей нагрузкой; выражение в круглых скобках, содержащее  $R_3^{LF} - R_6^{LF}$ , соответствует первым отражениям от нижней грани слоя; выражение в квадратных скобках со слагаемыми  $R_7^{LF} - R_{12}^{LF}$  – отражениям от верхней границы слоя, а второму отражению от нижней границы отвечают слагаемые  $R_{13}^{LF} - R_{18}^{LF}$ . Таким образом, оригинал выражения (2.5) представляет искомое напряжение на интервале времени  $[0, 4]$ , в течение которого головная волна расширения проходит расстояние в 4 толщины слоя. Отметим, что все функции  $R_i^{LF}(s, \xi)$  ( $i = 1, \dots, 18$ ) – однородны по переменным  $s, \xi$ .

Переход в пространство оригиналов для функции  $\sigma_{zz}^{LF}(s, \xi, z)$  реализуем при помощи метода совместного обращения интегральных преобразований [3, 9] для однородных по переменным  $s, \xi$  функций. Эта процедура упрощается, если изображение функции, задающей действующую нагрузку (функция  $\Omega^{LF}(s, \xi)$ ), также являлось однородной функцией параметров интегральных преобразований. В частности, этому условию удовлетворяет нагрузка, внезапно возникающая при  $t = 0$  и распространяющаяся с постоянной скоростью вдоль поверхности  $z = 0$ :

$$\Omega(t, x) = \Omega_0 H(kt - |x|). \quad (2.7)$$

Ее изображение  $\Omega^{LF}(s, \xi)$  имеет вид

$$\Omega^{LF}(s, \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Omega_0 \frac{k}{s^2 + k^2 \xi^2}. \quad (2.8)$$

Здесь и ниже  $H(t)$  обозначает единичную функцию Хевисайда.

### §3. Обращение интегральных преобразований.

Выражение (2.6) содержит слагаемые, у которых в качестве множителя при дробно-рациональных функциях фигурируют одна или две экспоненциальные функции с показателем степени, содержащим радикал  $P = \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}$  или  $S = \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}$ . Представим такое слагаемое в общем виде

$$S_i^{LF}(s, \xi, z) = R_i^{LF}(s, \xi) e^{-N \sqrt{\frac{s^2 + \xi^2}{\alpha^2 + \xi^2}}} e^{-M \sqrt{\frac{s^2 + \xi^2}{\beta^2 + \xi^2}}} \quad (i = 1, \dots, 18). \quad (3.1)$$

Здесь  $N = nh \pm z$ ,  $M = mh \pm z$ ;  $m = 0, \dots, 2$ ,  $n = 0, \dots, 4$ .

Произведём совместное обращение интегральных преобразований для функции

$$\sigma_i^{LF}(s, \xi, z) = \Omega^{LF}(s, \xi) S_i^{LF}(s, x, z). \quad (3.2)$$

С этой целью оригинал функции  $\sigma_j^{LF}(s, \xi, z)$  представим в виде обращения преобразования Фурье [6]

$$\sigma_j(t, x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_j^F(t, \xi, z) e^{i\xi x} d\xi. \quad (3.3)$$

Введём далее в рассмотрение вспомогательную функцию  $U(t, x, z; \gamma)$  следующего вида:

$$U(t, x, z; \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_j^F(t, \xi, z) e^{-\gamma|\xi|} e^{i\xi x} d\xi. \quad (3.4)$$

Здесь  $\gamma$  – некоторый действительный произвольный положительный параметр. Очевидно, что

$$\sigma_j(t, x, z) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} U(t, x, z; \gamma). \quad (3.5)$$

Функция  $\sigma_j^F(t, \xi, z)$  является четной по переменной  $\xi$ , поэтому  $U(t, x, z; \gamma)$  можно представить в виде следующей суммы:

$$U(t, x, z; \gamma) = U_1(t, x, z; \gamma) + U_2(t, x, z; \gamma), \quad (3.6)$$

где введены обозначения

$$U_1(t, x, z; \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma_j^F(t, \xi, z) e^{-s_1 \xi} d\xi; \quad U_2(t, x, z; \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma_j^F(t, \xi, z) e^{-s_2 \xi} d\xi;$$

$$s_1 = \gamma + ix, \quad s_2 = \gamma - ix.$$

Подвергнем функцию  $U_1$  интегральному преобразованию Лапласа по переменной  $t$ :

$$U_1^L(s, x, z; \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{\infty} \sigma_j^F(t, \xi, z) e^{-s_1 \xi} d\xi dt. \quad (3.7)$$

В силу выполнения условия  $\operatorname{Re} s_1 = \operatorname{Re}(\gamma + ix) > 0$  интеграл по  $\xi$  сходится, поэтому законно изменение порядков интегрирований в (3.7):

$$U_1^L(s, x, z; \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-s_1 \xi} d\xi \int_0^{\infty} \sigma_j^F(t, \xi, z) e^{-st} dt. \quad (3.8)$$

Интеграл по  $t$  – прямое интегральное преобразование Лапласа по переменной  $t$ : функции  $\sigma_j^F(t, \xi, z)$  [6], поэтому (3.8) можно представить в виде

$$U_1^L(s, x, z; \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma_j^{LF}(s, \xi, z) e^{-s_1 \xi} d\xi. \quad (3.9)$$

Рассуждая аналогично, можно записать

$$U_2^L(s, x, z; \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma_j^{LF}(s, \xi, z) e^{-s_2 \xi} d\xi. \quad (3.10)$$

Если в (3.9), (3.10) подставить функцию  $\sigma_j^{LF}(s, \xi, z)$  из (2.6) и выполнить замену переменных  $\xi = s\eta$ , получим

$$U_l^L(s, x, z; \gamma) = \frac{2\Omega_0 k}{\pi} \int_0^\infty \frac{R_j(1, \eta)}{s(1+k^2\eta^2)} e^{-s\left(N\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\eta^2}+M\sqrt{\frac{1}{\beta^2}+\eta^2+s\eta}\right)} d\eta \quad (l=1, 2). \quad (3.11)$$

Здесь запись  $R_j(1, \eta)$  обозначает функцию  $R_j^{LF}(s, \xi)$  из (2.6), у которой параметр  $s$  заменён на 1, а параметр  $\xi$  на  $\eta$ ; функции  $q_1, \dots, q_4$  теперь имеют следующий вид:

$$q_1 = 1 + 2\beta^2\eta^2; \quad q_2 = 4\beta^2\eta^2 g_{\alpha\beta}(\eta); \quad q_3 = \alpha\beta\eta^2 + g_{\alpha\beta}(\eta);$$

$$q_4 = \alpha\beta\eta^2 - g_{\alpha\beta}(\eta); \quad g_{\alpha\beta}(\eta) = \sqrt{(1+\alpha^2\eta^2)(1+\beta^2\eta^2)}.$$

В (3.11) выполним инверсию преобразования Лапласа под знаком интеграла, используя табличное соотношение [6]  $L^{-1}[e^{-sb}/s] = H(t-b)$ . Получим

$$U_l(t, x, z; \gamma) = \frac{2\Omega_0 k}{\pi} H\left(t - \left(\frac{N}{\alpha} + \frac{M}{\beta}\right)\right) \int_0^{\eta_l^*(t, z, s_l)} \frac{R_j(1, \eta)}{1+k^2\eta^2} d\eta \quad (l=1, 2). \quad (3.12)$$

Теперь в силу (3.5) и (3.6) запишем представление для искомого напряжения  $\sigma_j(t, x, z)$

$$\sigma_j(t, x, z) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sum_{l=1}^2 U_l(t, x, z; \gamma). \quad (3.13)$$

Функции  $\eta_l^*(t, z, s_l)$ ,  $l=1, 2$  при  $\gamma=0$  можно определить из решения следующих уравнений:

$$t - \left( N\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \eta^2} + M\sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \eta^2} + \delta_l i x \eta \right) = 0; \quad \delta_l = \begin{cases} 1, & l=1 \\ -1, & l=2 \end{cases}. \quad (3.14)$$

После выполнения алгебраических преобразований в левой части (3.14) получим следующие полиномы 4-ой степени по переменной  $\eta$  с комплекснозначными коэффициентами:

$$P_4^{(l)}(\eta) = \eta^4 + d_3^{(l)}\eta^3 + d_2^{(l)}\eta^2 + d_1^{(l)}\eta + d_0^{(l)} \quad (l=1, 2), \quad (3.15)$$

где приняты такие обозначения:

$$d_3^{(1)} = i \frac{2xt(2x^2 - b_1(z))}{\bar{\Delta}}; \quad d_3^{(2)} = -d_3^{(1)}; \quad d_2^{(1)} = d_2^{(2)} = \frac{b_0(z) + b_1(z)t^2 - (6t + c_1(z))x^2}{\bar{\Delta}};$$

$$d_1^{(1)} = -i \frac{2tx(c_1(z) + 2t^2)}{\bar{\Delta}}; \quad d_1^{(2)} = -d_1^{(1)}; \quad d_0^{(1)} = d_0^{(2)} = \frac{t^4 + c_1(z)t^2 + c_0(z)}{\bar{\Delta}};$$

$$\bar{\Delta} = (N^2 - M^2)^2 + x^2(x^2 - b_1(z)); \quad b_0(z) = -2 \frac{(M^2 - N^2)((\beta N)^2 - (\alpha M)^2)}{(\alpha\beta)^2};$$

$$b_1(z) = -2(M^2 + N^2); \quad c_0(z) = \frac{((\alpha M)^2 - (\beta N)^2)^2}{(\alpha\beta)^4}; \quad c_1(z) = -2 \frac{(\alpha M)^2 + (\beta N)^2}{(\alpha\beta)^2}.$$



Задача определения верхних пределов интегрирования в (3.12) сводится к определению корней полиномов  $P_4^{(l)}(\eta)$ . Заметим, что  $P_4^{(1)}(\eta)$  и  $P_4^{(2)}(\eta)$  не имеют общих корней, т.к. их наибольший общий делитель равен 1. Добавим, что единственной изолированной особой точкой для комплекснозначной функции  $P_4^l(\eta)$ ,  $l = 1, 2$ , является бесконечно-удалённая точка  $\eta \rightarrow \infty$ . Поэтому в окрестности этой точки функция  $P_4^l(\eta)$ ,  $l = 1, 2$  является аналитической функцией, для которой справедлив принцип аналитического продолжения. Вследствие этого действительные части искомых корней функции  $P_4^l(\eta)$ ,  $l = 1, 2$  при произвольном  $x$  единственным образом определяются за счёт определения действительных корней функции  $P_4^l(\eta)$ ,  $l = 1, 2$ , при  $x = 0$ .

#### §4. Обращение на оси симметрии.

Покажем, что действительные корни функции  $P_4^l(\eta)$ ,  $l = 1, 2$  при  $x = 0$  можно определить в явном виде и укажем критерий отбора действительного корня, удовлетворяющего условиям данной задачи. Ограничимся определением нормального напряжения  $\sigma_{zz}$  на оси  $z$ . Верхний предел интегрирования  $\eta^*(t, z)$  в (3.12) в этом случае можно определить из уравнения (3.14), в котором следует положить  $x = 0$ , так что уравнение примет вид

$$t - \left( N \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \eta^2} + M \sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \eta^2} \right) = 0. \quad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1) сводится к определению корней следующего биквадратного полинома  $P_4(\eta)$ :

$$P_4(\eta) = a\eta^4 + b\eta^2 + c; \quad b = -2 \frac{(M^2 - N^2)(N^2\beta^2 - M^2\alpha^2) + (t\alpha\beta)^2(M^2 + N^2)}{(\alpha\beta)^2};$$

$$a = (M^2 - N^2)^2; \quad c = \frac{((\alpha M + \beta N)^2 - (\alpha\beta t)^2)((\alpha M - \beta N)^2 - (\alpha\beta t)^2)}{(\alpha\beta)^4}. \quad (4.2)$$

Корни полинома (4.2) имеют вид

$$(\eta_{1,2}^*(t, z))^2 = \frac{1}{(\alpha\beta(N^2 - M^2))^2} (M^2 - N^2)((\beta N)^2 - (\alpha M)^2) + (\alpha\beta t)^2(M^2 + N^2) \pm$$

$$\pm 2\alpha\beta MNt \sqrt{(\alpha\beta t)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)(N^2 - M^2)}. \quad (4.3)$$

Для выбора знака перед радикалом в выражении (4.3) воспользуемся следующими рассуждениями. Если принять в (4.1)  $\eta = 0$ , получим

$$t = N \sqrt{\frac{1}{\alpha}} + M \sqrt{\frac{1}{\beta}}. \quad (4.4)$$

При подстановке (4.4) в (4.3) следует получить  $\eta^*(t, z) = 0$ ; этому условию удовлетворяет знак минус перед радикалом в (4.3).

С учётом вышеизложенного выражение для искомого нормального напряжения на оси  $z$  окончательно примет следующий вид:

$$\sigma_{zz}(t, x = 0, z) = \frac{2\Omega_0 k}{\pi} \sum_{j=1}^{18} H \left( t - \left( \frac{N_j(z)}{\alpha} + \frac{M_j(z)}{\beta} \right) \right) \int_0^{\eta^*(t,z)} \frac{R_j(1, \eta)}{1 + k^2 \eta^2} d\eta. \quad (4.5)$$

Вид функций  $M_j(z)$  и  $N_j(z)$  в зависимости от значения индекса суммирования  $j$  приведен ниже в таблице.

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M_j$	0	$z$	0	$2h-z$	$h$	$h-z$	$h+z$	$h$	$z$
$N_j$	$z$	0	$2h-z$	0	$h-z$	$h$	$h$	$h+z$	$2h$
$j$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$M_j$	$2h$	0	$2h+z$	$h-z$	$h$	$2h-z$	0	0	$z$
$N_j$	$z$	$2h+z$	0	$3h$	$3h-z$	$2h$	$4h-z$	$4h+z$	$4h$

Как известно, упругая волна одного типа при взаимодействии с плоской границей в общем случае порождает отраженные волны обоих типов – расширения и сдвига; это происходит при каждом последующем отражении. Вид слагаемых в выражении (4.5) позволяет проследить историю происходящих отражений. Аргумент функции Хевисайда определяет момент появления отраженной волны в текущей точке  $z$ , а слагаемые  $N_j(z) / \alpha$ ,  $M_j(z) / \beta$  показывают – сколько и каких трансформаций претерпела каждая конкретная волна перед этим.

**§5. Числовые результаты.** Вычисления нормального напряжения  $\sigma_{zz}(t, 0, z)$  для различных значений параметра нагрузки  $k$  выполнены при следующих исходных данных:

$$\alpha = 1; \beta = 0,5; \Omega_0 = 1; h = 1, k = 0,1; 0,5; 1; 2z = [0, 1]; t = [0, 4]. \quad (5.1)$$

При численном интегрировании в (4.5) использована квадратурная формула трапеций. Точность вычислений определена путём сравнения результатов при различных значениях шага интегрирования.

Ниже каждый рисунок с индексом (1) (расположен слева) содержит графики нормального напряжения  $\sigma_{zz}(t, 0, z)$  в упругом слое при исходных данных (5.1), и нестационарной нагрузке (2.7) для подобной по постановке задачи со смешанными граничными условиями (на верхней грани задана нормальная нагрузка и отсутствует касательное перемещение, на нижней грани отсутствует нормальное перемещение и касательное напряжение). Эти результаты получены в работе [15]. Рисунки с индексом (2) (расположены справа) воспроизводят результаты вычислений данной работы.

Распределение напряжения  $\sigma_{zz}(t, 0, z)$  вдоль оси  $z$  в фиксированные моменты времени  $t = 0,5; t = 1; t = 2; t = 3; t = 4$  для различных значений скорости распространения нагрузки  $k$  представлены на рис. 1 – 4.

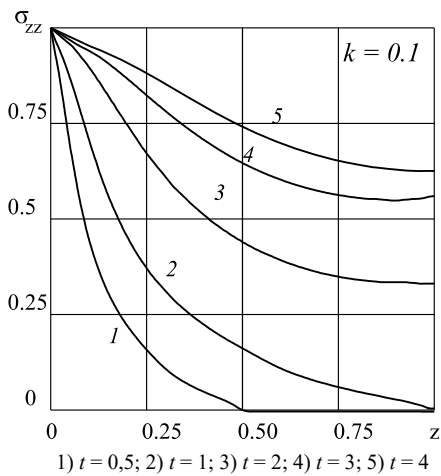


Рис. 1.1

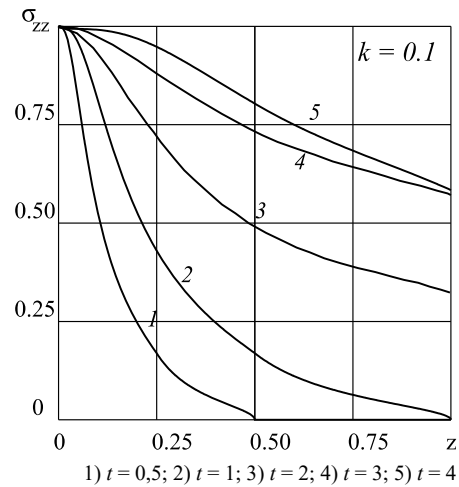
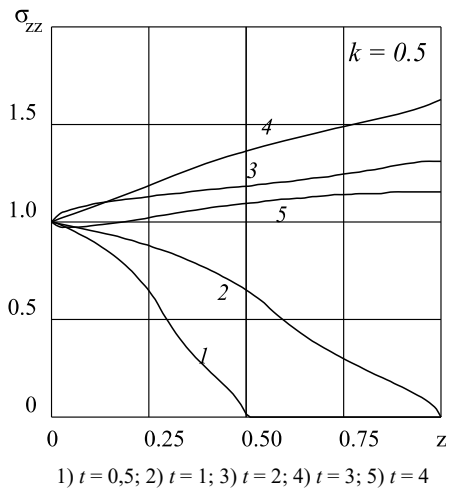
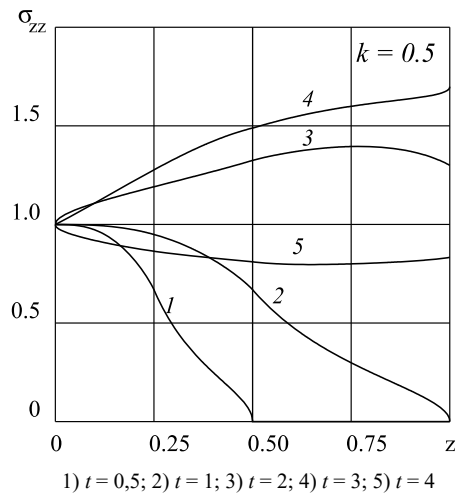


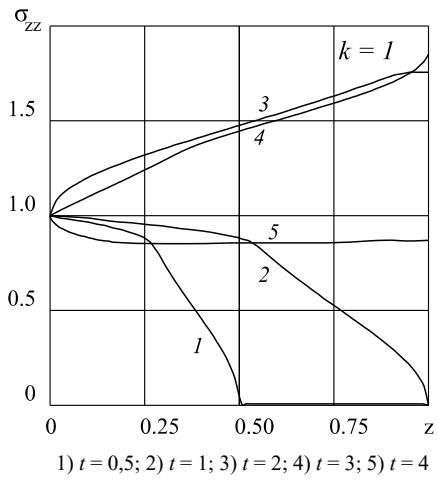
Рис. 1.2



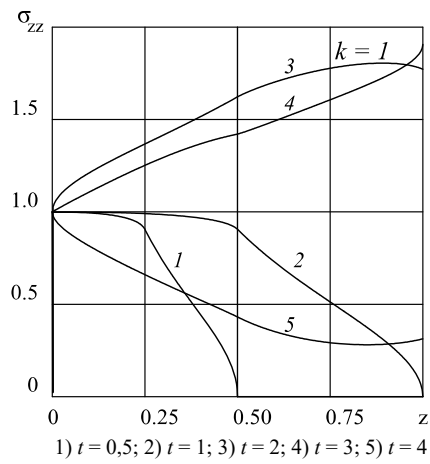
*Puc. 2.1*



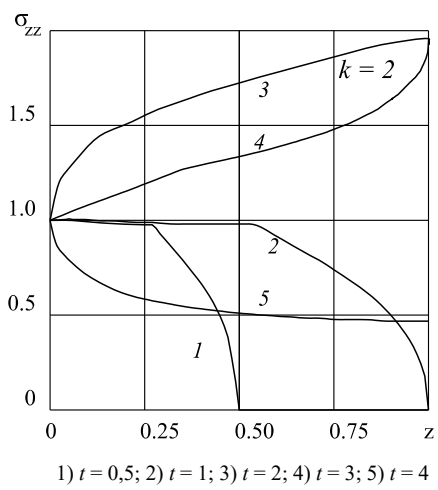
*Puc. 2.2*



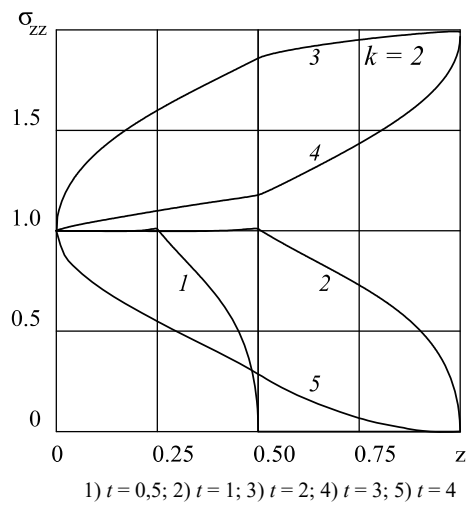
*Puc. 3.1*



*Puc. 3.2*



*Puc. 4.1*



*Puc. 4.2*

Развитие напряжения во времени в фиксированных точках оси  $z$  проиллюстрировано рис. 5 – 8.

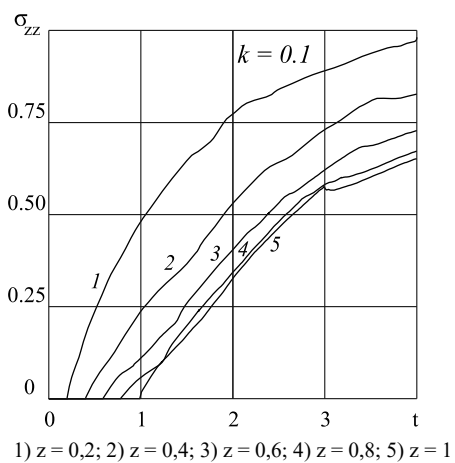


Рис. 5.1

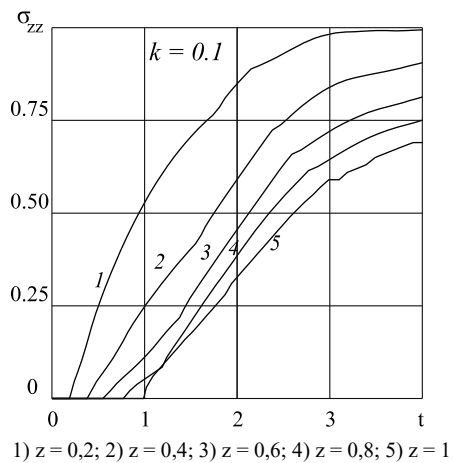


Рис. 5.2

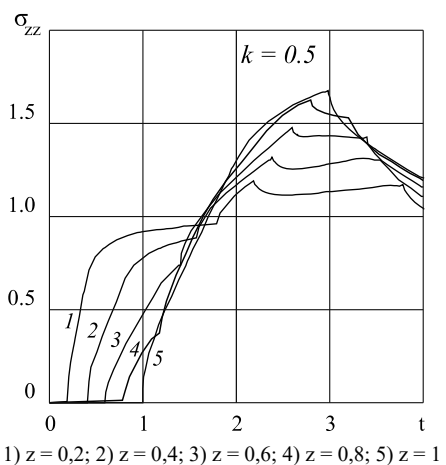


Рис. 6.1

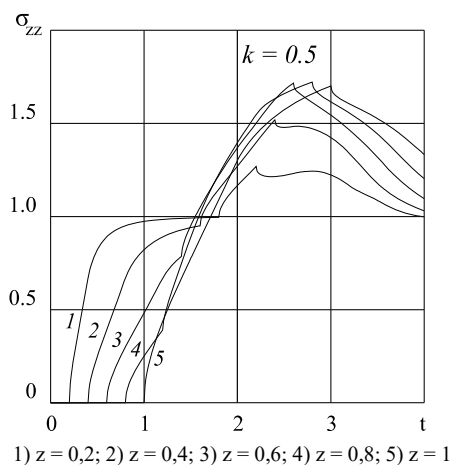


Рис. 6.2

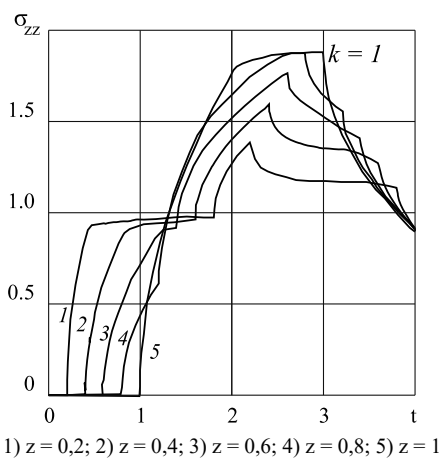


Рис. 7.1

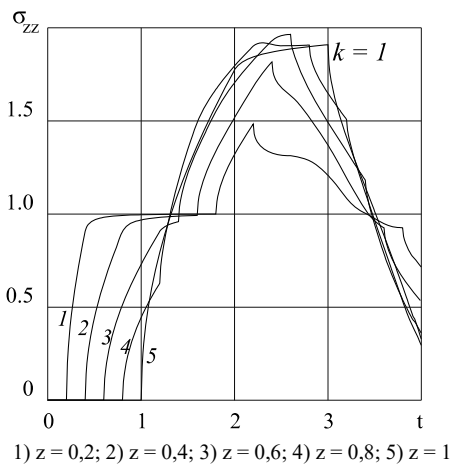


Рис. 7.2

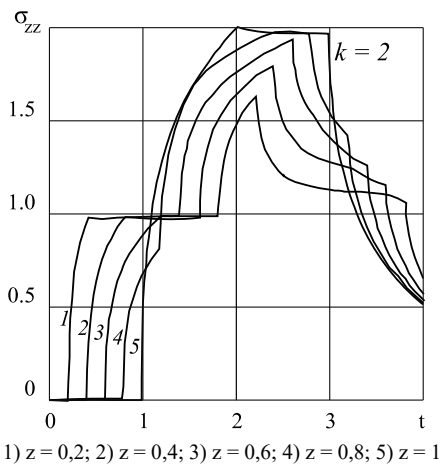


Рис. 8.1

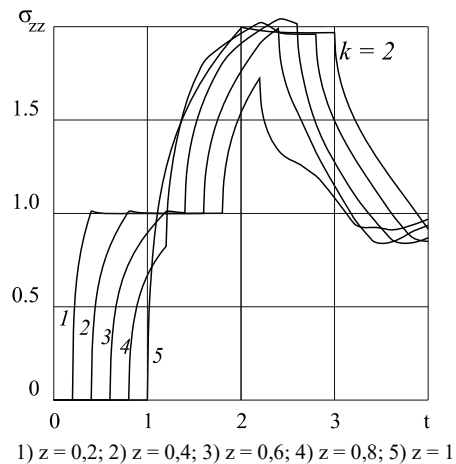


Рис. 8.2

Сравнение результатов данной работы и публикации [15] свидетельствует о том, что в осевом направлении нормальные напряжения, вычисленные для этих двух граничных задач, мало отличаются, и, по-видимому, результаты работы [15] могут с достаточной достоверностью быть использованы и при значительном числе учитываемых отражений. Что касается характера распределения напряжений в направлении оси  $x$ , то, очевидно, сделанное выше утверждение не будет справедливым, ибо смешанные граничные условия работы [15] исключают появление поверхностных волн, влияние которых на напряженное состояние может быть существенным.

**РЕЗЮМЕ.** Побудовано аналітичний розв'язок плоскої задачі про дію нестационарного навантаження на поверхню пружного шару. Застосовано інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є. Розв'язок побудовано у вигляді ряду по відбитим хвилям, в якому при обчисленнях утримується скінченна кількість членів. Перехід в простір оригіналів проведено в результаті спільного обернення інтегральних перетворень. Числові розрахунки виконані для навантаження, що раптово виникає на поверхні шару і поширюється з постійною швидкістю. Нормальне напруження на осі симетрії обчислене для інтервалу часу, протягом якого головна хвиля розширення чотири рази проходить товщину шару. Наведено результати порівняння з аналогічною задачею при змішаних граничних умовах.

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
3. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л: Судостроение, 1972. – 376с.
4. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: Elsevier, 1975. – 425 p.
5. Bakker M.C., Kooij M.B.J., Verweij M.D. A knife-edge load traveling on the surface of an elastic half-space // Wave Motion. – 2012. – 49. – P. 165 – 180.
6. Bateman H., Erdelyi A. Tables of Integral Transforms [in 2 vol.]. Vol. 1. – NY.: McGraw-Hill book Com. Inc. – 1954. – 344 p.
7. Brekhovskikh L.M. Waves in Layered Media. – Appl. Mathematics and Mechanics. Vol. 16. – NY.: Acad. Press, 1980. – P. 503.
8. Bresse L.F., Hutchins D.A. Transient generation of elastic waves in solids by a disk-shaped normal force source // J. Acoust. Soc. Amer. – 1989. – 86, N. 2. – P. 810 – 817.
9. Cagniard L.P.E., Flinn E.A., Dix C.H. Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. – NY.: McGraw-Hill, 1962. – 282p.
10. De A., Roy A. Transient response of an elastic half space to normal pressure acting over a circular area on an inclined plane // J. Eng. Math. – 2012. – 74. – P.119 – 141.
11. De Hoop A.T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // Appl. Sci. Res. Sect B. – 1960. – 8. – P. 349 – 356.

12. *De Hoop A.T.* The moving-load problem in soil dynamics – the vertical displacement approximation // *Wave Motion*. – 2002. – **36**. – P. 335 – 346.
13. *Ewing W. M., Jardetsky W.S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. – NY.: McGraw-Hill, 1957. – 380 p.
14. *Kubenko V.D.* Non-stationary stress state of an elastic layer at the mixed boundary conditions // *ZAMM*. – 2016. – **96**, N 12. – P. 1442 – 1456.
15. *Kubenko V.D.* Nonstationary Deformation of an Elastic Layer with Mixed Boundary Conditions // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 6. – P. 563 – 580.
16. *Kubenko V.D., Marchenko T.A.* Indentation of a Rigid Blunt Indenter into an Elastic Layer: a Plane Problem // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 3. – P. 286 – 295.
17. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // *Philos. Trans. Roy. Soc. – London, Ser. A.* – 1904. – **203**. – P. 1 – 42.
18. *Laturelle F.G.* The stresses produced in an elastic half-space by a normal step loading over a circular area analytical and numerical results // *Wave Motion*. – 1990. – **12**. – P. 107 – 127.
19. *Miklowitz J.* Theory of elastic waves and waveguides. – NY.: North-Holl. Publ. Comp., 1978. – 618 p.
20. *Pekeris C.L.* The seismic surface pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* – 1955. – 41, N 7. – P. 469 – 480.
21. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Inverse Laplace Transforms. Integrals and Series. V. 5. – NY.: Gordon and Breach, 1992. – 481 p.
22. *Roy A., De A.* Exact solution to surface displacement associated with sources distributed on an inclined plane // *Int. J. Eng. Sci. and Techn.* – 2011. – **3**. – P.137 – 145.
23. *Stovas A., Roganov Y.* Acoustic Waves in Layered Media - From Theory to Seismic Applications / in: *Waves in Fluids and Solids*, Vila R.P. (Ed.). – London: InTech., 2011. – 52p.
24. *Verruijt A.* An Introduction to Soil Dynamics. – London: Springer, 2010. – 433 p.

Поступила 07.11.2017

Утверждена в печать 22.11.2018

---