

В. С. Кирилук, О. И. Левчук

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНОГО  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ТРЕХОСНЫМ  
ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; kirilyuk\_v@ukr.net*

**Abstract.** A problem on the electrostress state in an orthotropic piezoelectric body under homogeneous forces and electric loads is considered when this body contains a triaxial ellipsoidal inclusion. A solution of the problem is obtained by means of the Eshelby's method of equivalent inclusion generalized for the case of a piezoelectric orthotropic space. An approach approbation for the case of the spheroidal cavity in transversally isotropic body when the revolution axis coincides with the symmetry axis and the exact solution of the problem is known, confirms its effectiveness. The numerical studies are carried out. The stress distribution in body along of the surface of triaxial ellipsoidal cavity under tension is studied.

**Key words:** orthotropic piezoelectric body, triaxial ellipsoidal inclusion, generalized method of equivalent inclusion, stress distribution.

**Введение.**

Широкое использование пьезоэлектрических материалов в различных отраслях промышленности при создании элементов измерительных приборов (датчиков) или преобразователей энергии приводит к необходимости изучения и анализа распределения напряжений в электроупругих телах вблизи концентраторов напряжений. О значительно возросшем интересе к исследованиям связанных силовых и электрических полей в пьезоэлектрических телах свидетельствует увеличение количества научных публикаций в этой области. Нахождению напряженного состояния в электроупругих телах, в том числе с концентраторами напряжений, посвящены работы [1 – 24] и др. Отметим, что в случае трансверсально-изотропной электроупругой среды со сфероидальной полостью или включением задача существенно упрощается, и при ориентации оси вращения концентратора напряжений вдоль оси симметрии трансверсально-изотропного электроупругого материала в ряде случаев удается получить точное решение задачи [7, 16, 18, 20]. При построении решения задачи в упомянутых случаях используется общее представление решений однородной системы связанных уравнений электроупругости для трансверсально-изотропного тела [19, 22] или применяется обобщение тензора Эшелби для электроупругого материала [4, 9], процедура вычисления которого при такой ориентации и форме включения существенно упрощается.

В данной работе исследована более сложная задача электроупругости, когда трехосное эллипсоидальное включение, имеющее другие, отличные от свойств основного материала характеристики (параметры), расположено в ортотропном электроупругом материале. При этом предполагается, что оси трехосного включения ориентированы вдоль осей симметрии ортотропного электроупругого материала. Для получения решения задачи применен подход, основанный на обобщении на случай ортотропного электроупругого материала метода эквивалентного включения Эшелби. Интегралы по

поверхности включения, полученные при решении задачи, вычисляются по квадратным формулам Гаусса. Показано, что в частном случае (для сфероидального включения в электроупругом трансверсально-изотропном материале) имеет место совпадение результатов числовых исследований с данными других авторов. Изучено распределение напряжений вдоль поверхности трехосного эллипсоидального включения в ортотропном электроупругом материале при растяжении.

### 1. Основные уравнения и постановка задачи.

Рассмотрим ортотропное электроупругое пространство, содержащее трехосное эллипсоидальное включение (неоднородность) с полуосями  $a_1, a_2, a_3$ , имеющее другие электроупругие свойства, отличные от свойств матрицы. Примем, что полуоси включения ориентированы вдоль главных осей симметрии (ортотропии) электроупругого материала. Предполагаем, что пьезоэлектрическая среда находится под действием однородных силовых и электрических полей. Наличие включения в материале, имеющем отличные от свойств матрицы электромеханические свойства, приводит к появлению концентрации силовых и электрических полей вблизи включения.

Система уравнений статики электроупругости принимает следующий вид:  
уравнения равновесия при отсутствии объемных сил

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

уравнения вынужденной электростатики

$$D_{i,i} = 0; E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

уравнения состояния

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} + e_{nij} \Psi_{,n}; \quad D_i = e_{imn} \varepsilon_{mn} - k_{in} \Psi_{,n}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$ ,  $\Psi$  – компоненты напряжений, деформаций, перемещений, электрических перемещений (индукции), электрического поля и электрического потенциала, соответственно. Также использованы обозначения следующих тензоров:  $C_{ijmn}$ ,  $e_{imn}$ ,  $k_{ij}$  – тензоры упругих модулей, пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей. Первый из приведенных тензоров измеряется при постоянном значении электрического поля, а два последних – при постоянной деформации. Для случая ортотропного электроупругого материала его упругие свойства описываются девятью независимыми постоянными  $c_{11}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{55}$ ,  $c_{66}$ ; пьезомодули – пятью независимыми величинами  $e_{15}$ ,  $e_{24}$ ,  $e_{31}$ ,  $e_{32}$ ,  $e_{33}$ ; диэлектрические проницаемости – тремя независимыми постоянными  $k_{11}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{33}$ . Компоненты записанных в выражениях (3) тензоров связаны с соответствующими независимыми постоянными следующим образом:

$$C_{1111} = c_{11}; \quad C_{2222} = c_{22}; \quad C_{3333} = c_{33}; \quad C_{1122} = C_{2211} = c_{12};$$

$$C_{1133} = C_{3311} = c_{13}; \quad C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; \quad C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \quad (4)$$

$$C_{3131} = C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; \quad C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}.$$

$$e_{113} = e_{131} = e_{15}; \quad e_{223} = e_{232} = e_{24}; \quad e_{311} = e_{31}; \quad e_{322} = e_{32}; \quad e_{333} = e_{33}; \quad k_{11}; \quad k_{22}; \quad k_{33}. \quad (5)$$

Остальные компоненты этих трех тензоров равны нулю.

Для описания напряженного и электрического состояний в материале с включением используем унифицированные обозначения [9], с помощью которых запишем в следующем виде компоненты перемещений и электрический потенциал:

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi, & M = 4; \end{cases} \quad (6)$$

*компоненты упругих деформаций и напряженностей электрического поля*

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi_{,n}, & M = 4; \end{cases} \quad (7)$$

*компоненты напряжений и электрических перемещений (электрической индукции)*

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3; \\ D_i, & J = 4. \end{cases} \quad (8)$$

Также для электроупругих модулей имеем –

$$E_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn}, & J, M = 1, 2, 3; \\ e_{nij}, & J = 1, 2, 3; M = 4; \\ e_{imn}, & J = 4; M = 1, 2, 3; \\ -k_{in}, & J, M = 4. \end{cases} \quad (9)$$

С помощью приведенных обозначений уравнения состояния (3) запишем в виде

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn} Z_{Mn}. \quad (10)$$

## 2. Метод решения.

Напряженное и электрическое состояние в ортотропном пьезоэлектрическом материале представим с помощью суперпозиции основного состояния и возмущенного, вызванного наличием эллипсоидального включения. Для нахождения возмущенного состояния воспользуемся схемой метода эквивалентного включения, обобщенной на случай электроупругости [4]. Согласно этой схеме уравнения эквивалентности в области включения (неоднородности) принимают вид

$$E_{iJKl}^1 (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl}) = E_{iJKl} (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl} - Z_{Kl}^*) \quad (\vec{x} \in \Omega), \quad (11)$$

где  $E_{iJKl}^1$ ,  $E_{iJKl}$  – электроупругие модули неоднородности (включения) и матрицы соответственно (для случая полости  $E_{iJKl}^1$  следует устремить к нулю);  $Z_{Kl}^*$  – значения «свободных» деформаций и значений напряженностей электрического поля, которые определяются из условий эквивалентности включения. Значения  $Z_{Kl}^0$  получаем по значениям напряжений и электрической индукции (электрических перемещений), заданных в электроупругом материале, с помощью соотношений  $\Sigma_{iJ}^0 = E_{iJKl} Z_{Kl}^0$ . Аналогично упругому случаю имеем

$$Z_{Mn} = S_{MnAb} Z_{Ab}^*, \quad (12)$$

где  $S_{MnAb}$  – пьезоэлектрический аналог тензора Эшелби, зависящий от геометрической формы включения и электроупругих свойств материала. Воспользовавшись Фурье-образом функции Грина для бесконечного электроупругого пространства, представим его в виде

$$S_{MnAb} = \frac{E_{iJAb}}{4\pi} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{mJm}(\vec{z}) + I_{nJm}(\vec{z})] d\theta d\eta_3, & m = M = 1, 2, 3; \\ \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{4Jm}(\vec{z})] d\theta d\eta_3, & M = 4, \end{cases} \quad (13)$$

где  $z_i = \eta_i / a_i$ ;  $\eta_1 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \cos \theta$ ;  $\eta_2 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \sin \theta$ . Кроме того, имеем  $I_{MJm} = z_i z_n K_{MJ}^{-1}(\vec{z})$ , где  $K_{MJ}^{-1}$  – обратная матрица к матрице  $K_{MJ} = z_i z_n E_{iMJn}$ .

Из соотношений (11) – (13) для определения неизвестных значений  $Z_{Kl}^*$  получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой зависят от двойных интегралов вида (13), которые не имеют каких-либо особенностей в области интегрирования.

Для нахождения напряженного состояния в ортотропном электроупругом материале с трехосным эллипсоидальным включением вначале следует по формулам (13) вычислить аналог тензора Эшелби  $S_{MnAb}$ , а затем определить из уравнений эквивалентности (11) значения  $Z_{Kl}^*$ . В данной статье вычисление компонентов  $S_{MnAb}$  проведено на основе квадратурных формул Гаусса. После получения значений  $Z_{Kl}^*$  определено электрическое и напряженное состояние внутри области включения. Для вычисления напряжений и параметров электрического поля в точках матрицы, примыкающих к эллипсоидальной границе включения, были использованы следующие формулы скачка напряжений при переходе через границу включения [9]:

$$[\Sigma_{ij}] = \Sigma_{ij}^{out} - \Sigma_{ij}^{in} = E_{iJKl} \{ -E_{pQMn} Z_{Mn}^* n_p n_l K_{QK}^{-1}(\vec{n}) + Z_{Kl}^* \}, \quad (14)$$

где  $n_i$  – компоненты внешней нормали к эллипсоидальной поверхности включения.

### 3. Анализ результатов численных исследований.

Для тестирования используемого подхода рассмотрим частный случай исследуемой задачи – случай сфероидальной полости, находящейся в электроупругом трансверсально-изотропном материале. При этом предполагаем, что ось вращения сфероида совпадает с осью симметрии материала. При такой ориентации осесимметричной полости в электроупругой среде в работе [20] получено точное решение задачи. Рассмотрим основное электрическое и напряженное состояния в пьезоэлектрическом материале согласно [20] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0; \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \\ \Psi^{(0)} &= 0; D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = 0; D_z^{(0)} = d_{31} \sigma_x^0, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $d_{31}$  – пьезоэлектрическая постоянная материала. В качестве электроупругого материала рассмотрим пьезокерамические материалы РХЕ-5 и ЦТС-19, свойства которых приведены в [1]. В результате вычислений, проведенных на основе используемого подхода для сжатых сфероидальных полостей, получаем совпадение результатов с данными работы [20], в которой для этого частного случая получено точное решение. Так, при одноосном растяжении и электрическом воздействии согласно формул (15) концентрация напряжений  $\sigma_x / \sigma_x^0$  и при отношении полуосей  $c/a = 0,5$  для пьезокерамики ЦТС-19 на поверхности полости достигает значений 1,418 (1,42) в вершине на оси Оу и 1,887 (1,89) – в вершине на оси Oz. В приведенных значениях (в круглых скобках) отражены данные работы [20]. Для материала РХЕ-5 при тех же геометрических параметрах полости и исходном состоянии (15) в вершине полости на оси Оу получаем значение  $\sigma_x / \sigma_x^0$ , равное 1,293 и (1,29) соответственно. Следовательно, те-

стирование подхода на частном случае рассматриваемой задачи – случае трансверсально-изотропной электроупругой среды со сжатой сфероидальной полостью, которая имеет точное решение, подтверждает его эффективность.

Исследуем напряженное состояние в среде с трехосной эллипсоидальной полостью при одноосном растяжении вдоль оси  $Oz$  (при нулевых значениях компонентов электрической индукции)

$$\begin{aligned} \sigma_z = \sigma_z^0; \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \\ D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = D_z^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

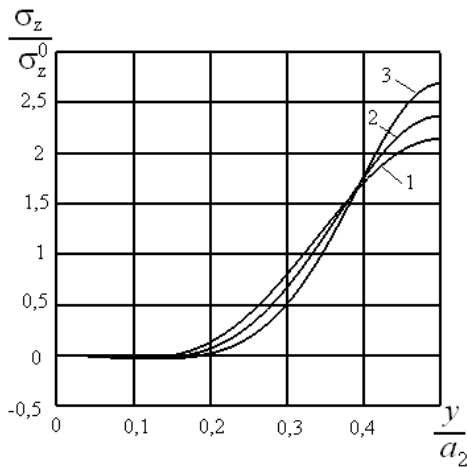


Рис. 1

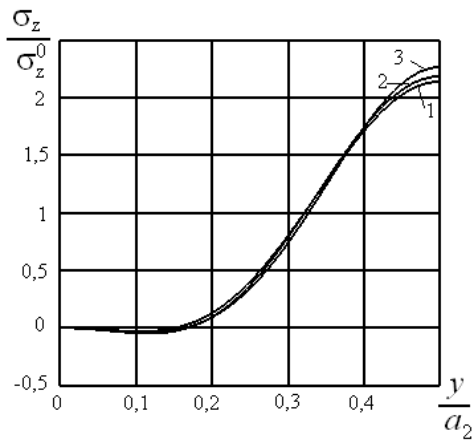


Рис. 2

В качестве электроупругого материала рассмотрим ортотропный электроупругий материал  $Ba_2NaNb_5O_{15}$ , свойства которого (всего 17 независимых электроупругих параметров) приведены в [3], а также пьезокерамические материалы PZT-4 [1] и PZT-7A [5], являющиеся трансверсально-изотропными по электроупругим свойствам (имеют 10 независимых электроупругих постоянных). На рис. 1 показано распределение напряжений  $\sigma_z / \sigma_z^0$  вдоль поверхности эллипсоидальной полости в сечении  $ZY$  (от вершины эллипсоида на оси  $Oz$  до его вершины на оси  $Oy$ ) для материала  $Ba_2NaNb_5O_{15}$ .

Линиям 1, 2, 3 на рис. 1 соответствуют одинаковые отношения двух полуосей эллипсоида  $a_2 / a_1 = 0,8$ , а отношение других полуосей изменялось и принимало следующие значения:  $a_3 / a_1 = 0,7; 0,6; 0,5$ . Видно, что при уменьшении отношения  $a_3 / a_1$  значение концентрации напряжений  $\sigma_z / \sigma_z^0$  увеличивается.

На рис. 2 приведено изменение напряжений  $\sigma_z / \sigma_z^0$  вдоль поверхности полости  $a_1 = 1; a_2 = 0,8; a_3 = 0,7$  в сечении  $ZY$  для электроупругих материалов  $Ba_2NaNb_5O_{15}$ , PZT-4 и PZT-7A (кривые 1, 2, 3 соответственно). В этом случае максимальные значения напряжений достигаются для материала PZT-7A, мини-

мальные – для материала  $Ba_2NaNb_5O_{15}$ .

Рассмотрим одноосное растяжение электроупругого материала вдоль оси  $Ox$ , соответствующее основному состоянию в материале с эллипсоидальной полостью

$$\sigma_x = \sigma_x^0; \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = D_z^{(0)} = 0. \quad (17)$$

На рис. 3, 4 показаны изменения напряжений  $\sigma_x / \sigma_x^0$  вдоль поверхности полости в двух различных сечениях.

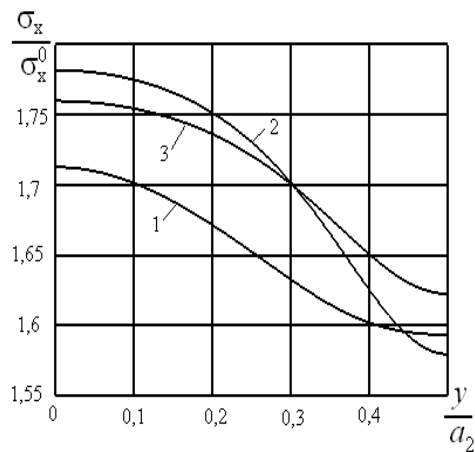


Рис. 3

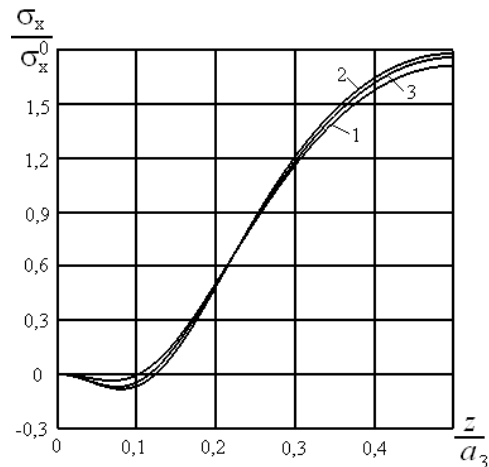


Рис. 4

При расчетах отношения полуосей принимали значения  $a_2/a_1 = 0,8$  и  $a_3/a_1 = 0,5$ . Линии 1, 2, 3 соответствуют следующим электроупругим материалам:  $Ba_2NaNb_5O_{15}$ , PZT-4 и PZT-7A. На рис. 3 показано изменение напряжений  $\sigma_x / \sigma_x^0$  вдоль поверхности эллипсоидальной полости в сечении  $ZY$  (от вершины эллипсоида на оси  $Oz$  до его вершины на оси  $Oy$ ), а на рис. 4 – в сечении  $XZ$  (от вершины эллипсоида на оси  $Ox$  до его вершины на оси  $Oz$ ).

Согласно рис. 3, 4 при растяжении вдоль оси  $Ox$  (направлении, перпендикулярном оси поляризации для пьезокерамических материалов к PZT-4 и PZT-7A) наибольшие значения концентрации напряжений для рассмотренных вариантов материалов достигаются для PZT-4, а наименьшие – для  $Ba_2NaNb_5O_{15}$ .

#### Заключение.

В работе исследовано напряженное состояние ортотропного электроупругого материала с трехосной эллипсоидальной полостью, оси которой ориентированы вдоль осей симметрии (ортотропии) пьезоэлектрического материала. Изучено влияние геометрических параметров включения и свойств электроупругого материала на распределение напряжений вдоль поверхности включения при одноосном растяжении.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто задачу про напружений стан у ортотропному п'єзоелектричному матеріалі, що містить тривісне еліпсоїдальне включення, при однорідних силових і електричних навантаженнях. Розв'язок задачі отримано за допомогою використання узагальненого на випадок п'єзоелектричного ортотропного простору методу еквівалентного включення Ешелбі. Апробація підходу на випадку сфероїдальної порожнини у трансверсально-ізотропному матеріалі (вісь обертання співпадає з віссю симетрії матеріалу), коли відомий точний розв'язок задачі, підтверджує його ефективність. Проведено числові дослідження та вивчено розподіл напружень у матеріалі вздовж поверхні тривісної еліпсоїдальної порожнини при розтязі.

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 6-ти т.; Т. 1).
2. Хорошун Л.П., Левчук О.И. К основам нелинейной теории электроупругости // Доп. НАНУ. – 2018. – № 3 – С. 43 – 52.
3. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 270 с.
4. Benveniste Y. The Determination of the Elastic and Electric Fields in a Piezoelectric Inhomogeneity // J. Appl. Phys. – 1992. – 72, N 3. – P. 1086 – 1095.

5. *Chen W.Q., Lim C.W.* 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // *Int. J. Fract.* – 2005. – **131**, N 3. – P. 231 – 246.
6. *Chen W.Q., Lim C.W., Ding H.J.* Point temperature solution for penny-shaped crack in an infinite transversely isotropic thermo – piezo – elastic medium // *Eng. Anal. Boundary Elements.* – 2005. – **29**, N 6. – P. 524 – 532.
7. *Chiang C. R., Weng G.J.* The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material // *Int. J. Fract.* 2005. – **134**, N 3 – 4. – P. 319 – 337.
8. *Dai L., Guo W., Wang X.* Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // *Int. J. Solids and Struct.* – 2006. – **43**, N 6. – P. 1818 – 1831.
9. *Dunn M. L., Taya M.* Electroelastic Field Concentrations in and Around Inhomogeneities in Piezoelectric Solids // *J. Appl. Mech.* – 1994. – **61**, N 3. – P. 474 – 475.
10. *Hodes A.Y., Loboda V.V.* A contact zone approach for an arc crack at the interface between two electrostrictive materials // *Int. J. Solids Structures.* – 2017. – **128**, N 1. – P. 262 – 271.
11. *Karlash V.L.* Conductance- and Susceptance-Frequency Responses of Piezoceramic Vibrators // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 4. – P. 464 – 471.
12. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I.* Thermomechanics of Inelastic Thin-Walled Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators Under Harmonic Loading (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 1. – P. 6 – 58.
13. *Khoma I. Yu., Proshchenko T.M.* Tension and Shear of a Transversely Isotropic Piezoceramic Plate with a Circular Hole with Mixed Conditions on Flat Sides // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 6. – P. 704 – 715.
14. *Khoroshun L.P.* Two-Continuum Mechanics of Dielectrics as the Basis of the Theory of Piezoelectricity and Electrostriction // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – P. 143 – 154.
15. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Electrostrained State of a Piezoceramic Body with a Paraboloidal Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 9. – P. 1011 – 1020.
16. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – P. 305 – 312.
17. *Mol'chenko L.V.* Influence of an Extraneous Electric Current on the Stress State of an Annular Plate of Variable Rigidity // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 12. – P. 1607 – 1611.
18. *Podil'chuk Yu.N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 2. – P. 132 – 170.
19. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the General Solution of Statics Equations of the Electroelasticity of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body in Terms of Harmonic Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 7. – P. 623 – 628.
20. *Podil'chuk Yu.N., Myasoedova I.G.* Stress State of a Transversely Isotropic Piezoceramic Body with Spheroidal Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 11. – P. 1269 – 1280.
21. *Soh A.K., Liu J.L.* Interfacial debonding of a circular inhomogeneity in piezoelectric–piezomagnetic composites under antiplane mechanical and in-plane electromagnetic loading // *Compos. Sci. Technol.* – 2005. – **65**, N 9. – P. 1347 – 1353.
22. *Wang Z.K., Zheng B.L.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media // *Int. J. Solids Structures.* – 1995. – **32**, 1. – P. 105 – 115.
23. *Zhang T.Y., Gao C.F.* Fracture behaviors of piezoelectric materials // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2004. – **41**, N 1 – 3. – P. 339 – 379.
24. *Zhou Y., Chen W.Q., Lu C.F.* Semi - analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections // *Composite Structures.* – 2010. – **92**, N 4. – P. 1009 – 1018.

Поступила 27.03.2018

Утверждена в печать 05.03.2019