

А. Н. Гузь

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ:
К 50-ЛЕТИЮ ИССЛЕДОВАНИЙ (ОБЗОР). III.

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. П.Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: guz@carrier.kiev.ua*

Abstract. An analysis of main results on investigation of some nonclassical problems of fracture and failure mechanics is considered. Results under consideration were obtained by author and his pupils in the department of dynamics and stability of continuum of the S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the National academy of sciences of Ukraine (NASU) during last 50 years.

Nonclassical problems of fracture and failure mechanics are defined as ones in which the approaches and criteria of classical fracture and failure mechanics are inapplicable. Distinguishing feature of results of author and his pupils is application of the 3D (three-dimensional) theories of stability, dynamics and statics of solid mechanics to investigation of nonclassical problems of fracture and failure mechanics. Vast majority of others authors practices various approximate theories of shells, plates and rods and others approximate approaches to investigation of nonclassical problems of fracture and failure mechanics.

Main scientific results in the *eight* nonclassical problems of fracture and failure mechanics obtained in the framework of above mentioned approach (3D theories of solid mechanics) are presented in very short form. Principal attention is directed to problems statement with the analysis of corresponding experiments, development of the method of solution in the framework of approach under consideration and discussion of final results. In view of it the mathematical aspect of methods of solution under consideration and their computer-aided realization are not discussed in this review paper, information on this subject is presented as annotation in short form.

Next *eight* nonclassical problems of fracture and failure mechanics (results of author and his pupils) are considered in this review paper:

the first problem – fracture of composites compressed along reinforcing elements;

the second problem – model of short fibers in stability and fracture of composites under compression;

the third problem – end-crush fracture of composites under compression along reinforcing elements;

the fourth problem – brittle fracture of cracked materials with initial (residual) stresses acting along cracks;

the fifth problem – separation into slender parts of composites under tension or compression along reinforcing elements;

the sixth problem – fracture of materials under compression along parallel cracks;

the seventh problem – brittle fracture of cracked materials under dynamical loads (with contact interaction of crack faces);

the eighth problem – fracture of thin-walled cracked bodies under tension with prebuckling.

About **523** monographs and main papers published by author and his pupils on the eight nonclassical problems of fracture and failure mechanics under consideration are included in the list of literature to this review paper.

The total review paper includes three parts. The first part has a subtitle: General problems; this part has been published in the journal «Prikladnaya Mekhanika» (55, № 2, 2019). The second part has a subtitle: Compressive failure of composite materials; this part has been published in the journal «Prikladnaya Mekhanika» (55, № 3, 2019). The third part has a subtitle: Others nonclassical problems of fracture mechanics; this part is publishing in the journal «Prikladnaya Mekhanika» (55, № 4, 2019).

Key words: nonclassical problems of fracture and failure mechanics; investigation during last 50 years; author and his pupils; S.P.Timoshenko Institute of Mechanics; department of dynamics and stability of continuum.

Предисловие.

Настоящая обзорная статья посвящена краткому описанию и соответствующему анализу основных результатов по неклассическим проблемам механики разрушения, полученных автором статьи и его учениками за последние 50 лет в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ.

Обсуждаемая обзорная статья разделена на три части. Первая часть имеет подзаголовок «**Общие вопросы**» и опубликована в журнале «Прикладная механика» (55, № 2, 2019); в первую часть включены Введение и §§1 и 2. Вторая часть имеет подзаголовок «**Разрушение композитных материалов при сжатии**» и опубликована в журнале «Прикладная механика» (55, № 3, 2019); во вторую часть включены §§3 – 5. Третья часть имеет подзаголовок «**Другие неклассические проблемы механики разрушения**» и публикуется в журнале «Прикладная механика» (55, № 4, 2019); в третью часть включены §§6 – 10 и список литературы, который является общим для всех трех частей.

Во всей обзорной статье (§§1 – 10) для всех формул, рисунков, Примечаний и Таблиц принята двойная нумерация (в пределах каждого параграфа); при этом первый номер соответствует номеру параграфа и второй номер (после точки) соответствует номеру объекта в пределах рассматриваемого параграфа. Таким образом, можно рассматривать результаты каждого параграфа практически независимо от других параграфов, ориентируясь на список литературы, который является общим для всей статьи и который представлен в третьей части статьи.

§6. Проблема 4. Хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин.

В настоящем параграфе в весьма краткой форме (по сравнению с **Проблемой 1** и **Проблемой 2**, которые обсуждены в части II настоящей статьи в §§3 и 4, соответственно) представлены основные результаты по рассматриваемой **Проблеме 4**, полученные в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, начиная с 1980 г.; при этом изложение обсуждаемых результатов представлено в стиле, анонсированном во Введении (часть I) в данную обзорную статью (без чрезмерного привлечения аспектов математического характера).

6.1. Введение. Основные результаты по рассматриваемой проблеме, полученные в отделе динамики и устойчивости сплошных сред, представлены в монографиях [44], [154] (т. 2), [57] (т. 2), [17] и в ряде других изданий монографического характера, а также в обзорных статьях [329, 336, 347, 350, 58]; первоначально эти результаты были опубликованы в научных статьях, которые указаны в списках литературы к вышеотмеченным монографиям и обзорным статьям. Из списка публикаций, приведенного в настоящей обзорной статье, к рассматриваемому научному направлению отдела относятся статьи [13 – 16, 37, 38, 41, 47, 48, 56, 221, 225 – 232, 279 – 286, 294, 303, 322, 328, 330 – 333, 343, 346, 381, 388, 415, 416, 420, 501, 545] и материалы по докладам на международных конференциях [298, 299, 318, 323, 327].

Следует отметить, что диссертация на степень доктора физико-математических наук (DSc) В.Л.Богданова, частично также относится к обсуждаемому научному направлению; в целом же указанная диссертационная работа посвящена объединенному исследованию **Проблемы 4** и **Проблемы 6** (*Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин*), основные результаты при таком подходе изложены в монографии [17].

Обсуждаемые в §6 результаты по механике хрупкого разрушения материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин относятся к изотропным материалам и ортотропным материалам; при этом в случае ортотропных материалов предполагается, что плоские трещины расположены в плоскости симметрии свойств материала. Целесообразно отметить, что композитные материалы в континуальном приближении также моделируются ортотропными материалами; следовательно, обсуждаемые в §6 результаты в указанном смысле также относятся и к композитным материалам.

По-видимому, необходимо подчеркнуть, что в проблеме построения механики взаимодействия начальных (остаточных) напряжений и напряжений, возникающих при действии дополнительных нагрузок (эти напряжения условно можно называть дополнительными напряжениями), возможны три существенно различные *ситуации или расчетные схемы*.

Первая ситуация. Начальные (остаточные) напряжения существенно меньше дополнительных напряжений. В этом случае можно не учитывать (отбрасывать) начальные (остаточные) напряжения и проводить исследования в рамках классической (линейной или нелинейной) теории упругости применительно к проблемам механики хрупкого разрушения.

Вторая ситуация. Начальные (остаточные) напряжения одного порядка с дополнительными напряжениями. В этом случае необходимо проводить исследование общего напряженно-деформированного состояния, не выделяя начальные (остаточные) и дополнительные напряжения; для обсуждаемого исследования в этом случае должна привлекаться исключительно *нелинейная* теория упругости малых или конечных деформаций. Для рассматриваемой ситуации конкретные результаты применительно к механике хрупкого разрушения можно получить лишь с привлечением численных методов и компьютерной механики. При указанном подходе получаемые результаты, по-видимому, являются многопараметрическими и их анализ, необходимый для механики хрупкого разрушения, сопряжен со значительными сложностями.

Третья ситуация. Начальные (остаточные) напряжения существенно больше дополнительных напряжений. Обсуждаемая ситуация достаточно реалистична, например, для композитных материалов. Дело в том, что композитные материалы для конкретных элементов конструкций создаются таким образом, чтобы армирующие элементы (волокна и т.п.) были направлены вдоль силовых линий; таким образом, напряжения вдоль армирующих элементов достигают существенно больших значений по сравнению с напряжениями в перпендикулярном направлении. В указанном случае поверхности раздела наполнителя и связующего (матрицы) направлены вдоль армирующих элементов (вдоль начальных (остаточных) напряжений); при этом в поверхностях раздела располагаются различного типа дефекты, которые приводят к существенному снижению адгезионной прочности (прочности при действии напряжений в перпендикулярном направлении к начальным напряжениям, т.е. при действии дополнительных напряжений). Таким образом, в обсуждаемой *третьей ситуации* дополнительные напряжения, являясь меньшими величинами по сравнению с начальными (остаточными) напряжениями, могут оказывать существенное влияние на общую прочность композитных материалов.

Вышеприведенные соображения свидетельствуют о реалистичности *третьей ситуации* и о необходимости построения механики взаимодействия начальных (остаточных) напряжений и дополнительных напряжений, несмотря на малость вторых напряжений по сравнению с первыми напряжениями, при проведении исследований по механике хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями. В обсуждаемой ситуации механика хрупкого разрушения таких материалов не может быть построена с привлечением основных соотношений и результатов классической линейной теории упругости, так как в сингулярную часть известного решения Инглиса-Мухелишвили для материала с трещиной *не входят* начальные (остаточные) напряжения вдоль трещин.

В связи с приведенными соображениями для построения механики хрупкого разрушения материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин с целью получения результатов в обозримом виде привлекается трехмерная линеаризованная теория упругости (ТЛГУ) при конечных (больших) и малых начальных деформациях. В соответствии с **Примечанием 2.2** *трехмерная линеаризованная теория упругости (ТЛГУ) для материалов с начальными (остаточными) напряжениями полностью совпадает с трехмерной линеаризованной теорией устойчивости упругих тел (ТЛГУУТ), если в последней все напряжения с индексом «0» считать известными и соответствующим начальным (остаточным) напряжениям.* Отметим, что в §2 настоящей обзорной статьи изложены основные математические аспекты трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛГУДТ), частным случаем которой является трехмерная линеаризованная

теория устойчивости упругих тел (ТЛУУТ). Также необходимо заметить, что в §2 настоящей обзорной статьи ТЛУУТ изложена в достаточно общей постановке (в общей форме для теорий больших и малых докритических или начальных деформаций, для сжимаемых и несжимаемых гиперупругих тел с произвольной структурой упругого потенциала при рассматриваемой симметрии свойств и т.д.). В соответствии с **Примечанием 2.2** вышеуказанную форму общности имеет и ТЛУУ для материалов с начальными (остаточными) напряжениями, с привлечением которой проводились исследования по обсуждаемой **Проблеме 4** в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ.

Примечание 6.1. Результаты по механике хрупкого разрушения материалов с трещинами с учетом действия начальных напряжений вдоль трещин, которые получены в отделе динамики и устойчивости сплошных сред, построены при *вышеуказанной общей постановке*. Эта информация относится и к первым публикациям отдела, которыми являются статьи [37, 38, 41, 279 – 286] за 1980 – 1981 гг. автора настоящей обзорной статьи. В других научных центрах всего мира, в основном, по обсуждаемой **Проблеме 4** исследования проводились и проводятся для материалов с упругими потенциалами конкретной частной структуры; примером отмеченного похода является статья [511] еще за 1967 г., которая была, по-видимому, первой публикацией в мировой научной литературе по механике хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями вдоль трещин и в которой получены результаты для несжимаемого материала только с упругим потенциалом неогуковского типа.

6.2. Предварительное обсуждение. Постановка задач. Типичная ситуация для механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями представлена на Рис. 6.1, где введены обозначения: $2a$ – ширина трещины в плоскости $y_3 = \text{const}$; σ_{11}^0 – начальные (остаточные) напряжения вдоль трещины; σ_{22} – дополнительные (действующие или эксплуатационные) напряжения.

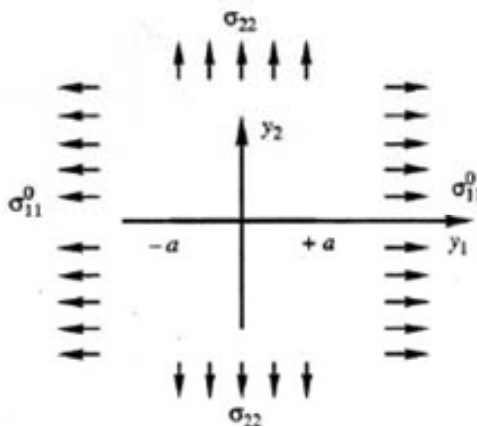


Рис. 6.1

Применительно к Рис. 6.1 в рамках *третьей ситуации*, обсужденной во Введении (п. 6.1) в настоящий §6, интуитивно представляется, что начальные (остаточные) напряжения σ_{11}^0 должны оказывать определенное влияние на процесс хрупкого разрушения; с целью подтверждения этого соображения рассмотрим два «мысленных» эксперимента.

На Рис. 6.2, *а* показаны две струны, которые расположены параллельно и вплотную одна к другой, при действии растягивающей нагрузки вдоль их осей.

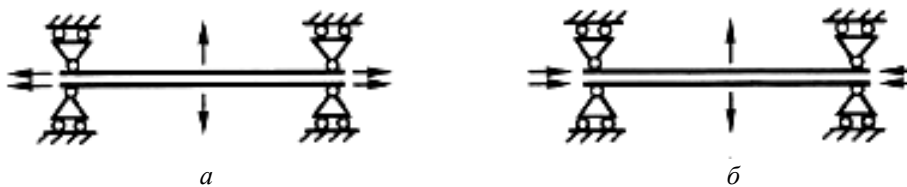


Рис. 6.2

Чтобы разделить струны, посередине их длины приложим силы, направленные перпендикулярно к осям струн. Очевидно, что для разделения струн на заданную величину прогиба необходимо приложить силы, величины которых должны зависеть от натяжения струн, т.е. от величины растягивающей нагрузки.

На Рис. 6.2, *б* изображены два стержня, которые расположены параллельно и вплотную один к другому, при действии сжимающей нагрузки вдоль их осей. Чтобы

разделить стержни, посередине их длины приложим силы, направленные перпендикулярно к осям стержней. Очевидно, что для разделения стержней на заданную величину прогиба необходимо приложить силы, величина которых должна зависеть от сжимающей нагрузки. При достижении сжимающей нагрузкой величины эйлерового критического значения система будет находиться в состоянии нейтрального равновесия; в этом состоянии достаточно приложить ничтожные по величине силы перпендикулярно осям стержней, чтобы разделить стержни.

Таким образом, при предварительном рассмотрении «мысленные» эксперименты наглядно свидетельствуют, что начальные (остаточные) напряжения σ_{11}^0 (Рис. 6.1), соответствующие горизонтальным нагрузкам на Рис. 6.2, а и б, должны влиять на процесс хрупкого разрушения; по-видимому, вышеуказанные механические эффекты, полученные в результате «мысленных» экспериментов, также должны проявляться. Следовательно, можно считать, что применительно к *третьей ситуации*, рассмотренной во Введении (п. 6.1) в настоящий §6, в результате предварительного обсуждения (рассмотрения) в определенной мере доказана целесообразность или необходимость развития механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями.

Учитывая вышеизложенное предварительное обсуждение, ниже рассмотрим **строгую постановку** механики хрупкого разрушения материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин; при этом будем следовать соответствующим подходам монографий [44], [154] (т. 2), [57] (т. 2) и [17], придерживаясь изложения монографии [57] (т. 2).

Прежде всего отметим, что в обсуждаемой механике хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин *отсчетное состояние* соответствует *второму (невозмущенному, начальному) состоянию по терминологии §2*. В связи с этим в отсчетном (начальном) состоянии вводятся лагранжевы координаты y_m ($m = 1, 2, 3$), которые совпадают с декартовыми координатами; все дальнейшее изложение обсуждаемой механики проводится в вышеуказанных лагранжевых координатах. Для примера все необходимые результаты для плоских задач представлены в пп. 2.5.4 – 2.5.6 §2 настоящей обзорной статьи (общие решения, представления решений плоских динамических и статических задач и т.п.); при этом индекс «штрих» возле различных величин указывает, что эти величины относятся к результатам с привлечением вышеуказанных лагранжевых координат. Дополнительные и более подробные сведения по формированию основных соотношений и результатов при использовании вышеуказанных лагранжевых координат приведены, например, в монографии [57] (т. 1, 2).

Общая постановка задач механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин. Рассматриваются *изотропные и ортотропные гиперупругие материалы с произвольной структурой упругого потенциала; в случае ортотропных материалов принимается, что плоские трещины расположены в плоскостях симметрии свойств материалов. Обсуждаемые материалы содержат плоские трещины различной формы, которые расположены в параллельных плоскостях при $y_2 = \text{const}$; одна из указанных плоскостей (при $y_2 = 0$) показана, для примера, на Рис. 6.3. Исследования проводятся в лагранжевых координатах y_m ($m = 1, 2, 3$), которые введены во втором (начальном, по терминологии §2 настоя-*

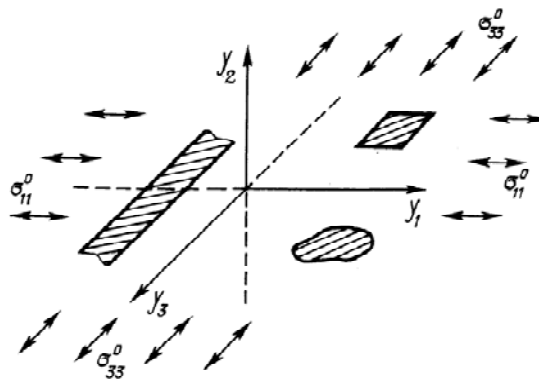


Рис. 6.3

щей обзорной статьи) состоянии и совпадают с декартовыми координатами в этом состоянии; таким образом, начальное (остаточное) состояние в §6 рассматривается как отсчетное состояние. Принимается, что начальное (остаточное) напряженно-деформированное состояние является однородным, т.е. имеют место выражения (2.78). Дополнительно принимается, что начальные (остаточные) напряжения действуют только вдоль плоскостей, в которых расположены трещины; таким образом, для начальных (остаточных) напряжений принимается (в соответствии с Рис. 6.3)

$$\sigma_{22}^0 = 0; \sigma_{11}^0 \neq 0; \sigma_{33}^0 \neq 0; \sigma_{ij}^0 = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (6.1)$$

Исследования проводятся в единой общей форме для теорий 1, 2 и 3 в соответствии с терминологией §2 настоящей обзорной статьи с привлечением лагранжевых координат, введенных в начальном (остаточном) состоянии; для двумерных задач применяется математический аппарат, изложенный в пп. 2.5.4 – 2.5.6 §2 настоящей обзорной статьи, и для трехмерных задач применяются общие решения, изложенные, например, в монографии [57] (т. 1, глава 1, §4).

Таким образом, в настоящем §6 будем считать, что всегда выполняются следующие **Допущения 1 – 4**, являющиеся основными в излагаемой механике хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин и, естественно, определяющими область ее применения.

Допущение 1. В начальном (остаточном) напряженно-деформированном состоянии материал с трещинами загружен таким образом, что на плоскостях, в которых расположены трещины, начальные (остаточные) напряжения не возникают.

Допущение 2. При приложении к материалу дополнительных произвольных нагрузок (дополнительных по отношению к начальному (остаточному) напряженно-деформированному состоянию) возникающие возмущения напряженно-деформированного состояния *значительно меньше* соответствующих величин для начального (остаточного) напряженно-деформированного состояния.

Допущение 3. Начальное (остаточное) напряженно-деформированное состояние имеет такую структуру, что в окрестности трещины его можно (с достаточной степенью точности) считать локально однородным.

Допущение 4. Решение линеаризованной теории упругости, которое возникает в рамках рассматриваемого варианта механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин, является единственным, т.е. выполняются условия типа (2.55) §2 настоящей обзорной статьи.

Необходимо отметить, что первые два допущения являются основными в рассматриваемой теории, третье допущение – вспомогательным по существу рассматриваемой проблемы и достаточно важным при решении задач, возникающим при данном подходе. Третье допущение выполняется при выполнении первого допущения, если начальное (остаточное) напряженно-деформированное состояние существенно не изменяется на расстояниях одного порядка с размерами трещин. Таким образом, первое и третье допущения обеспечивают существование *однородного* начального (остаточного) напряженно-деформированного состояния, для которого построены общие решения [57] (т. 1, глава 1, §4).

Второе допущение дает возможность применять линеаризованную теорию упругости для определения дополнительного (по отношению к начальному или остаточному состоянию) напряженно-деформированного состояния. Второе допущение является лишь следствием факта рассмотрения *третьей ситуации*, которая отмечена во Введении (п. 6.1) в настоящий §6, применительно к построению механики взаимодействия начальных (остаточных) напряжений и напряжений, возникающих при действии дополнительных нагрузок.

Четвертое допущение обеспечивает единственность решения обсуждаемой линеаризованной задачи, соответствующей обсуждаемой механике хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин. Без выполнения вышеуказанного условия, по-видимому, исследование рассматриваемых задач вообще лишено смысла.

Необходимо отметить, что второе допущение при обсуждаемом подходе нарушается вблизи кончика трещины, поскольку в самом кончике трещины возмущения напряжений (напряжения линеаризированной теории) асимптотически стремятся к «бесконечности». Подобная ситуация имеет место и в классической линейной механике хрупкого разрушения, которая многократно обсуждалась в известных публикациях, включая и общеизвестные монографии. Безусловно, в самом кончике трещины «бесконечные» напряжения не имеют физического смысла. Если же связать характер поведения напряжений вблизи кончика трещины (амплитудные величины при особенности) с интегральными характеристиками, относящимися к критериям разрушения, то можно получить полезную, в отдельных случаях и необходимую информацию. В вышеуказанном смысле будем понимать и механику хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин, которая построена на решениях линеаризированной теории упругости для тел с трещинами.

Примечание 6.2. Учитывая изложенную в настоящем пункте Общую постановку задач с привлечением лагранжевых координат $y_m (m = 1, 2, 3)$, которые введены в начальном (остаточном, втором, невозмущенном) состоянии, *постановка конкретных задач* (для тел конкретной формы с трещинами конкретной формы) *механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин, полностью совпадает с постановкой соответствующих задач классической линейной механики хрупкого разрушения.* При таком подходе будут отличаться только системы основных дифференциальных уравнений и выражения для определения составляющих тензоров напряжений через перемещения, которые приведены в монографии [57] (т. 1, глава 1, §4); в случае плоских статических и динамических задач соответствующий математический аппарат (с применением комплексных потенциалов) представлен в пп. 2.5.4 – 2.5.6 §2 настоящей обзорной статьи.

6.3. Плоские и антиплоские статические задачи. Критерии разрушения. В настоящем п. 6.3 в весьма краткой форме анализируются *точные решения* основных статических плоских и антиплоских задач механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин, применительно к бесконечному материалу с одной плоской (бесконечной в направлении оси Oy_3) трещиной конечной ширины $2a$, которая расположена (Рис. 6.4) в плоскости $y_1 O y_3$ ($|y_1| \leq a, y_2 = 0, -\infty < y_3 < +\infty$). Результаты получены для трещины нормального отрыва (Mode I), поперечного (Mode II) и продольного (Mode III) сдвига, а также для трещины расклинивание при Общей постановке, которая изложена в предыдущем п. 6.2 возле Рис. 6.3 с привлечением комплексных потенциалов, представленных в п. 2.5.5 §2 настоящей обзорной статьи. Для исследования применялись методы задачи Римана-Гильберта [19, 148], при этом в большинстве рассмотренных задач можно было ограничиться применением формулы Келдыша-Седова [126].

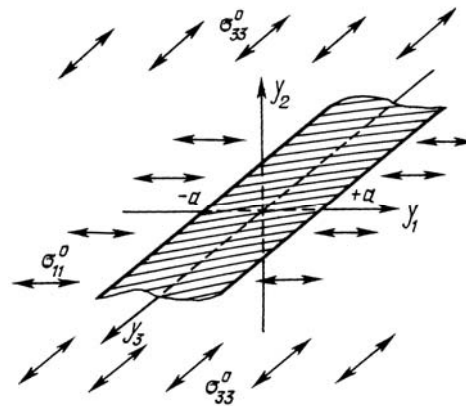


Рис. 6.4

Первоначально основные результаты были опубликованы в статьях автора настоящей обзорной статьи [37, 38, 41, 279 – 286] за 1980 – 1982 гг.; эти результаты изложены в монографии [44] за 1983 г., в которой приведен список основных публикаций автора за указанный период.

6.3.1. Порядок особенности. К сожалению, в период 1980 – 1983 гг. в вышеуказанных публикациях в полном объеме не был решен вопрос о порядке особенности в кончике трещины в задачах обсуждаемой механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями.

Лишь в 1986 году, начиная с публикации [48], было строго доказано, что порядок особенности в кончике трещины, вычисленный в рамках обсуждаемого варианта механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин, совпадает с порядком особенности в рамках классической линейной механики хрупкого разрушения. Вышеизложенный результат является одним из основных результатов по **Проблеме 4**, которая рассматривается в §6 настоящей обзорной статьи; необходимо отметить, что обсуждаемый результат получен при **Общей постановке**, которая изложена в предыдущем п. 6.2 возле Рис. 6.3, для изотропных и ортотропных гиперупругих материалов с произвольной структурой упругого потенциала.

С учетом вышеуказанных результатов о порядке особенности в кончике трещины все полученные точные решения представлены в монографии [154] (т. 2) за 1991 г.; наиболее полное изложение обсуждаемых результатов, полученных на основе точных решений, представлено в монографиях [57] (т. 2, глава 7, с. 18 – 144) и [17] (глава 3, с. 195 – 268).

6.3.2. Эффекты резонансного характера. При нагружении нижнего полупространства $y_2 \leq 0$ нагрузками (6.1), которые рассматриваются в настоящем §6, может возникнуть приповерхностная потеря устойчивости, которая заключается в том, что теряют устойчивость приповерхностные слои материала нижнего полупространства по формам, которые затухают по величине при удалении от границы полупространства (при $y_2 \rightarrow -\infty$). С привлечением математического аппарата п. 2.5.5 §2 настоящей обзорной статьи в [57] (т. 2, глава 7) получены характеристические уравнения для определения критических значений параметров нагружения (6.1), соответствующих возникновению приповерхностной потери устойчивости, с учетом обозначений п. 2.5.5 §2 для случая неравных корней $\mu_1' \neq \mu_2'$ в виде

$$\mu_2' \gamma_{21}^{(2)} - \mu_1' \gamma_{21}^{(1)} = 0 \quad (6.2)$$

и для случая равных корней $\mu_1' = \mu_2'$ в следующем виде:

$$\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1' \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} = 0. \quad (6.3)$$

Уравнения (6.2) и (6.3) будем применять ниже при анализе точных решений для различных трещин (Mode I, II и III); в качестве примеров рассмотрим ряд точных решений для трещины длиной $2a$ (Рис. 6.4).

Так, для трещины нормального отрыва (Mode I), нагруженной нагрузкой интенсивности $g(y_1)$, для случая неравных корней ($\mu_1' \neq \mu_2'$) точное решение дается ([57] (т. 2, с. 75 – 79)) функцией

$$Z(z_j) = \frac{\mu_2' \gamma_{21}^{(2)}}{2\pi(\mu_2' \gamma_{21}^{(2)} - \mu_1' \gamma_{21}^{(1)})} \frac{1}{\sqrt{z_j^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{g(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{z_j - t} dt; \quad j = 1, 2. \quad (6.4)$$

Для трещины поперечного сдвига (Mode II), нагруженной нагрузкой интенсивности $h(y_1)$, для случая равных корней ($\mu_1' = \mu_2'$) точное решение дается ([57] (т. 2, с. 98 – 99)) формулой

$$Z(z_1) = \frac{2i}{\pi(\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1' \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)})} \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{h(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{z_1 - t} dt. \quad (6.5)$$

Для трещины продольного сдвига (Mode III), нагруженной нагрузкой интенсивности $f(y_1)$, точное решение дается ([57] (т. 2, с. 108 – 110)) формулой

$$Z(z_3) = \frac{1}{\pi\sqrt{z_3^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{f(t)\sqrt{a^2 - t^2}}{z_3 - t} dt; \quad z_3 = y_1 + \mu'_3 y_2. \quad (6.6)$$

Для трещин нормального отрыва (Mode I) в случае равных корней ($\mu'_1 = \mu'_2$) и трещин поперечного сдвига (Mode II) в случае неравных корней ($\mu'_1 \neq \mu'_2$) точные решения даются формулами, которые подобны (по структуре) формулам (6.4) и (6.5) [57] (т. 2, глава 7).

Из анализа точных решений в виде (6.4) и (6.5), а также других точных решений [57] (т. 2, глава 7), соответствующих *трещинам нормального отрыва (Mode I) и трещинам поперечного сдвига (Mode II)*, следует, что в знаменатели обсуждаемых точных решений *входят выражения, соответствующие левым частям уравнений (6.2) и (6.3)*. Таким образом, при стремлении начальных (остаточных) напряжений к значениям корней уравнений (6.2) и (6.3), *точные решения типа (6.4) и (6.5), соответствующие трещинам нормального отрыва (Mode I) и поперечного сдвига (Mode II), стремятся к «бесконечности»*. Из анализа точного решения (6.6), соответствующего трещинам продольного сдвига (Mode III), следует, что для трещин (Mode III) явления, подобного для трещин (Mode I) и (Mode II), *не наблюдается*.

Следует отметить, что также было определено асимптотическое поведение напряжений и перемещений возле кончика трещины, исходя из точных решений типа (6.4) – (6.6). Из анализа этих результатов следует, что для отдельных напряжений и перемещений *сохраняются закономерности, отмеченные выше для точных решений типа (6.4) – (6.6)*.

Таким образом, можно считать, что, исходя из результатов вышеизложенного анализа, доказано существование следующей закономерности.

При стремлении начальных (остаточных) напряжений к значениям, соответствующим приповерхностной неустойчивости полупространства (к корням уравнений (6.2) и (6.3)) для трещин нормального отрыва (Mode I) и поперечного сдвига (Mode II) возникают явления резонансного характера, а для трещин продольного сдвига (Mode III) подобные явления не возникают.

Целесообразно отметить, что выше (а, следовательно, и в монографиях [44] за 1983 г., [154] (т. 2) за 1991 г., [57] (т. 2) за 2008 г. и [17] за 2017 г., а также ранее в соответствующих публикациях в периодических изданиях) вышесформулированная **закономерность** доказана для *гиперупругих изотропных и ортотропных материалов с произвольной структурой упругого потенциала*, исходя из Общей постановки задач, которая изложена в п. 6.2 возле Рис. 6.3. Подавляющее большинство других авторов рассматривают обсуждаемую закономерность и в настоящее время, исходя из результатов для упругих потенциалов частной конкретной структуры.

6.3.3. Критерии разрушения. Критерии хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин, построены, начиная со статьи [41] за 1982 г., в соответствии с подходом, который применялся повсеместно в классической линейной механике хрупкого разрушения материалов; в последующие годы эти критерии обсуждались в ряде публикаций, представленных в списке литературы к настоящей обзорной статье, и вошли в монографии [44] за 1983 г., [154] (т. 2) за 1991 г., [57] (т. 2) за 2008 г. и [17] за 2017 г. Ниже приведем критерий хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин применительно к материалу с трещинами Mode I, II и III, следуя монографии [57] (т. 2, с. 125 – 142) для случаев неравных $\mu'_1 \neq \mu'_2$ и равных $\mu'_1 = \mu'_2$ корней. Так, в случае неравных $\mu'_1 \neq \mu'_2$ корней обсуждаемый критерий имеет следующий вид

$$K_I^2 (\gamma_2^{(1)} \mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}) + K_{II}^2 (\gamma_1^{(1)} - \gamma_1^{(2)}) + \\ + K_{III}^2 (\omega'_{1331} \omega'_{2332})^{-1/2} i^{-1} (\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}) = 4\gamma i^{-1} (\mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}). \quad (6.7)$$

В случае равных $\mu'_1 = \mu'_2$ корней обсуждаемый критерий имеет следующий вид

$$K_I^2 \left[(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right] + K_{II}^2 (\gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)}) + \quad (6.8)$$

$$+ K_{III}^2 (\omega'_{1331} \omega'_{2332})^{-\frac{1}{2}} i^{-1} (\mu'_1 \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{21}^{(2)}) = 4 \gamma i^{-1} (\mu'_1 \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{21}^{(2)}).$$

В выражениях (6.7) и (6.8) введены следующие обозначения:

K_I, K_{II} и K_{III} – коэффициенты интенсивности напряжений для трещин Mode I, Mode II и Mode III; γ – величина удельной поверхностной энергии, отнесенная к единице длины вдоль оси Oy_3 (Рис. 6.3); все другие обозначения в (6.7) и (6.8) соответствуют рассматриваемой линеаризованной теории и приведены, например, в монографии [57] (т. 2).

Следует отметить, что результаты (6.7) и (6.8) приведены для сжимаемого тела и в силу применения Общей постановки задач, изложенной в п. 6.2 возле Рис. 6.3, относятся к изотропным и ортотропным материалам с произвольной структурой упругого потенциала. Следуя Ирвину, Оровану и другим авторам, при вычислении затрат энергии на разрушение можно учитывать в величине γ удельную необратимую энергию, связанную с учетом пластических деформаций в локальных зонах.

Рассмотрим изменение критериев разрушения в виде (6.7) и (6.8), когда величины начальных (остаточных) напряжений в виде (6.1) приближаются к значениям, соответствующим возникновению приповерхностной потери устойчивости полупространства, т.е. к значениям корней уравнений (6.2) и (6.3). Напомним, что в указанном случае, как отмечено в предыдущем п. 6.3.2, возникают явления *резонансного характера*. Подставляя (6.1) в (6.7) и (6.3) в (6.8), для указанного случая получаем критерий разрушения для неравных корней $\mu'_1 \neq \mu'_2$ в следующем виде:

$$K_I^2 (\gamma_2^{(1)} \mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)}) + K_{II}^2 (\gamma_1^{(1)} - \gamma_1^{(2)}) = 0 \quad (6.9)$$

и критерий разрушения для равных корней $\mu'_1 = \mu'_2$ в следующем виде:

$$K_I^2 \left[(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right] + K_{II}^2 (\gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)}) = 0. \quad (6.10)$$

Из критериев разрушения в виде (6.9) и (6.10) для одной трещины нормального отрыва (Mode I) (в этом случае $K_{II} \equiv 0$) для случаев неравных ($\mu'_1 \neq \mu'_2$) и равных ($\mu'_1 = \mu'_2$) корней получаем критерий разрушения в следующем виде:

$$K_I^2 = 0. \quad (6.11)$$

Заметим, что критерий разрушения в виде (6.11) относится к дополнительным нагрузкам в перпендикулярном направлении к плоскости трещины (в направлении оси Oy_2 на Рис. 6.4); эти нагрузки линейно входят в K_I .

Заметим, что критерий (6.11) относится к трещине нормального отрыва (Mode I), когда начальные (остаточные) напряжения в виде (6.1) приближаются к значениям, соответствующим явлениям *резонансного характера* (к корням уравнений (6.2) и (6.3)). В этом случае перпендикулярно к трещине достаточно приложить незначительные дополнительные нагрузки (при $K_I \rightarrow 0$), чтобы в соответствии с критерием в виде (6.11) произошло разрушение. Соответствующий эффект обсуждался и в «мысленном» эксперименте применительно к сжатию двух стержней (Рис. 6.2, б), когда сжимающая нагрузка вдоль оси стержней приближается к величине эйлерового критического значения.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при рассмотрении в настоящем п. 6.3 статических плоских и антиплоских задач механики хрупкого разрушения материалов с учетом начальных (остаточных) напряжений, которые действуют вдоль трещин.

Примечание 6.3. В настоящем п. 6.3 приведено достаточно много сведений в аналитической (математической) форме, что не соответствует стилю написания настоящего обзора, анонсированному во Введении (часть I настоящей обзорной статьи). Отмеченная ситуация связана с тем, что *все результаты п. 6.3 основаны на полученных точных решениях и на соответствующем их анализе.*

6.4. Пространственные статические задачи. В настоящем п. 6.4 в аннотированном виде рассмотрим сведения о результатах по пространственным статическим задачам механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин; обсуждаемые результаты получены в рамках Общей постановки задач, которая изложена возле Рис. 6.3 и относится к ситуации, представленной на Рис. 6.3. Целесообразно отметить, что, по-видимому, первыми публикациями в этом направлении при обсуждаемом подходе были статьи [285, 286]; в последующие годы был опубликован по рассматриваемому направлению ряд статей, основные из которых представлены в списке литературы к настоящей обзорной статье. Обсуждаемые результаты также, частично, представлены в обзорных статьях [329, 336, 347, 350], посвященных неклассическим проблемам механики разрушения. Полученные результаты по пространственным статическим задачам обсуждаемой механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин включены в монографии [44] (глава 4) за 1983 г., [154] (т. 2, главы 4 и 5) за 1991 г. и [17] (главы 4 – 6) за 2017 г.; в вышеуказанных монографиях в списках литературы представлены основные статьи по рассматриваемой **Проблеме 4**, опубликованные к выходу соответствующей монографии.

6.4.1. К постановке пространственных статических задач механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, действующими вдоль трещин. Исследования проводятся в Общей постановке, которая изложена возле Рис. 6.3; при этом принимаются **Допущения 1 – 4**, изложенные в заключительной части п. 6.2, и три дополнительных допущения.

Дополнительное допущение 1. Начальные (остаточные) напряжения рассматриваются (в отличие от Рис. 6.3) в следующем виде

$$\sigma_{33}^0 = 0; \sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 \neq 0; \sigma_{ij}^0 = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (6.12)$$

Отметим, что выражения (6.12) являются частным случаем выражений (6.1) и соответствуют осесимметричному начальному (остаточному) напряженно-деформированному состоянию, где в этом случае ось $0z_3$ является осью симметрии.

Дополнительное допущение 2. Рассматриваются гиперупругие изотропные и трансверсально-изотропные материалы с произвольной структурой упругого потенциала; при этом в случае трансверсально-изотропных тел принимается, что плоскости $u_3 = \text{const}$ являются плоскостями изотропии.

Дополнительное допущение 3. Принимается, что плоские трещины расположены в плоскостях $u_3 = \text{const}$, и таким образом начальные (остаточные) напряжения действуют только вдоль плоскостей, в которых расположены трещины.

Необходимо отметить, что в настоящем п. 6.4 применительно к пространственным задачам изменено расположение осей координат по сравнению с Рис. 6.3, который таким образом относится только к плоским и антиплоским задачам; это изменение соответствует традиционно принятому расположению осей в плоских и антиплоских, а также пространственных задачах механики разрушения.

6.4.2. К методу исследования пространственных статических задач. Учитывая **Примечание 6.2**, обсуждаемые задачи сводятся к смешанным задачам для гармонического потенциала, как и в классической линейной механике хрупкого разрушения. С привлечением различных интегральных преобразований и существующих методов получены различные типа одномерные интегральные уравнения; вышеуказанные результаты получены для гиперупругих изотропных и трансверсально-изотропных материалов с произвольной структурой упругого потенциала. В дальнейшем проводится численное исследование полученных одномерных интегральных уравнений для

гиперупругих изотропных и трансверсально-изотропных материалов с конкретной структурой упругого потенциала и анализ механических эффектов, характерных для механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин.

6.4.3. Конкретные результаты (как точные решения, так и с применением компьютерных методов) получены для следующих 11-ти расчетных схем.

1. Внутренняя дискообразная круговая трещина (трещина нормального отрыва, трещина радиального сдвига, кручение).

2. Внешняя дискообразная круговая трещина (трещина нормального отрыва, трещина радиального сдвига, кручение).

3. Общая задача для сдвига в случае внутренней дискообразной круговой трещины (точные решения, асимптотическое представление вблизи кончика трещины).

4. Общая задача для сдвига в случае внешней дискообразной круговой трещины (точные решения, асимптотические представления вблизи кончика трещины).

5. Трещина в виде плоского эллиптического диска (трещина нормального отрыва, трещина сдвига, точные решения, асимптотические представления вблизи кончика трещины).

6. Общая неосесимметричная задача для трещины в виде кругового диска (трещина нормального отрыва, трещина сдвига, точные решения, асимптотические представления вблизи кончика трещины).

7. Общая неосесимметричная задача для трещины в виде кругового диска вблизи границы полупространства (асимптотическое распределение напряжений в окрестности края трещины, коэффициенты интенсивности напряжений).

8. Осесимметричные задачи для трещины в виде кругового диска вблизи границы полупространства (трещина нормального отрыва, трещина сдвига, кручение, асимптотическое распределение возле края трещины, коэффициенты интенсивности напряжений).

9. Неосесимметричные и осесимметричные задачи для взаимодействующих параллельных соосных трещин в виде круговых дисков под *действием нормальной нагрузки на их берегах* (две параллельные соосные трещины, периодическая система параллельных соосных трещин, асимптотическое представление вблизи края трещин, коэффициенты интенсивности напряжений).

10. Осесимметричные задачи для взаимодействующих параллельных соосных трещин в виде круговых дисков под *действием радиального сдвига* (две параллельные соосные трещины, периодическая система параллельных соосных трещин, асимптотическое представление вблизи края трещин, коэффициенты интенсивности напряжений).

11. Задачи для взаимодействующих параллельных соосных трещин в виде круговых дисков под *действием усилий кручения* (две параллельные соосные трещины, периодическая система параллельных соосных трещин, асимптотическое представление вблизи края трещин, коэффициенты интенсивности напряжений).

Примечание 6.4. Вышеизложенные в аннотированном виде конкретные результаты для пространственных статических задач механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин, в наиболее полной форме, по-видимому, представлены в монографии [17] за 2017 г.

6.4.4. О явлениях резонансного характера для пространственных статических задач неклассической Проблемы 4 механики разрушения. Как и в плоских статических задачах, рассмотренных в п. 6.3, так и в пространственных задачах, в аннотированном виде рассмотренных в п. 6.4, *имеют место* эффекты резонансного характера, когда начальные (остаточные) напряжения стремятся к значениям, соответствующим приповерхностной неустойчивости полупространства. В случае пространственных статических задач приповерхностную неустойчивость следует рассматривать применительно к начальным (остаточным) напряжениям в виде (6.12). В этом случае эффекты резонансного характера имеют место для трещин нормального отрыва (Mode I) и других трещин; более подробная информация представлена в монографиях [44] за 1983 г., [154] (т. 2) за 1991 г. и [17] за 2017 г.

6.5. О динамических плоских и антиплоских задачах механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин. В настоящем п. 6.5 в аннотированном виде рассмотрим сведения по плоским и антиплоским динамическим задачам механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин; при этом будут рассматриваться *исключительно* результаты для движущейся трещины. Исследования проводятся в рамках Общей постановки, изложенной после Рис. 6.3, и применяются все допущения и комментарии, изложенные в заключительной части п. 6.2. Применительно к плоским и антиплоским задачам рассматривается бесконечный материал с одной плоской (бесконечной в направлении оси Oy_3 , Рис. 6.4) трещиной конечной ширины $2a$, которая расположена в плоскости y_1Oy_3 (Рис. 6.4) ($|y_1| \leq a$; $y_2 = 0$; $-\infty < y_3 < +\infty$).

При вышеизложенной краткой постановке принимается **Дополнительное Допущение**, заключающееся в следующем.

Вышеуказанная трещина (Рис. 6.4) движется равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью $v = \text{const}$ вдоль оси Oy_1 ; исследование проводится для дозвукового режима движения, т.е. выполняются условия (2.132) (I-я часть настоящей обзорной статьи) с учетом обозначений, приведенных ниже выражения (2.132), для материалов с начальными (остаточными) напряжениями.

Исследования проводились с привлечением *комплексных потенциалов* плоских и антиплоских динамических задач механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин; обсуждаемые комплексные представления в весьма краткой форме изложены в п. 2.5.6 (I-я часть настоящей обзорной статьи).

По механике движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин в историческом аспекте, по-видимому, первой публикацией в мировой научной литературе была статья автора настоящей обзорной статьи, которая опубликована в журнале «Прикл. механика» (1982, **18**, № 2, с. 60 – 67); в переводе на английский язык вышеуказанная статья опубликована в журнале «Sov. Appl. Mechanics» (1982, **18**, № 2, р. 137 – 143). *При стремлении* начальных (остаточных) напряжений к нулю вышеуказанные результаты, являющиеся точным решением, переходят в точное решение [581], опубликованное в 1951 г.; при этом статья [581] в историческом аспекте была первой публикацией в мировой научной литературе по теории движущихся трещин в классической линейной механике хрупкого разрушения. Результаты по механике движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями вдоль трещин, опубликованные до 1983 г., представлены в монографии [44], результаты до 1991 г. – в монографии [154] (т. 2) и результаты до 2008 г. – в монографии [57] (т. 2); дополнительно следует отметить современный обзор [58] по обсуждаемому научному направлению, который опубликован в 2010 г. В наиболее общей постановке основные результаты по механике движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин, представлены в статьях [330 – 333]; *при стремлении* начальных (остаточных) напряжений к нулю из результатов, изложенных в статьях [330 – 333] также следуют результаты для движущихся трещин классической линейной механики хрупкого разрушения, которые впервые представлены в статьях [581] за 1951 г. и [249] за 1960 г.

Выше в настоящем п. 6.5 в весьма краткой форме применительно к механике движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин, рассмотрены: постановка задач с указанием общего подхода при их решении; аспекты исторического характера, относящиеся к обсуждаемому научному направлению. Ниже также в весьма краткой форме рассмотрим: краткое описание метода решения, конкретные полученные результаты и эффект резонансного характера, обнаруженный в обсуждаемых результатах.

Метод решения: применение комплексных представлений, изложенных в п. 2.5.6 (I-я часть настоящей обзорной статьи); привлечение методов сведения к задаче Римана-Гильберта [19, 148]; применение формулы Келдыша-Седова [126], позволившее получить, в основном, точные решения всех рассматриваемых задач.

Конкретные полученные результаты (с привлечением точных решений) для следующих расчетных схем.

Движущаяся трещина нормального отрыва (Mode I) для случаев неравных и равных корней (точное решение, асимптотическое распределение вблизи переднего кончика трещины, анализ влияния начальных (остаточных) напряжений).

Движущаяся трещина поперечного сдвига (Mode II) для случаев неравных и равных корней (точное решение, асимптотическое распределение вблизи переднего кончика трещины, анализ влияния начальных (остаточных) напряжений).

Движущаяся трещина продольного сдвига (Mode III) (точное решение, асимптотическое распределение вблизи переднего кончика трещины, анализ влияния начальных (остаточных) напряжений).

В наиболее полной форме вышеуказанные конкретные результаты представлены в монографии [57] (т. 2, глава 10, §§1 – 4, с. 318 – 392) и первоначально в статьях [330 – 333].

*Об эффектах резонансного характера для плоских и антиплоских динамических задач неклассической **Проблемы 4** механики разрушения применительно к движущимся трещинам.* Для трещин нормального отрыва (Mode I) и поперечного сдвига (Mode II) имеют место эффекты резонансного характера при приближении скорости движения трещины к скорости волн Рэлея в упругом материале с рассматриваемыми начальными (остаточными) напряжениями. В вышеуказанном случае для трещин продольного сдвига (Mode III) не имеют места (не возникают) эффекты резонансного характера.

Вышеизложенными в §6 сведениями ограничимся при кратком обсуждении результатов по **Проблеме 4** (*хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин*), которые получены в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ. Ниже в п. 6.6 дополнительно приведем, в качестве примеров, информацию о повторении другими авторами вышеизложенных результатов, относящихся к **Проблеме 4**, а также к другим **Проблемам**, рассмотренным в настоящей обзорной статье.

6.6. Повторение результатов. Результаты по **Проблеме 4** (*хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин*), изложенные в краткой форме в настоящем §6, получены в единой общей форме для сжимаемых и несжимаемых изотропных и ортотропных (для пространственных задач – трансверсально-изотропных) материалов с **произвольной структурой упругого потенциала**. Как уже было отмечено в заключительной части п. 6.1, в других научных центрах (особенно англоязычными исследователями) исследования по **Проблеме 4** проводились и проводятся для материалов с **упругими потенциалами конкретной частной структуры**.

В связи с вышеизложенным необходимо отметить три следующие позиции.

Первая позиция. Нельзя **признать новыми научными результатами** публикуемые результаты для материалов с **упругими потенциалами конкретной структуры** для задач, которые исследованы и указаны в §6 применительно к материалам с **произвольной структурой упругого потенциала** (изотропные и ортотропные материалы). В любом случае **ссылки** на результаты, изложенные в §6, являются **обязательными**.

Вторая позиция. Отсутствие вышеуказанных **ссылок** нельзя оправдать «недоступностью русскоязычных публикаций». Дело в том, что основные результаты по **Проблеме 4**, изложенные в настоящем §6, публиковались и в журнале «Прикладная механика», который переводился на английский язык и издавался как «Soviet Applied Mechanics» в 1966 – 1991 гг., с 1992 г. переводится на английский язык как «International Applied Mechanics» и издается в настоящее время концерном SPRINGER.

Третья позиция. Перед представлением статьи в журнал для публикации целесообразно провести соответствующий информационный поиск по обсуждаемому научному направлению. При современной общедоступной международной системе баз данных рассматриваемый информационный поиск достаточно легко осуществим.

Соблюдение трех вышеуказанных позиций при подготовке новых публикаций по **Проблеме 4**, как и по другим неклассическим проблемам механики разрушения, ко-

торые обсуждены в настоящей обзорной статье, позволяет сформировать новую публикация, удовлетворяющую общепринятым в мировом научном сообществе этическим нормам. *Несоблюдение трех вышеуказанных позиций* при подготовке новых публикаций по обсуждаемым проблемам, по-видимому, не только выводит такие публикации и соответствующие действия за пределы этических норм, принятых в мировом научном сообществе, но и переводит такие действия в *сферу юридической ответственности*.

Целесообразность вышеизложенного подхода подтверждают три примера, с которыми встретился автор настоящей обзорной статьи и которые рассмотрены ниже.

Пример 1. В 1996 г. в журнале «International Journal of Engineering Science» была опубликована статья E.Soos, которая вошла в список литературы к настоящей обзорной статье как статья [560]. Указанная статья E.Soos *нарушает все возможные этические нормы, принятые в мировом научном сообществе*. В связи с этим автор настоящего обзора подготовил небольшую статью, которую с прилагаемой копией переписки с E.Soos отправил в редакцию журнала «Int. J. Engng. Sci.», членом редколлегии которой был E.Soos. Подготовленная статья не была опубликована в журнале «Int. J. Engng. Sci.»; в связи с этим указанная статья была опубликована в журнале «Прикл. механика» и вошла в список литературы к настоящему обзору как статья [322]. В последующие годы материалы статьи E.Soos [560] при некотором изменении вошли в монографию [250] за 2003 г. Чтобы не загромождать настоящий обзор повторным анализом статьи E.Soos [560], приведем лишь краткую информацию из Введения в статью [322].

«... Для статьи [560] характерно: 1) сравнительно подробное изложение математического аппарата, изложенного мною для рассматриваемого варианта механики хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями, иногда без соответствующих ссылок; 2) резкая критика, даже с использованием термина «парадокс», моих результатов (как будет показано ниже, эта критика возникла вследствие полного непонимания автором статьи [560] постановок задач, которыми пытается он заниматься); 3) публикация автором статьи [560] новых и правильных, по его мнению, результатов (как будет показано ниже, эти результаты полностью совпадают с моими результатами «десятилетней давности», если заменить введенные в [560] некоторые обозначения). Вся сложность ситуации заключается в том, *что автор статьи [560] был знаком с моими результатами «десятилетней давности»* (это будет доказано ниже документально).»

Документы. 1. Из письма E.Soos от 15.03.1995

«Dear Professor Guz,

1995.03.15

Since 1992 I study intensively your fundamental books, published in the period 1971 – 1990, concerning general, three-dimensional theory of the stability of solid bodies...»

2. В ответ на письмо E.Soos от 15.03.1995 по почте ему была направлена монография [57] (т. 2) за 1991 г., в которой достаточно подробно изложены мои результаты «десятилетней давности».

После вышеуказанного была опубликована статья E.Soos [560].

Таким образом, из информации, представленной выше, следует, что E.Soos и его статья [560] *выходят далеко за пределы трех вышеуказанных позиций*; дополнительные более подробные сведения по обсуждаемому вопросу можно получить из статьи [322].

Пример 2. В 2002 г. в журнале «International Journal of Solids and Structures» была опубликована статья E.Radi, D.Bigoni, D.Caruati, которая вошла в список литературы к настоящей обзорной статье как статья [549]. В [549] получено асимптотическое распределение напряжений вблизи кончика трещины применительно к Mode I и Mode II для материалов с начальными напряжениями вдоль трещины в рамках модели несжимаемого упругого тела с соотношениями упругости частного вида для линеаризированной теории упрощенного типа.

Указанные результаты [549] являются частным случаем более общих результатов, которые указаны в п. 6.3 и которые опубликованы в 1980 – 1982 гг. (т.е. за 20 лет до [549]). Таким образом, результаты [549] *не являются новыми* и при этом *ссылки на*

вышеуказанные результаты «двадцатилетней давности» по сравнению с [549] за 2002 г. *отсутствуют*. Следовательно, в [549] *первая позиция* нарушается.

На стр. 3971 статьи [549] в подстрочном замечании авторы указывают, что публикации на русском языке недоступны. В то же время публикации «двадцатилетней давности», отмеченные в п. 6.3, *также представлены* в журнале «Soviet Applied Mechanics» на *английском языке*. Следовательно, *вторая позиция* также имеет место в отрицательном смысле.

Из вышеизложенного следует, что соответствующий информационный поиск *не проводился*, в противном случае авторы [549] узнали бы об отмеченных результатах «двадцатилетней давности». Следовательно, *третья позиция* также имеет место в отрицательном смысле.

Таким образом, из информации, представленной выше, следует, что авторы статьи [549] и их статья [549] *выходят за пределы трех вышеуказанных позиций*; дополнительные сведения по обсуждаемому вопросу применительно к статье [549] можно получить из статьи [381] за 2003 г., где проведен соответствующий анализ. По этому вопросу в журнал «International Journal of Solids and Structures» было направлено соответствующее письмо, которое редакция указанного журнала опубликовала в 2003 г. в виде весьма сокращенной заметки [343].

Примечание 6.5. В Примерах 1 и 2 настоящего п. 6.6 рассмотрено два случая повторения результатов по **Проблеме 4**, изложенных в п. 6.3 и полученных ранее в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ; при этом результаты в виде повторения являются весьма частным случаем результатов п. 6.3. Повторение результатов по **Проблемам 1 – 8**, которые кратко обсуждаются в настоящей обзорной статье, имеет место и применительно к другим **Проблемам**, не только применительно к **Проблеме 4**. Ниже в качестве примера повторения результатов по **Проблемам 1 – 8** рассмотрим Пример 3, относящийся к повторению результатов по **Проблеме 1** (*Разрушение в композитных материалах при сжатии вдоль армирующих элементов*), которые изложены в части II настоящей обзорной статьи.

Пример 3. В 2006 г. в журнале «International Journal of Solids and Structures» была опубликована статья Y.B.Fu и Y.T.Zhang (Int. J. Solids Struct., 2006, 43, P. 3306 – 3323), которая не включена в список литературы к настоящей обзорной статье. В обсуждаемой статье Fu and Zhang повторены (даже в менее общем виде) результаты, которые получил автор настоящей обзорной статьи *более 35 лет назад* (по сравнению с 2006 г.). В связи с этим в редакцию журнала «Int. J. Solids Structures» было направлено письмо, которое не было опубликовано; указанное письмо полностью было опубликовано в статье (Гузь А.Н. // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 11. – С. 3 – 29) на с. 23 – 24. Основной анализ статьи Fu and Zhang представлен в первой части обсуждаемого письма; в связи с этим ниже приводится только первая часть письма, в которой ссылки на публикации указаны в соответствии со списком литературы к настоящей обзорной статье (в III части статьи).

«... В статье Fu and Zhang за 2006 г. представлена континуальная теория разрушения композитов при сжатии, которая основана на критерии потери свойств эллиптичности системой дифференциальных уравнений трехмерной линеаризованной теории устойчивости упругих тел. Указанная континуальная теория позволяет определить теоретические пределы прочности при сжатии композитов.

Необходимо отметить, что *более 35 лет назад* указанная континуальная теория разрушения композитов, также основанная на критерии потери свойств эллиптичности, была предложена в статьях Guz [26] за 1969 г. и [29] за 1971 г. Подход Guz (1969, 1971) наряду с определением теоретических пределов прочности на сжатие также позволяет определить поверхности, по которым распространяется разрушение, т.е. является более общим по сравнению с результатами Fu and Zhang (2006). В последующие годы в периодических изданиях были опубликованы многочисленные результаты, полученные на основе подхода Guz (1969, 1971). Эти результаты обобщены на стр. 78 – 144 в монографии Guz [54] за 1990 г., которая представлена в LIBRARY OF CONGRESS (USA) (Access: Jefferson or Adams Bldg General or Area Studies Rms). В краткой форме эти результаты также представлены на стр. 107 – 146 Т. 5 многотомной (в 12 томах) монографии [145] за 1993 – 2003 гг. Эта монография также представ-

лена в LIBRARY OF CONGRESS (USA) (Access: Jefferson or Adams Bldg General or Area Studies Reading Rms, Call number: TA.418.9.C6M435 1993).

На *английском языке* результаты, полученные на основе подхода Guz (1969, 1971), представлены в многочисленных публикациях в периодических изданиях и доклады-вались на многочисленных научных конференциях. Для примера укажем публикации Guz [292] за 1982 г., [299] за 1985 г., [302] за 1986 г., [305] за 1987 г., [307] за 1989 г., [317] за 1993 г., [320] за 1996 г., [323] за 1997 г., [326] за 1998 г. и [336] за 2000 г. Эти результаты в виде статьи Guz [325] за 1998 г. вошли в **encyclopedia** (FRACTURE. A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Edited by Genady P.Cherepanov. – Krieger Publ. Company, Florida, USA. – 1998. – 870 p.). Результаты по анализу явления потери свойств эллиптичности также на стр. 413 – 430 представлены в монографии Guz [334] за 1999 г. ...»

Из информации, представленной выше в копии части письма автора настоящей обзорной статьи в редакцию журнала «Int. J. Solids Structures», следует, что авторы Fu and Zhang и их статья за 2006 г. *выходят за пределы трех позиций*, указанных в начале п. 6.6.

Вышеизложенными сведениями в **Примерах 1 – 3** ограничимся при анализе повторения другими авторами результатов, представленных в настоящей обзорной статье и полученных по **Проблемам 1 – 8** неклассической механики разрушения в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ.

6.7. О повышении объективности цитирования. В предыдущем пункте (п. 6.6) проведен анализ трех Примеров рассмотрения более частных результатов (по сравнению с результатами других авторов, которые опубликованы *ранее*) по неклассическим проблемам механики разрушения без соответствующего цитирования *ранее полученных более общих результатов других авторов*. Таким образом, все три обсуждаемых Примера характеризуются *отсутствием объективного цитирования*.

К сожалению, аналогичная ситуация сравнительно часто возникает и в других научных направлениях. Целесообразно отметить, что, по-видимому, не возникла бы необходимость рассмотрения *трех позиций*, сформулированных в начале п. 6.6, если бы выдерживался *достаточно высокий уровень объективности цитирования*; в указанном случае авторы статей, анализ которых выполнен в п. 6.6, очевидно, не могли бы опубликовать свои статьи, так как из обзора литературы или из Введения в эти статьи следовало бы, что предлагаемые для публикации их статьи содержат результаты, которые являются частным случаем ранее опубликованных результатов. Необходимость повышения объективности цитирования, точнее уровня объективности цитирования, также следует из ситуации, которая сложилась в последнее время в процессе оценивания результатов научной работы. В настоящее время для оценки отдельных статей, отдельных журналов, отдельных монографий и работы отдельных ученых, в основном, применяются библиометрические методы, основанные на *анализе цитируемости* (статей, журналов, монографий, отдельных ученых и т.д.); в связи с этим следует вывод, что *цитируемость должна иметь объективный характер*.

Анализ объективности цитирования проводился в краткой форме в статье (Гузь А.Н. // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 11. – С. 3 – 29) на стр. 22 – 29, где рассмотрены более подробно также **Примеры 2 и 3**, краткая информация о которых представлена в п. 6.6 настоящей обзорной статьи; в результате указанного анализа сформулированы выводы, которые приводятся ниже.

Выводы.

1. Проблема *обеспечения объективности цитирования* в публикациях в периодических изданиях (журналах) существует и является актуальной.
2. В процессе становления информационного научного пространства проблема обеспечения объективности цитирования *является наиболее слабым звеном*.
3. Подходы к обеспечению объективности цитирования в периодических (и других) изданиях *еще не разработаны*.

В вышеуказанной статье было сформулировано Предложение общего характера, относящееся ко всей системе публикаций результатов научных исследований в пери-

одических изданиях и способствующее повышению объективности цитирования; ниже обсуждаемое Предложение излагается повторно.

«Предложение. По мнению автора настоящей статьи наиболее активным образом можно способствовать обеспечению объективности цитирования в публикациях в научных и научно-технических журналах, если предусмотреть в самой структуре публикуемых статей необходимые и обязательные для выполнения пункты. Так, например, в настоящее время в подавляющем большинстве научных и научно-технических журналов во всех публикуемых статьях представлены на английском языке следующие пункты: Abstract или Summary; Key words.

В качестве возможной акции общего характера, обеспечивающей объективность цитирования и новизну публикуемых результатов, можно предложить ввести в структуру статей следующий пункт:

Новизна результатов и объективное цитирование в этой статье обеспечивается базой данных ();

Novelty of the results and objective citation in this paper are confirmed by database (). (6.13)

Авторы каждой публикуемой статьи в круглые скобки выше помещают название международной базы данных, в пределах которой авторы провели информационный поиск; при этом *за результаты информационного поиска несут ответственность, естественно, авторы публикуемой статьи.* Безусловно, предпочтительным является введение вышесформулированного пункта на английском языке. Очевидно, что принятие вышесформулированного Предложения в определенной мере усложнит работу авторов публикуемых статей при подготовке статьи для представления в журнал. Все же принятие вышесформулированного Предложения весьма существенно повысит ответственность авторов публикаций за *новизну результатов и объективное цитирование*, что чрезвычайно важно для мирового научного сообщества при становлении информационного научного пространства.»

Вышеизложенное **Предложение** (Гузь А.Н. // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 11. – С. 3 – 29) было обсуждено в июле 2007 г. в международном интернет-журнале **iMechanica, web of mechanics and mechanics** [http:// www.imechanica.org](http://www.imechanica.org) (6.14)

под названием «Objective citation – a proposal from the Timoshenko Institute». Обсуждение было организовано проф. Эндриу Норрисом (Mechanical & Aero-space Engineering, Rutgers University, NJ, USA). Необходимо отметить, что журнал (6.14) является только электронным и пользуется сервером Гарвардской школы инженерных и прикладных наук (Harvard School of Engineering and Applied Sciences). Информация об обсуждении и его анализ представлены в статье (Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я. // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 3. – С. 3 – 22). Участники вышеуказанной дискуссии в журнале (6.14) высказывали различные соображения, но из предметных соображений можно сделать следующий общий вывод – *обсуждаемая проблема имеет место, но ее решение не является простым.*

Автору **Предложения (6.13)** наиболее импонируют соображения проф. Э.Норриса по этому вопросу, которые на английском языке изложены в начале стр. 11 вышеуказанной статьи (Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я.); ниже на этой же стр. 11 приведен перевод на русский язык обсуждаемых соображений проф. Э.Норриса. Для сведения читателей необходимо отметить, что в русском переводе термин «заявление» (statement) соответствует Предложению (6.13); проф. Э.Норрис заявил:

«Что можно ожидать от добавления еще одного препятствия? Но я думаю, что такого рода заявление стоило бы включить. Оно заставило бы автора остановиться и подумать и дало бы читателю уверенность в статье. Оно также уменьшает бремя рецензента – я должен сказать – уменьшает обязанность рецензента быть еще детективом по литературе. И это могло бы улучшить проблему привлечения компетентных рецензентов».

Вышеизложенными сведениями, вселяющими оптимизм и надежды, ограничимся при обсуждении проблемы о повышении уровня *обеспечения объективности цитирования* в научных публикациях. Все же основной вывод заключается в том, что в обсуждаемой проблеме последовательные действия и ожидаемые результаты *еще впереди*; хотя автор настоящей обзорной статьи убежден, что **Предложение (6.13)** в решении обсуждаемой проблемы внесет соответствующий вклад.

Примечание 6.6. Материал, изложенный в настоящем п. 6.7, относится не только к **Проблемам 1 – 8**, рассматриваемым в настоящей обзорной статье, но и *ко всем публикациям научных результатов*. Целесообразность включения материала п. 6.7 в §6, посвященный анализу результатов по **Проблеме 4** (*хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин*), обосновывается тем, что в §6 включен п. 6.6, в котором выполнен анализ **Примеров 1 – 3** с явным нарушением объективности цитирования.

§7. Проблема 5. Хрупкое разрушение в виде «размочаливания» при растяжении или сжатии композитных материалов вдоль армирующих элементов.

В настоящем параграфе в весьма краткой форме (даже по сравнению с **Проблемой 4**, которая обсуждена в предыдущем §6) представлены основные результаты по рассматриваемой **Проблеме 5**, полученные по тематике отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, начиная с 1983 г.; при этом изложение обсуждаемых результатов представлено в стиле, анонсированном во Введении (часть I) в данную обзорную статью (без чрезмерного привлечения аспектов математического характера).

7.1. Введение. Основные результаты по рассматриваемой проблеме получены в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ и в последующем развивались в Азербайджане и Турции; первые результаты представлены в публикациях за 1983 – 1986 гг. [45, 46, 295, 296, 4, 191 – 194, 5, 176, 177, 6, 178], первыми публикациями были, по-видимому, статьи [45, 46] автора настоящей обзорной статьи. Основные результаты представлены в монографиях [54] (гл. 7) за 1990 г., [145] (т. 4) за 1995 г., [197] за 2000 г., [57] (т. 2, гл. 11) за 2008 г. и в других монографических изданиях; причем монография [197] на английском языке издана в двух вариантах – в твердом переплете (ISBN 0-7923-6477-5) и в мягком переплете (ISBN 1-4020-0383-8). Обсуждаемые результаты вошли в обзорные статьи [196, 198, 199], которые посвящены изложению и обсуждению исключительно **Проблемы 5**, а также в обзорные статьи [325, 329, 336, 347, 350], которые посвящены изложению и обсуждению всех вопросов, относящихся ко всем неклассическим проблемам механики разрушения. В список литературы к настоящей обзорной статье вошли статьи [1 – 7, 44, 45, 176 – 185, 189 – 195, 200 – 203, 205 – 208, 210, 211, 295, 296], в которых представлены основные результаты, относящиеся к **Проблеме 5**; дополнительные сведения о публикациях по рассматриваемому вопросу можно получить из списков литературы к монографиям [54], [145] (т. 4), [197] и [57] (т. 2).

По рассматриваемому научному направлению подготовлена и защищена диссертация на степень доктора физико-математических наук (DSc) С.Д.Акбаровым.

Механизм разрушения, рассматриваемый в настоящем параграфе (§7), как уже отмечалось в п. 1.3 §1 (часть I настоящей обзорной статьи) назван «размочаливанием». Обсуждаемый механизм разрушения не наблюдается для однородных материалов (к которым условно можно отнести металлы и сплавы при исследовании их на уровне континуальных представлений) и является характерным для композитных материалов с четко выраженным направлением преимущественного армирования.

Этот механизм заключается в разделении материала на отдельные части вдоль направления действия *сжимающей нагрузки* при условии, что сжимающая нагрузка направлена вдоль направления армирования в однонаправленных композитах или в одном из направлений армирования в композитах с явно выраженным направлением преимущественного армирования. Необходимо отметить, что некоторые авторы связывают возникновение явления «размочаливания» *при сжатии* с тем, что при этом (в рамках континуальных представлений) *поперечное удлинение* (за счет коэффициента Пуассона) достигает *предельных значений*. В связи с этим заметим, что явление «размочаливания» наблюдается также и *при растяжении* вдоль направления преимущественного армирования; такой пример приведен на Рис. 0.18 Введения (стр. 64) [57]

(т. 1), который заимствован из монографии [143] (с. 46) по списку литературы к монографии [57]. Вышеприведенный пример разрушения «размочаливанием» при *растяжении* никак не может быть объясним на основании отмеченного подхода в рамках континуального представления (*поперечное удлинение или укорочение достигает предельных значений*), так как при *растяжении* происходит поперечное сжатие, а композит разрушается *вдоль* направления действия растягивающей нагрузки (перпендикулярно поперечному укорочению).

Таким образом, приходим к выводу, что в обсуждаемом механизме разрушения «размочаливанием», по-видимому, имеет место более сложный механизм разрушения в микроструктуре композита.

Также целесообразно отметить, что даже в случае, казалось бы, успешного применения концепции предельного поперечного удлинения в случае *сжатия* однонаправленных композитов все же остается невыясненным механизм разрушения в микроструктуре, поскольку концепция предельного поперечного удлинения оперирует с интегральными характеристиками (с точки зрения механики микроструктуры) и сила не действует в поперечном направлении.

Учитывая вышеизложенные во Введении (п. 7.1) сведения, ниже в настоящем §7 кратко рассмотрим информацию по следующим вопросам применительно к **Проблеме 5**: рассмотрение экспериментальных исследований; объяснение механизма разрушения «размочаливанием» на модельных представлениях; сведения об аналитических и численных исследованиях применительно к обсуждаемому объяснению механизма разрушения «размочаливанием». При изложении вышеотмеченных результатов будем следовать обзорным статьям [336] за 2000 г., [347] за 2006 г. и [350] за 2009 г.

7.2. Экспериментальные исследования. Основные публикации по результатам экспериментальных исследований относятся к случаю разрушения «размочаливанием» при *сжатии*. Так, на Рис. 7.1 показан характер разрушения однонаправленного бороалюминиевого композита при одноосном *сжатии* вдоль направления армирования (вдоль волокон бора). Отметим, что Рис. 7.1 соответствует Рис. 11 обзорных статей [336, 350]. Описание рассматриваемого на Рис. 7.1 бороалюминиевого композита представлено в **Примере** в заключительной части п. 3.3.4.1 (часть II настоящей обзорной статьи). Следует отметить, что для реализации разрушения в виде «размочаливания», которое представлено на Рис. 7.1, принимались дополнительные приемы, чтобы исключить разрушение в виде смятия торцов, которое представлено на Рис. 5.1 и которое является предметом исследования в §5 настоящей обзорной статьи (часть II статьи).

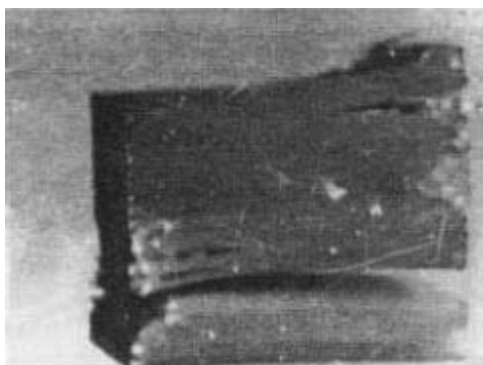


Рис. 7.1

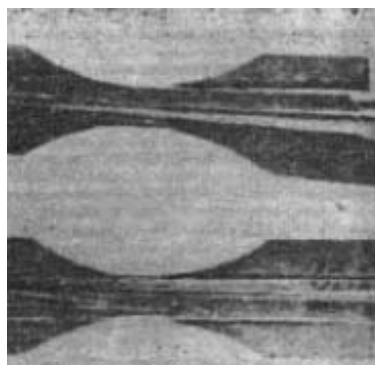


Рис. 7.2

На Рис. 7.2 показан характер разрушения однонаправленного стеклопластика при одноосном *сжатии* вдоль направления армирования (вдоль волокон стекла). Отметим, что Рис. 7.2 соответствует Рис. 12 обзорных статей [336, 350]. Рис. 7.2 представлен на стр. 110 монографии [113] из списка литературы к двухтомной монографии [57], в указанной монографии [113] также приведено описание соответствующих экспериментальных исследований. Характерным для разрушения, представленного на Рис. 7.1 и на Рис. 7.2, является полное разрушение по плоскостям и поверхностям,

которые расположены вдоль армирующих элементов (вдоль волокон) для однонаправленных волокнистых композитов. Следовательно, вполне логично ожидать, что обсуждаемый вид разрушения возникает в результате действия сил, направленных перпендикулярно к армирующим элементам.

На Рис. 7.3 показан характер разрушения стеклопластика ШПН (продольно-поперечной намотки) при одноосном *сжатии* вдоль направления армирования (вдоль волокон стекла в одном из характерных слоев). Отметим, что Рис. 7.3 соответствует Рис. 13 обзорных статей [336, 350]. Также отметим, что Рис. 7.3 представлен на стр. 81 монографии [9] из списка литературы к двухтомной монографии [57]. В образцах, разрушенный вид которых представлен на Рис. 7.3, продольно-поперечная намотка осуществлялась вдоль горизонтальной и вертикальной осей на Рис. 7.3; таким образом и в рассматриваемом на Рис. 7.3 случае разрушение возникало по плоскостям и поверхностям, которые расположены вдоль армирующих элементов в одном из характерных слоев.

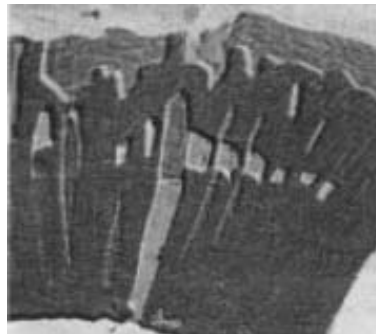


Рис. 7.3

Примеры разрушения «размочаливанием», которые представлены на Рис. 7.1 – 7.3, относятся к различным композитам и получены применительно к случаю одноосного *сжатия*. Во Введении (п. 7.1) в настоящий §7 указан пример разрушения «размочаливанием», который относится к случаю одноосного *растяжения*; ниже обсуждаемый пример рассмотрим более подробно. Соответствующее разрушение представлено на Рис. 7.4, который заимствован со стр. 46 монографии [143] по списку литературы к двухтомной монографии [57]. В соответствии с описанием на стр. 46 монографии [143] из списка [57] на Рис. 7.4 показан характер разрушения при *растяжении* композита вдоль направления армирования; при этом разрушение (разделение на отдельные продольные части) началось при наличии местного единичного искривления в структуре композита.



Рис. 7.4

Из анализа результатов экспериментальных исследований, представленных на Рис. 7.1 – 7.4, следует, что основными специфическими особенностями разрушения «размочаливанием» можно считать следующее:

1. Этот тип разрушения встречается *при сжатии* и в ряде случаев *при растяжении* однонаправленных волокнистых и слоистых композитов при действии нагрузки вдоль волокон и слоев;

2. Этот тип разрушения проявляется или заключается в общем (не локальном) разрушении по плоскостям и поверхностям, которые расположены параллельно армирующим элементам;

3. Этот тип разрушения реализуется, если принимаются дополнительные приемы, исключающие реализацию разрушений другого типа.

Вышеприведенные результаты анализа экспериментальных исследований по разрушению «размочаливанием» (в виде трех специфических особенностей) применяются в следующем пункте (п. 7.3) при объяснении механизма обсуждаемого вида разрушения.

7.3. Объяснение механизма разрушения в виде «размочаливания». Обсуждаемое в настоящем п. 7.3 объяснение представлено в достаточно краткой форме, соответствующей обзорным статьям [336] за 2000 г. и [350] за 2009 г.; при этом используются результаты автора настоящего обзора и его учеников, которые изложены в статьях, указанных во Введении (п. 7.1) в §7.

Необходимо отметить, что рассматриваемый механизм разрушения «размочаливанием» возникает при действии нагрузки вдоль армирующих элементов, и разрушение реализуется по плоскостям и поверхностям, которые расположены вдоль армирующих элементов. Все же возникновение этого механизма разрушения как при сжатии вдоль армирующих элементов, так и в ряде случаев и при растяжении вдоль армирующих элементов позволяет исключить из рассматриваемого механизма разрушения различного рода явления, связанные с потерей устойчивости. Таким образом, при одноосном растяжении – сжатии вдоль армирующих элементов наиболее вероятным является следующий механизм разрушения.

Рассматриваемое разрушение «размочаливанием» может возникать лишь за счет внутренних сил (напряжений), которые действуют перпендикулярно к направлению внешней нагрузки и возникают в результате влияния микроструктуры композита, или же за счет соответствующих касательных напряжений.

Таким образом, необходимо определить механизм возникновения указанных напряжений в микроструктуре композита и выяснить возможность достижения этими напряжениями в микроструктуре предельных значений, соответствующих указанному виду разрушения, при условии, что напряжения вдоль направления армирования (вдоль направления приложенных внешних нагрузок) не достигают предельных значений. Из многочисленных исследований общеизвестным является тот факт, что в микроструктуре композитных материалов имеются различного типа искривления; таким образом, практически всегда есть возможность появления различных напряжений в микроструктуре композита.

С учетом вышеизложенных сведений и соображений в работах автора и его учеников впервые было предложено объяснение механизма разрушения «размочаливанием» за счет внутренних напряжений, которые возникают вследствие искривлений в микроструктуре и действуют на площадках, нормаль к которым совпадает с нормалью к искривленной границе раздела сред.

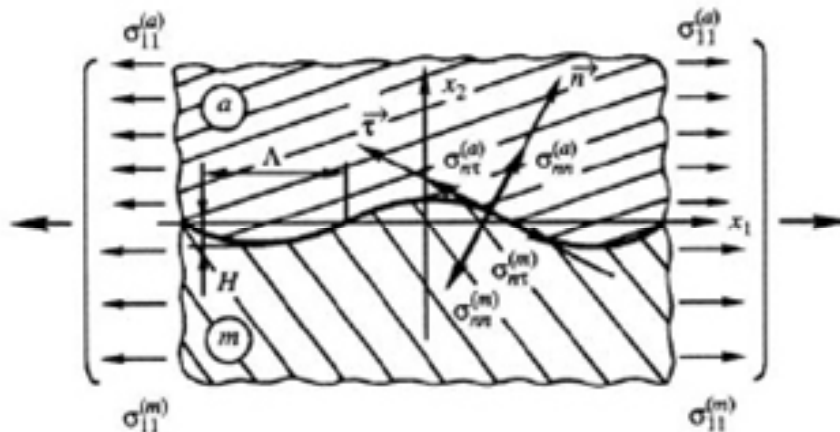


Рис. 7.5

Рассмотрим предложенный подход применительно к микроэлементу на Рис. 7.5, включающему искривленную границу раздела армирующего элемента и матрицы; все величины, относящиеся к армирующему элементу, отмечены индексом «а» и все величины, относящиеся к матрице, отмечены индексом «m». На Рис. 7.5 введены обозначения: H – стрела подъема и Λ – длина полуволны искривлений (рассматривается для примера периодическое искривление); \mathbf{n} и $\mathbf{\tau}$ – орты нормали и касательной к искривленной границе раздела; $\sigma_{11}^{(a)}$ и $\sigma_{11}^{(m)}$ – напряжения вдоль направления внеш-

ней нагрузки, которые уравниваются с внешней нагрузкой; $\sigma_{nn}^{(a)}$, $\sigma_{n\tau}^{(a)}$, $\sigma_{nn}^{(m)}$ и $\sigma_{n\tau}^{(m)}$ – напряжения в армирующем элементе и матрице, которые приложены в искривленной границе и являются самоуравновешенными в пределах каждого периода искривлений. Необходимо отметить, что последние напряжения меняют знак через полупериод искривлений вдоль оси $0x_1$ (Рис. 7.5); следовательно, *при растягивающей или сжимающей внешней нагрузке всегда на отдельных участках искривленной границы возникают растягивающие напряжения*, которые могут привести к исчерпанию адгезионной прочности. Аналогичные соображения имеют место и по отношению к касательным напряжениям.

Рассмотрим некоторые оценки количественного характера. Так, для не очень больших искривлений выполняются условия

$$H \ll \Lambda. \quad (7.1)$$

Очевидно, что для композитов, армированных в направлении оси $0x_1$ (Рис. 7.5), при рассматриваемом нагружении имеет место неравенство

$$\left| \sigma_{11}^{(m)} \right| \ll \left| \sigma_{11}^{(a)} \right| \quad (7.2)$$

(в силу естественного неравенства следующего типа:

$$E_m \ll E_a, \quad (7.3)$$

где E_a и E_m – модули Юнга армирующих элементов и матрицы) при одинаковом удлинении армирующего элемента и матрицы в направлении оси $0x_1$ (Рис. 7.5).

В связи с рассматриваемым видом нагружения для упругих моделей (хрупкое разрушение) также являются справедливыми следующие соотношения:

$$\sigma_{11}^{(a)} \approx E_a \cdot k_a; \quad \sigma_{11}^{(m)} \approx E_m \cdot k_m, \quad (7.4)$$

где k_a и k_m – коэффициенты.

В силу условия непрерывности вектора напряжений на искривленной границе имеют место также следующие соотношения:

$$\sigma_{nn}^{(a)} = \sigma_{nn}^{(m)}; \quad \sigma_{n\tau}^{(a)} = \sigma_{n\tau}^{(m)}. \quad (7.5)$$

В силу условий (7.5) на границе раздела для напряжений $\sigma_{nn}^{(m)}$ и $\sigma_{n\tau}^{(m)}$ уже нельзя получить оценки типа второго выражения (7.4); следовательно, для этих напряжений на границе раздела, несмотря на наличие неравенства (7.3), уже нельзя получить оценку типа (7.2). Таким образом, на границе раздела напряжения $\sigma_{nn}^{(m)}$ и $\sigma_{n\tau}^{(m)}$ могут быть значительно большими по величине, чем это можно получить на основе оценки типа второго выражения (7.4).

Учитывая вышеизложенные оценки и соображения, необходимо выяснить следующую ситуацию. Будем считать, что напряжения $\sigma_{11}^{(a)}$ и $\sigma_{11}^{(m)}$ (Рис. 7.5) меньше соответствующих пределов прочности отдельно для армирующих элементов и матрицы

$$\left| \sigma_{11}^{(a)} \right| < \Pi_1^{\pm(a)}; \quad \left| \sigma_{11}^{(m)} \right| < \Pi_1^{\pm(m)}. \quad (7.6)$$

Условия (7.6) обеспечивают, что не возникает разрушение композита в связи с разрывом армирующих элементов и матрицы под действием напряжений, направленных вдоль направления действия внешней нагрузки; заметим, что условия (7.6) могут выполняться за счет ограничений на величину внешней нагрузки. Таким образом, *необходимо доказать, что существуют разумные пределы изменения величин H и Λ (Рис. 7.5), удовлетворяющие условию (7.1), при которых также выполняются*

условия (7.6), а для напряжений $\sigma_{nn}^{(m)}$ и $\sigma_{n\tau}^{(m)}$ на границе раздела при этом выполняются следующие условия:

$$\left| \sigma_{nn}^{(m)} \right| = A_p^+ \quad \text{или} \quad \left| \sigma_{n\tau}^{(m)} \right| = A_c^+, \quad (7.7)$$

где A_p^+ и A_c^+ – пределы адгезионной прочности на растяжение и сдвиг применительно к границе раздела армирующих элементов и матрицы. Необходимо также отметить, что для большинства конструкционных композитов в силу наличия различных дефектов на границе раздела армирующих элементов и матрицы обычно выполняются следующие условия:

$$A_p^+ < \Pi_1^{+(m)}. \quad (7.8)$$

Необходимые условия. Таким образом, для предлагаемого механизма разрушения «размочаливанием» необходимо доказать, что существуют разумные пределы изменения параметров H и Λ (Рис. 7.5), при которых с учетом выполнения условий (7.1) и (7.6) могут возникать $\sigma_{nn}^{(m)}$ и $\sigma_{n\tau}^{(m)}$ (на границе раздела) не меньше по величине напряжений $\sigma_{11}^{(m)}$ (Рис. 7.5).

Заметим, что при решении указанного вопроса в случае применения континуальной теории необходимо построить такую континуальную теорию, которая позволяла бы определять самоуравновешенные (в пределах каждого искривления) напряжения; обычно же континуальные теории позволяют определять напряжения на площадках, размеры которых существенно превосходят размеры искривлений.

Примечание 7.1. Целесообразно отметить, что вышесформулированные **Необходимые условия** объяснения механизма разрушения «размочаливанием» получены в рамках модельных представлений для любой рассматриваемой пары материалов (матрица, наполнитель). Таким образом, выполнение **Необходимых условий** для конкретной пары материалов (матрица и наполнитель при учете их механических и прочностных свойств) свидетельствует о том, что механизм разрушения «размочаливанием» для обсуждаемой пары материалов может возникать, если в некотором объеме композита, созданного из этой пары материалов, **существуют периодические искривления** в структуре композита, характеризуемые значениями параметра $H\Lambda^{-1}$ (Рис. 7.5) в определенном интервале.

Таким образом, для выяснения возможности выполнения *достаточных условий* объяснения механизма разрушения «размочаливанием» следует, прежде всего, показать, что в *реальных* композитах существуют определенные части материала с *периодическими искривлениями в структуре*.

По-видимому, можно выделить два случая существования периодических искривлений в структуре композита. *Первый случай*, когда наличие периодических искривлений в структуре композита является непременным свойством этих материалов, что учитывается в технологии их создания. *Второй случай*, когда наличие периодических искривлений в структуре композита является нежелательным следствием технологических процессов, связанным или с их несовершенством или вызванным влиянием начальных (остаточных) напряжений, которые называются еще технологическими



Рис. 7.6

напряжениями.

Рассмотрим пример для *первого* вышеуказанного случая, представленный на Рис. 7.6, который помещен на стр. 21 монографии [143] в списке литературы двухтомной монографии [57]. На указанном рисунке показана структура композита (пространственно-сшитого стеклотекстолита), где четко видны синусоидальные искривления армирующих элементов, которые не связаны с погрешностями техно-

логии или с влиянием технологических напряжений, и являются неперенным свойством этого композита.

Рассмотрим пример для *второго* вышеуказанного случая, представленный на Рис. 7.7, который соответствует Рис. 4.12, а на стр. 103 монографии [77] в списке литературы двухтомной монографии [57]. На указанном рисунке показана часть среза толстостенной цилиндрической оболочки из эпоксифенольного стеклопластика, полученная методом намотки на оправку. На этом рисунке отчетливо видны локальные периодические искривления армирующих элементов, полученные вследствие потери устойчивости при охлаждении от температуры 160°C при действии технологических напряжений.



Рис. 7.7

Таким образом, из приведенных примеров, представленных на Рис. 7.6 и 7.7, следует, что в *реальных* (не в модельных) композитах (Рис. 7.6) и в элементах конструкций (Рис. 7.7) существуют, по крайней мере, части материала с периодическими искривлениями в структуре. Следовательно, учитывая сведения, изложенные в настоящем п. 7.3, приходим к выводу, что предложенное и изложенное в п. 7.3 объяснение механизма разрушения в виде «размочаливания» представляется достаточно реалистичным.

Вышеизложенными в п. 7.3 сведениями ограничимся при обсуждении предложенного объяснения механизма разрушения в виде «размочаливания»; дополнительные сведения можно получить из монографии [197] (например, pp. 367 – 371) и монографии [57] (т. 2, например, сс. 479 – 482).

7.4. О разработке основ механики композитов с искривленными структурами.

Из предыдущего п. 7.3 следует, что для объяснения механизма разрушения в виде «размочаливания» и для определения параметров структуры материала и величины нагрузки, соответствующих возникновению обсуждаемого типа разрушения, необходимо иметь достаточно точную информацию о напряженно-деформированном состоянии композитов с искривленными структурами.

7.4.1. Введение. В связи с этим в настоящем п. 7.4 приводятся в весьма краткой форме основные сведения по разработке основ механики композитов с искривленными структурами, позволившие провести в аналитической и численной форме исследования напряженно-деформированного состояния таких композитов; дополнительные сведения можно получить в монографиях [54] (гл. 7) за 1990 г., [145] (т. 4) за 1995 г. и [57] (т. 2, гл. 11) за 2008 г., а также в монографии [197] на английском языке, которая полностью посвящена обсуждаемому вопросу.

Поскольку в настоящем §7 рассматривается **Проблема 5** (*Хрупкое разрушение в виде «размочаливания» при растяжении или сжатии композитных материалов вдоль армирующих элементов*), то для исследования *хрупкого* разрушения применяется *модель линейно упругого тела*.

Целесообразно отметить, что в механике композитов с искривленными структурами проводится классификация искривлений, выделяя крупномасштабные и мелкомасштабные искривления.

Под крупномасштабными искривлениями обычно понимаются искривления, геометрические параметры (стрела подъема, длина волны) которых сравнимы с минимальными размерами элемента конструкции или образца. Постановка задач для композитов и элементов конструкций из них в случае крупномасштабных искривлений наполнителя, методы решения задач и результаты исследования задач представлены, например, на русском языке в статье [17] за 1982 г. из списка литературы к монографии [90] или на английском языке в статье [93] из списка литературы к монографии [423].

Под мелкомасштабными искривлениями обычно понимаются искривления, геометрические параметры которых значительно меньше минимальных размеров рассматриваемого элемента конструкции или образца. В настоящем п. 7.4 все обсуждаемые подходы и полученные на их основе результаты применительно к анализу механизма раз-

рушения в виде «размочаливания» относятся к механике композитов с *мелкомасштабными искривлениями* армирующих элементов, что следует, очевидно, из Рис. 7.5 – 7.7.

Результаты по построению механики композитов с искривленными структурами, которые обсуждаются в настоящем п. 7.4, получены, как и в других разделах механики композитов, с привлечением общепринятых *двух подходов*: *первый подход* основан на континуальных подходах; *второй подход* основан на модели кусочно-однородного тела; общеизвестно и общепринято, что *второй подход* является наиболее строгим и точным. В рамках континуальных подходов (применительно к исследованиям п. 7.4 по механике композитов с искривлениями в структуре) разработаны *теории, позволяющие определять напряжения на площадках, размеры которых соизмеримы или несколько меньше полупериодов искривлений в структуре композита*. Необходимо отметить, что ранее разработанные другими авторами континуальные теории позволяют определять напряжения на площадках, *которые значительно больше полупериодов искривлений в структуре композита, что не дает возможности применять их к исследованию механизма разрушения* в виде «размочаливания».

Учитывая вышеизложенные сведения вводного характера, ниже в настоящем п. 7.4 в весьма краткой форме рассмотрим информацию для композитов с искривлениями отдельно для континуальных теорий и результатов на их основе, а также для модели кусочно-однородного тела и результатов на ее основе.

7.4.2. Континуальные теории и результаты на их основе. Необходимо отметить, что в обсуждаемом в п. 7.4.2 научном направлении первые результаты были опубликованы в статьях [45, 46, 295, 296] за 1983 г. автора настоящего обзора, при этом в [45], по-видимому, впервые была предложена континуальная теория для композитов с искривлениями, которая позволяла определять напряжения на площадках, размеры которых одного порядка или несколько меньше полупериодов искривлений. На Рис. 7.8 представлена, частично, расчетная схема статьи [45] для учета влияния искривлений армирующих элементов; построение соответствует континуальной теории достаточно подробно представлено в монографии [54] за 1990 г. на стр. 494 – 510 и также приведено в монографиях [145] (т.4) за 1995 г. на стр. 25 – 40, [197] за 2000 г. на pp. 13 – 28 и [57] (т. 2) за 2008 г. на стр. 440 – 464.

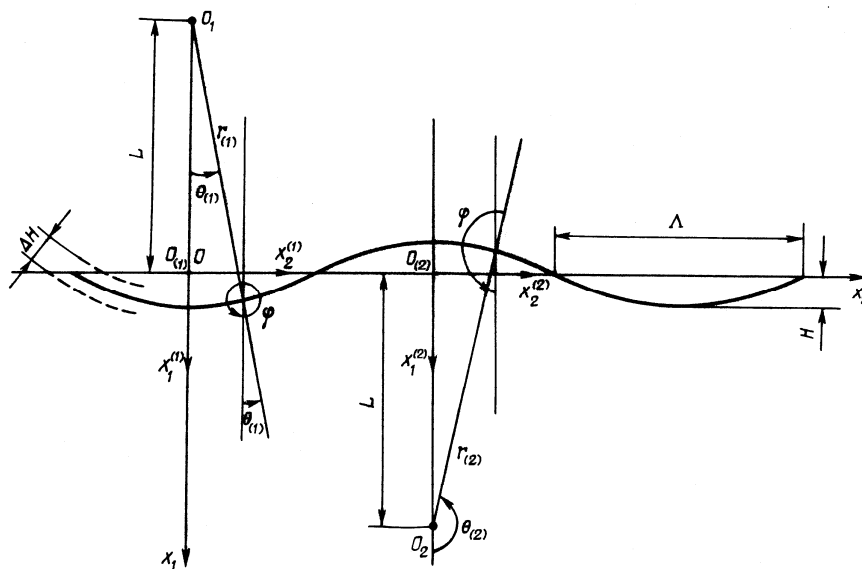


Рис. 7.8

Следуя вышеуказанным источникам, представим основные соотношения континуальной теории [45] для композитов с периодическими искривлениями (Рис. 7.8) в декартовых координатах x_j ($j = 1, 2, 3$) применительно к плоской задаче в плоскости (x_1, x_2) (Рис. 7.8), где ось $0x_3$ направлена перпендикулярно к плоскости Рис. 7.8; при

этом будем использовать обозначения L, H и Λ для величин, которые также указаны на Рис. 7.8, где ось Ox_2 направлена вдоль армирующих элементов.

Основные соотношения рассмотрим для геометрически линейных задач, в этом случае соотношения упругости имеют следующий вид

$$\sigma_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}; \quad i, j, \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (7.9)$$

где для составляющих тензора коэффициентов упругости имеет место соотношение

$$\mu_{ij\alpha\beta} = \mu_{ij\alpha\beta}^{(0)} + \varepsilon (\sin \pi \Lambda^{-1} x_2) \mu_{ij\alpha\beta}^{(1)} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi \Lambda^{-1} x_2) \mu_{ij\alpha\beta}^{(2)}. \quad (7.10)$$

В (7.10) и ниже через $\mu^{(0)}$ обозначен тензор коэффициентов упругости линейно упругого ортотропного тела с *прямолинейной* ортотропией, составляющие которого определяются из общеизвестного выражения

$$\mu_{ij\alpha\beta}^{(0)} = \delta_i^j \delta_\alpha^\beta A_{i\beta} + (1 - \delta_i^j) (\delta_i^\alpha \delta_j^\beta + \delta_i^\beta \delta_j^\alpha) G_{ij}. \quad (7.11)$$

Составляющие тензоров $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ определяются через коэффициенты упругости $A_{i\beta}$ и G_{ij} выражениями, которые приведены, например, в монографии [57] (т. 2) на стр. 454 – 456. Следует отметить, что *континуальная теория [45] для композитов с мелкомасштабными искривлениями построена с точностью до ε^2* , где параметр определяется выражением

$$\varepsilon = \frac{\Lambda}{\pi L} \approx \frac{8 H}{\pi L} \ll 1, \quad (7.12)$$

и коэффициенты упругости $A_{i\beta}$ и G_{ij} во всех соотношениях указанной теории являются усредненными коэффициентами упругости для рассматриваемого композита **без искривлений** (в рамках модели ортотропного тела с прямолинейной ортотропией).

Уравнения в перемещениях обсуждаемой континуальной теории имеют для материала, занимающего область D , вид

$$\begin{aligned} L_{ij} u_\alpha + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\sin \pi \Lambda^{-1} x_2) \mu_{ij\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right] u_\alpha + \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi \Lambda^{-1} x_2) \mu_{ij\alpha\beta}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right] u_\alpha = 0, \quad x_k \in D, \end{aligned} \quad (7.13)$$

где для дифференциальных операторов $L_{j\alpha}$ (дифференциальные операторы уравнений Ляме для ортотропного тела с прямолинейной ортотропией) введены следующие обозначения:

$$L_{j\alpha} = [A_{j\alpha} + (1 - \delta_j^\alpha) G_{j\alpha}] \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \alpha} + \delta_j^\alpha (1 - \delta_i^j) G_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \rho \delta_j^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}. \quad (7.14)$$

Граничные условия в напряжениях на части поверхности S_1 имеют обычно принятый вид

$$N_i \sigma_{ij} = P_j; \quad x_k \in S_1 \quad (7.15)$$

с учетом выражений (7.9) и (7.10).

Из выражений (7.13) следует, что основные уравнения обсуждаемой теории [45] являются уравнениями с периодическими коэффициентами, что и следовало ожидать, учитывая фрагмент из расчетной схемы, который представлен на Рис. 7.8.

Результаты на базе континуальной теории [45]. Остановимся на кратком перечне некоторых интересных, на взгляд автора, результатов, которые получены на базе континуальной теории [45].

1. При построении, обсуждении и анализе рассматриваемой теории было доказано следующее утверждение.

Утверждение. При незначительных искривлениях в структуре композита (при малых значениях ε из (7.12)) при построении теории в первом приближении (с точностью до ε) следует учитывать *не изменение значений упругих постоянных (в рамках модели ортотропного тела с прямолинейной ортотропией), а изменение типа симметрии анизотропного тела.*

Доказательство Утверждения, по существу, представлено выражениями (11.34) и (11.35) на стр. 453 монографии [57] (т. 2); при этом актуальность обсуждаемого Утверждения прокомментирована на стр. 454 вышеуказанной монографии.

2. Получено *единственное точное решение* (остается единственным и до настоящего времени) – задача о чистом сдвиге в плоскости $x_2 0x_3$ (Рис. 7.8); это *точное решение* подробно впервые представлено на стр. 13 – 14 статьи [295] за 1983 г.

3. Выполнен анализ колебаний композитов с искривленными структурами в статье [46] с привлечением вариационных методов.

4. Разработан общий метод решения задач теории [45] в статье [295] на основании представления основных соотношений в виде рядов по малому параметру (7.12).

5. С привлечением вышеуказанного метода получено решение [296] задач о квазиоднородных состояниях растяжения – сжатия и сдвигов.

6. На основе вышеотмеченных результатов и в соответствии с подходом, сравнительно подробно изложенным в п. 7.3, получены [296] (стр. 14) условия для геометрических параметров искривлений, когда возможно возникновение разрушения в виде «размочаливания»; для стеклопластика эти условия приведены ниже

$$H > 0,13\Lambda . \quad (7.16)$$

Вышеизложенные в статьях [45, 46, 295, 296] за 1983 г. результаты, полученные в рамках континуальной теории [45] композитов с искривленными структурами, в последующие годы вошли в соответствующие разделы монографий [54] за 1990 г., [145] (т.4) за 1995 г., [197] за 2000 г. и [57] (т. 2) за 2008 г.

Дальнейшее развитие континуальных теорий для композитов с искривленными структурами и исследование соответствующих конкретных задач представлено в статьях С.Д.Акбарова и его учеников, которые, частично, представлены во Введении в §7 (п. 7.1) и также, частично, включены в список литературы к настоящей обзорной статье; следует отметить, что указанные исследования выполнены, в основном, в Азербайджане и Турции и соответствующие результаты включены в монографии [145] (т.4) за 1995 г. и [197] за 2000 г.

7.4.3. Модель кусочно-однородной среды и результаты на ее основе. В рассматриваемой в настоящем §7 **Проблеме 5** (*Хрупкое разрушение в виде «размочаливания» при растяжении или сжатии композитных материалов вдоль армирующих элементов*), как и в **Проблеме 1** (*Разрушение в композитных материалах при сжатии вдоль армирующих элементов*) и в **Проблеме 3** (*Разрушение в виде смятия торцов при сжатии композитных материалов*), рассмотренных, соответственно в §3 и §5 (часть II настоящей обзорной статьи), исследования проводились с привлечением двух общеизвестных и общепринятых в механике композитов подходов. При первом подходе используется модель кусочно-однородной среды и при втором подходе композит моделируется однородным анизотропным материалом с усредненными характеристиками (континуальные теории); краткое и последовательное описание вышеуказанных двух подходов представлено в заключительной части п. 1.4.1 (часть I настоящей обзорной статьи).

Применительно к **Проблеме 5**, рассматриваемой в настоящем §7, краткая информация о результатах, полученных с привлечением второго вышеуказанного подхода (континуальная теория), представлена в предыдущем п. 7.4.2; в настоящем п. 7.4.3 представляется весьма краткая информация о результатах по **Проблеме 5** по слоистым и однонаправленным волокнистым композитам, полученным с привлечением первого подхода (модель кусочно-однородной среды).

Прежде всего, остановимся на постановках задач и методе их исследования. В рамках модели линейного упругого изотропного, в отдельных случаях ортотропного, тела рассматриваются статические (для слоистых композитов – плоские и пространственные, а для однонаправленных волокнистых композитов – пространственные) задачи применительно к композитам с искривленными структурами; при этом на границах – раздела наполнителя и связующего (interface) задаются условия непрерывности векторов напряжений и перемещений.

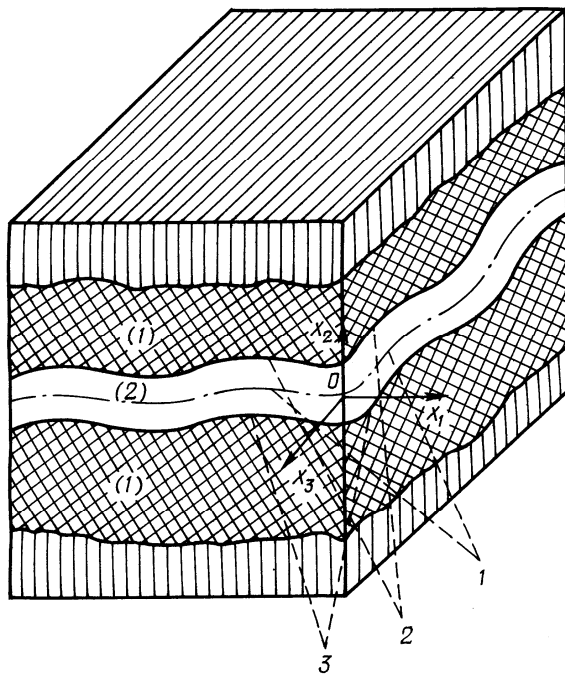


Рис. 7.9

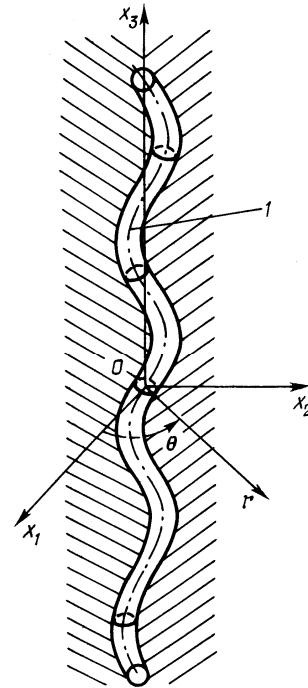


Рис. 7.10

На Рис. 7.9 представлен фрагмент слоистого композита, где все величины, относящиеся к матрице, отмечены индексом (1) и все величины, относящиеся к наполнителю, отмечены индексом (2). Со срединной поверхностью наполнителя, которая на Рис. 7.9 указана цифрой 1, связана декартова система координат (x_1, x_2, x_3) . Предполагается, что срединная поверхность слоя наполнителя задается уравнением

$$x_2 = F(x_1, x_3) = \varepsilon f(x_1, x_3), \quad (7.17)$$

где ε – малый параметр, удовлетворяющий условию

$$\varepsilon < 1. \quad (7.18)$$

Условия непрерывности векторов напряжений и перемещений формулируются на нижней (на Рис. 7.9 указана цифрой 3) и верхней (на Рис. 7.9 указана цифрой 2) поверхностях раздела (interface), в которые в силу зависимостей (7.17) будет входить малый параметр ε .

На Рис. 7.10 показан фрагмент однонаправленного волокнистого композита, на котором, для примера, выделено одно волокно. Далее, также для примера, рассмотрен случай, когда срединная линия волокна или линия центров поперечных нормальных (по отношению к искривленной линии) сечений (на Рис. 7.10 эта линия указана цифрой 1) является плоской кривой и расположена в плоскости $x_2 O x_3$; в указанном случае обсуждаемая линия центров может быть представлена уравнением

$$x_2 = F(x_3) = \varepsilon \delta(x_3); \quad x_1 = 0, \quad (7.19)$$

где ε – малый параметр, удовлетворяющий условию (7.18). Условия непрерывности векторов напряжений и перемещений формулируются на искривленной поверхности кругового цилиндра, которая является поверхностью раздела наполнителя и матрицы; сечение обсуждаемой поверхности раздела (interface) плоскостью $x_1 = 0$ на Рис. 7.10 показано двумя темными линиями, между которыми находится срединная линия волокна, на Рис. 7.10 показана штрихпунктирной линией. В силу выражений (7.19) в сформулированные указанным выше способом условия непрерывности входит малый параметр ε , удовлетворяющий условию (7.18).

Метод решения задач по определению напряженно-деформированного состояния композитов с искривленными структурами (плоские и пространственные задачи для слоистых композитов, пространственные задачи для однонаправленных волокнистых композитов) **в рамках модели кусочно-однородной среды** заключается в представлении всех искомым величин в виде рядов по малому параметру ε , который удовлетворяет условию (7.18). В результате приходим в каждом из приближений к соответствующей задаче для композита с неискривленными структурами, результаты из предыдущих приближений входят в правые части соответствующих условий непрерывности векторов напряжений и перемещений для рассматриваемого приближения.

Примечание 7.2. В вышеизложенном методе решения формулировка условий непрерывности векторов напряжений и перемещений осуществляется на искривленных поверхностях раздела (interface). При этом учитывается, что слои имеют постоянную толщину и волокна имеют постоянное поперечное круговое сечение, которые отсчитываются в нормальных поперечных сечениях по отношению к искривленным срединным линиям и срединным поверхностям. Для реализации указанной процедуры применяется параметрическое представление линий и поверхностей, что усложняет построение процедуры решения в аналитической форме. Необходимо отметить, что положение о постоянстве толщины слоев и формы поперечного сечения волокон применительно к наполнителю (армирующим элементам) в определенной мере соответствует конструкционным композитам.

Обсуждаемый метод исследования для композитов с искривленными структурами был предложен С.Д.Акбаровым и автором настоящей обзорной статьи применительно к слоистым композитам в статьях [4, 191] за 1984 г., [5, 193] за 1985 г. и в ряде других, а применительно к однонаправленным волокнистым композитам в статьях [192] за 1984 г., [5, 194] за 1985 г., [6] за 1986 г. и в ряде других. Вышеуказанные в статьях [4 – 6, 191 – 194] за 1984 – 1986 гг. результаты, полученные для композитов с искривленными структурами в рамках модели кусочно-однородной среды, в последующие годы вошли в соответствующие разделы монографий [54] за 1990 г., [145] (т. 4) за 1995 г., [197] за 2000 г. и в [57] (т. 2) за 2008 г.

Дальнейшее развитие механики композитов с искривленными структурами в рамках модели кусочно-однородной среды и исследование соответствующих конкретных задач представлено в статьях С.Д.Акарова и его учеников, которые, частично, указаны во Введении в §7 (п. 7.1) и также, частично, включены в список литературы к настоящей обзорной статье (часть III); следует отметить, что указанные исследования проведены, в основном, в Азербайджане и Турции и соответствующие результаты в сравнительно подробной форме включены в монографии [145] (т. 4) за 1995 г. и [197] за 2000 г.

Необходимо отметить, что в вышеуказанных монографиях [54, 145 т. 4, 197, 57 т. 2] и в статьях, указанных во Введении в §7 (п. 7.1), приведены многочисленные конкретные научные результаты, полученные в рамках модели кусочно-однородной среды с привлечением метода решения задач, краткая информация о котором представлена выше в настоящем п. 7.4.3. Не имея возможности изложить даже краткую информацию об основных результатах, ниже, в качестве примеров, приведем краткие сведения о двух интересных результатах.

Примеры результатов в рамках модели кусочно-однородной среды. Рассмотрим два примера для композитов с искривленными структурами в случае малых концентраций наполнителя. В этом случае задачи сводятся к бесконечному упругому пространству (матрице, все величины для которой отмечаются индексом « t ») с одним бесконечным в одном направлении искривленным армирующим элементом (наполнителем, все величины для которого отмечаются индексом « a ») при растяжении «на беско-

нечности» вдоль армирующего элемента. При исследовании явлений внутри композита в соответствии с **Примечанием 3.8** (часть II настоящей обзорной статьи) «на бесконечности» (вдоль армирующих элементов) задаются *одинаковые* деформации растяжения или сжатия для матрицы и армирующего элемента.

Пример 1. Слоистый композит с искривленными слоями. Плоская задача. Все дополнительные обозначения представлены на Рис. 7.11. Рассматривается плоская деформация в плоскости $x_1 0x_2$; следовательно, принимается, что искривление слоев не зависит от координаты x_3 . Отметим, что Рис. 7.11 соответствует поперечному сечению материала при $x_3 = 0$ и является частным случаем ситуации, представленной на Рис. 7.9. Для исследования применяется **метод решения задач**, краткая информация о котором представлена выше в настоящем п. 7.4.3.

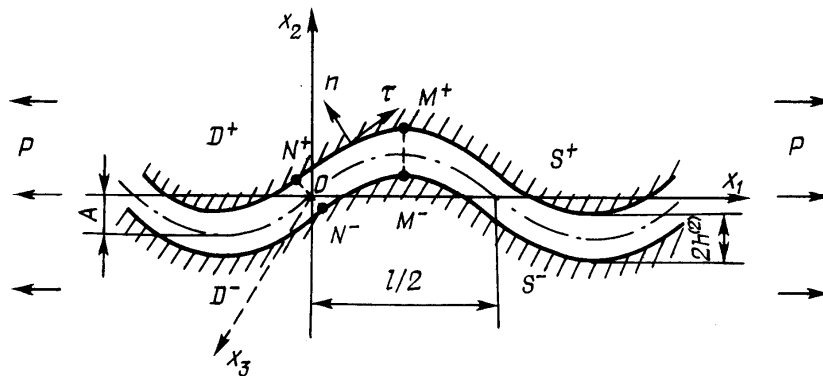


Рис. 7.11

Ограничимся рассмотрением случая, когда уравнение искривленной срединной поверхности армирующего элемента можно представить в следующем виде

$$x_2 = A \sin 2\pi l^{-1} x_1 = \varepsilon l \sin 2\pi l^{-1} x_1; \quad \varepsilon = A \cdot l^{-1}. \quad (7.20)$$

В соответствии с Рис. 7.11 в (7.20) введены обозначения: A – высота стрелы подъема; l – длина волны формы искривления. Согласно (7.17) случаю (7.20) соответствуют обозначения

$$F(x_1, x_2) = A \sin 2\pi l^{-1} x_1; \quad f(x_1, x_2) = l \sin 2\pi l^{-1} x_1; \quad \varepsilon = A \cdot l^{-1}. \quad (7.21)$$

Исследования проводились с учетом трех приближений по ε ; при этом определялись нормальные σ_{nn}^{\pm} и касательные σ_{nr}^{\pm} напряжения на линиях раздела (на Рис. 7.11 это линии S^{\pm}) свойств материала связующего и наполнителя (interface) в точках N^{\pm} и M^{\pm} на Рис. 7.11. Следует отметить, что указанные напряжения σ_{nn}^{\pm} и σ_{nr}^{\pm} на границах раздела являются самоуравновешенными в пределах каждого периода искривлений (Рис. 7.11). Вычисления проводились при следующих значениях параметров:

$$\nu_a = \nu_m = 0,3; \quad E_a \cdot E_m^{-1} = 20; 50; 100; 150. \quad (7.22)$$

Из анализа результатов для вышеуказанных случаев (7.22) сделан следующий вывод.

При $E_a \cdot E_m^{-1} \geq 50$ даже при сравнительно малых значениях ε (7.20) $\varepsilon \equiv A l^{-1} \geq 0,025$ значения нормальных самоуравновешенных напряжений, приложенных к границе раздела сред (interface), могут превосходить нормальные напряжения в матрице $\sigma_{11}^{(m)}$ (в случае отсутствия искривлений в структуре), которые уравниваются с внешними усилиями p (Рис. 7.11).

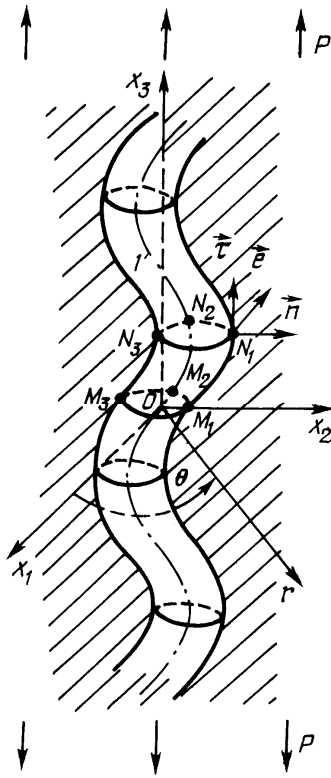


Рис. 7.12

Вышеуказанные результаты можно применять при обосновании предложенного объяснения механизма разрушения в виде «размочаливания»; предварительно обсуждаемые результаты надо дополнить анализом с привлечением числовых значений пределов прочности рассматриваемых связующего (матрицы) и наполнителя (армирующих элементов). Обсуждаемые результаты представлены в статье [4] за 1984 г.; в этой статье также изложены и другие интересные выводы, которые следуют из проведенного анализа. Рассматриваемые результаты в полном объеме включены в соответствующие разделы монографий [54, 145 т. 4, 197, 57 т. 2], где также приведены многочисленные результаты для композитов с различными искривлениями в структуре с учетом *взаимодействия этих искривлений*.

Пример 2. Волокнистый однонаправленный композит с искривленными волокнами. Пространственная задача. Все дополнительные обозначения представлены на Рис. 7.12; исследования проводятся в декартовых координатах (x_1, x_2, x_3) и в координатах круговой цилиндрической системы координат (r, θ, x_3) , которые также указаны на Рис. 7.12. Отметим, что Рис. 7.12 соответствует Рис. 7.10. Для исследования применяется **метод решения задач**, краткая информация о котором представлена выше в настоящем п. 7.4.3. Как и в случае на Рис. 7.10, в рассматриваемом Примере 2 принимается, что линия центров поперечных сечений волокна является плоской кривой, которая расположена в плоскости $x_1 = 0$ на Рис. 7.12.

Ограничимся рассмотрением случая, когда уравнение линии центров поперечных сечений искривленного волокна можно представить в следующем виде:

$$x_2 = A \sin 2\pi l^{-1} x_3 = \varepsilon l \sin 2\pi l^{-1} x_3; \quad x_1 = 0; \quad \varepsilon = A \cdot l^{-1}. \quad (7.23)$$

В соответствии с Рис. 7.12 в (7.23) введены обозначения: A – высота стрелы подъема и l – длина волны формы искривления применительно к линии центров поперечных сечений искривленного волокна. В соответствии с обозначениями (7.19) имеют место обозначения

$$F(x_3) = A \sin 2\pi l^{-1} x_3; \quad \delta(x_3) = l \sin 2\pi l^{-1} x_3; \quad x_1 = 0; \quad \varepsilon = A \cdot l^{-1}. \quad (7.24)$$

Исследования проводились с учетом трех приближений по ε ; при этом определялись нормальные σ_{nn} и касательные $\sigma_{n\tau}$ и $\sigma_{n\theta}$ напряжения на поверхности раздела свойств связующего и наполнителя (interface), которая представляет собой искривленную цилиндрическую поверхность. Числовые значения указанных напряжений определялись для точек M_1, M_2 и M_3 , а также N_1, N_2 и N_3 , которые отмечены на Рис. 7.12, при одноосном нагружении «на бесконечности» усилиями интенсивности p , которые направлены вдоль оси $0x_3$ (Рис. 7.12). Следует отметить, что напряжения σ_{nn} , $\sigma_{n\tau}$ и $\sigma_{n\theta}$ на поверхности раздела (interface), являются самоуравновешенными в пределах каждого периода искривлений (Рис. 7.12). Вычисления проводились для следующих значений параметров

$$v_a = v_m = 0,3; \quad E_a \cdot E_m^{-1} = 20; 50; 100; 150; 200. \quad (7.25)$$

Из анализа результатов для вышеуказанных случаев (7.25) сделан следующий вывод.

При $E_a \cdot E_m^{-1} \geq 100$ даже при сравнительно малых значениях ε (7.23) $\varepsilon = A \cdot l^{-1} \geq 0,020$ значения самоуравновешенных нормальных и касательных напряжений, приложенных к границе раздела сред (interface) могут превосходить нормальные напряжения в матрице $\sigma_{33}^{(m)}$ (в случае отсутствия искривлений в структуре), которые уравниваются с внешними усилиями p (Рис. 7.12).

Вышеуказанные результаты можно применять при обосновании предложенного объяснения механизма разрушения в виде «размочаливания»; предварительно обсуждаемые результаты надо дополнить анализом с привлечением числовых значений пределов прочности рассматриваемых связующего (матрицы) и наполнителя (волокон). Обсуждаемые результаты представлены в статье [194] за 1985 г.; в этой же статье также изложены и другие интересные выводы, которые следуют из приведенного анализа. Рассматриваемые результаты в полном объеме включены в соответствующие разделы монографий [54, 145 т. 4, 197, 57 т. 2], где также приведены многочисленные результаты для композитов с различными искривлениями в структуре, в том числе и с учетом взаимодействия этих искривлений.

Примечание 7.3. При проведении сравнительного анализа результатов, которые обсуждаются в рамках континуальной теории в п. 7.4.2, и результатов, которые обсуждаются в рамках модели кусочно-однородной среды в п. 7.4.3, необходимо учесть следующую ситуацию. В рамках континуальной теории в п. 7.4.2 малый параметр ε вводится выражением (7.12), которое в силу обозначений на Рис. 7.8 отличается от выражений (7.20) и (7.21), которыми вводится в п. 7.4.3 малый параметр ε в рамках модели кусочно-однородной среды; следовательно, для одного и того же искривления числовые значения малого параметра для обсуждаемых двух подходов отличаются между собой.

Примечание 7.4. В настоящем §7 рассматриваются различные вопросы, относящиеся к хрупкому разрушению в виде «размочаливания»; в связи с этим в обсуждаемых исследованиях исключительно применяется модель линейно упругого тела, в том числе и для построенных основ механики композитов с искривленными структурами. Учитывая вышеуказанные результаты, в ряде статей, начиная с [176] за 1985 г., а также [1, 178] за 1986 г., были построены основы механики композитов с искривленными структурами, когда для матрицы (связующего) применялась модель линейного вязкоупругого тела; обсуждаемые исследования были продолжены в Азербайджане и Турции, где был опубликован ряд статей. Указанные исследования (при применении модели линейной вязкоупругости для матрицы), по-видимому, имеют самостоятельное значение и не предназначены для объяснения механизма хрупкого разрушения в виде «размочаливания».

Вышеизложенными сведениями ограничимся в §7 при кратком изложении результатов по **Проблеме 5** (Хрупкое разрушение в виде «размочаливания» при растяжении или сжатии композитных материалов вдоль армирующих элементов).

§8. Проблема 6. Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин.

В настоящем параграфе в весьма краткой форме представлены основные результаты по рассматриваемой **Проблеме 6**, полученные по тематике отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, начиная с 1981 г.; при этом изложение обсуждаемых результатов представлено в стиле, анонсированном во Введении (часть I) в данную обзорную статью (без чрезмерного привлечения аспектов математического характера).

8.1. Введение. В 2014 г. опубликована обзорная статья [59], подготовленная автором настоящей обзорной статьи; при этом в статье [59] представлен анализ результатов по **Проблеме 6** и близким к ней проблемам, которые получены учеными всего мира, включая и результаты, полученные по **Проблеме 6** в отделе динамики и устойчивости сплошных сред. При изложении конкретных результатов в статье [59] существенное внимание уделено аспектам исторического характера, относящимся к становлению и развитию обсуждаемого научного направления; в связи с этим более подробное представление о рассматриваемом научном направлении можно получить из статьи [59], список литературы к которой включает 214 публикаций. Учитывая вышеизложенные сведения, ниже в настоящем §8 не будем уделять надлежащего внимания

сведениям исторического характера и анализу публикаций *ученых всего мира* по рассматриваемым проблемам, что, на взгляд автора настоящей обзорной статьи, уже реализовано в [59].

Таким образом, ниже в настоящем §8 рассматривается постановка задач и результаты по **Проблеме 6**, полученные *только* в отделе динамики и устойчивости сплошных сред; при этом, следуя стилю статьи [59], *указаны ученые*, которые получили основные результаты по каждому разделу рассматриваемого научного направления. Следуя вышеуказанному подходу, в список литературы к настоящей обзорной статье включены следующие статьи [12, 18, 29, 40, 52, 59, 74, 83 – 89, 101 – 105, 113 – 116, 149 – 152, 228, 233 – 236, 238, 239, 287 – 289, 308, 315, 325, 369, 377 – 380, 385 – 387, 389 – 392, 411 – 419, 421, 422, 444, 447 – 449, 451, 455, 467, 476, 479, 480, 482 – 484, 502, 540 – 544, 565, 574 – 578], в которых первоначально были получены основные результаты по **Проблеме 6** по тематике отдела динамики и устойчивости сплошных сред; при этом первыми публикациями, по-видимому, были статьи [39, 40, 287 – 289] за 1981 – 1982 гг. автора настоящей обзорной статьи. Кроме того, обсуждаемые результаты вошли в материалы докладов [309, 318, 321, 450, 452 – 454, 456 – 466, 468 – 475, 477, 478] на международных научных конференциях и в обзорные статьи [59, 238, 413, 414], которые посвящены изложению и обсуждению исключительно **Проблемы 6**, а также в обзорные статьи [55, 329, 336, 347, 350], которые посвящены изложению и обсуждению всех вопросов, относящихся ко всем неклассическим проблемам механики разрушения.

Основные результаты, первоначально опубликованные в вышеуказанных статьях и в материалах международных конференций, в последующие годы были представлены в монографиях [44] (стр. 240 – 279) за 1983 г., [54] (стр. 361 – 490) за 1990 г., [154] (т. 4, глава 1, стр. 10 – 250) за 1992 г., [145] (т. 5, стр. 174 – 233) за 1996 г., [57] (т. 2, стр. 145 – 317) за 2008 г. и [17] за 2017 г.; при этом наибольший объем информации, по-видимому, представлен в монографии [17].

По рассматриваемому научному направлению отдела подготовлены и защищены 3 диссертации на степень доктора физико-математических наук (DSc): В.М.Назаренко, И.А.Гузя и В.Л.Богданова. Следует отметить, что в диссертацию И.А.Гузя также вошли результаты по **Проблеме 1** (*Разрушение в композитных материалах при сжатии вдоль армирующих элементов*). В диссертацию В.Л.Богданова также вошли результаты по **Проблеме 4** (*Хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин*), поскольку он развил объединенный подход, позволяющий проводить исследования по **Проблемам 4 и 6**.

Механика разрушения материалов при сжатии вдоль параллельных плоскостей, в которых расположены плоские трещины произвольной формы, является специальным разделом механики разрушения, в котором описание механизмов разрушения не может быть осуществлено в рамках классической механики разрушения; вышеизложенное заключение следует из последующего обсуждения в заключительной части п. 8.1. Объектом исследования являются изотропные и ортотропные материалы, в которых в параллельных плоскостях расположены плоские трещины произвольной формы; в случае ортотропных материалов принимается, что параллельные плоскости, в которых расположены трещины, совпадают с плоскостями симметрии свойств материала. Целесообразно отметить, что композитные материалы в континуальном приближении также моделируются ортотропными материалами; следовательно, обсуждаемые в §8 результаты в указанном смысле также относятся и к композитным материалам. При сжатии равномерно распределенной нагрузкой вдоль плоскостей, в которых расположены трещины, в вышеуказанных материалах с трещинами возникает однородное напряженно-деформированное состояние (в соответствующем точном решении отсутствует сингулярная часть); в связи с этим в указанной ситуации для коэффициентов интенсивности напряжений получаем следующий результат

$$K_I = 0; K_{II} = 0; K_{III} = 0. \quad (8.1)$$

Необходимо отметить, что *результат (8.1) имеет место (для рассматриваемых нагружения и расположения трещин) в случае произвольных нелинейных моделей деформируемых тел с учетом упругих, пластических и вязких деформаций*. Таким образом, в вышеуказанном общем случае критерий Гриффитса-Ирвина и крите-

рий КРТ (критического раскрытия трещины) не работают, как и все другие критерии классической механики разрушения.

В связи с вышеизложенным приходи к выводу, что применительно к механике разрушения в случае сжатия вдоль параллельных плоскостей, в которых расположены трещины, **необходимо** привлекать подходы, которые отличны от подходов классической механики разрушения; следовательно, **Проблема 6** является типично неклассической проблемой механики.

8.2. Общая постановка задач. Общая концепция. Основные подходы. В настоящем п. 8.2 изложим краткую информацию, относящуюся к общим вопросам постановки обсуждаемых задач, формированию основной концепции (разработке критериев разрушения) и к общей характеристике разработанных основных подходов к исследованию рассматриваемых задач.

8.2.1. Общая постановка задач. Как уже отмечалось в заключительной части п. 8.1, рассматривается сжатие материала вдоль параллельных плоскостей, в которых расположены плоские трещины произвольной формы. Исследования проводятся для изотропных и ортотропных материалов; в случае ортотропных материалов принимается, что параллельные плоскости, в которых расположены трещины, совпадают с плоскостями симметрии свойств материала.

Аналогичная ситуация возникает при сжатии слоистого композита вдоль слоев для случая слоев *постоянной толщины*, когда в границах раздела связующего (матрицы) и наполнителя (армирующих слоев) в *interface* расположены плоские трещины различной формы.

Как уже отмечалось в заключительной части п. 8.1 для однородных изотропных и ортотропных материалов, так, очевидно, и для вышеизложенной ситуации в случае слоистых композитов, имеют место выражения (8.1) и, таким образом, в обсуждаемой ситуации *классическая механика разрушения не работает*. Таким образом, исследование необходимо проводить в рамках обсуждаемой неклассической проблемы механики разрушения. Ниже отдельно для двух вышеописанных случаев приведем расчетные схемы для исследования основных классов задач.

Расчетные схемы для изотропных и ортотропных материалов. Основные расчетные схемы приведены на Рис. 8.1, *a – д* применительно к плоским задачам в плоскости x_1Ox_2 , где ось Ox_3 направлена перпендикулярно к плоскости рисунка. В случае пространственных задач Рис. 8.1, *a – д* можно рассматривать как сечение. На Рис. 8.1 трещины изображены «жирными» линиями, которые являются бесконечными и постоянной ширины в направлении оси Ox_3 в случае плоской деформации. На Рис. 8.1, *a* представлен общий вид расположения трещин. На Рис. 8.1, *б* представлен простейший случай одной трещины, когда трещины в соседних плоскостях расположены на таком расстоянии, что их взаимовлияние можно не учитывать. На Рис. 8.1, *в* представлен простейший случай взаимодействия двух одинаковых трещин, расположенных в двух соседних параллельных плоскостях. На Рис. 8.1, *г* представлен случай большего числа одинаковых трещин, расположенных в параллельных плоскостях; указанная ситуация моделируется периодическим рядом (вдоль вертикальной оси) одинаковых трещин, расположенных друг над другом, когда надо учитывать взаимовлияние двух соседних трещин в периодическом ряде (а, следовательно, и всех трещин).

Необходимо отметить, что на Рис. 8.1, *a – г* представлены расчетные схемы для исследования материала с трещинами, которые расположены «внутри» материала, о чем свидетельствует обозначение волнистыми линиями выделенного внутри материала объема; в связи с этим трещины, представленные на Рис. 8.1, *a – г*, можно называть «внутренними» трещинами. Наряду с «внутренними» трещинами в материале существуют трещины вблизи поверхности материала, *которые при разрушении взаимодействуют с поверхностью материала*; в связи с этим указанные трещины можно называть «приповерхностными» трещинами.

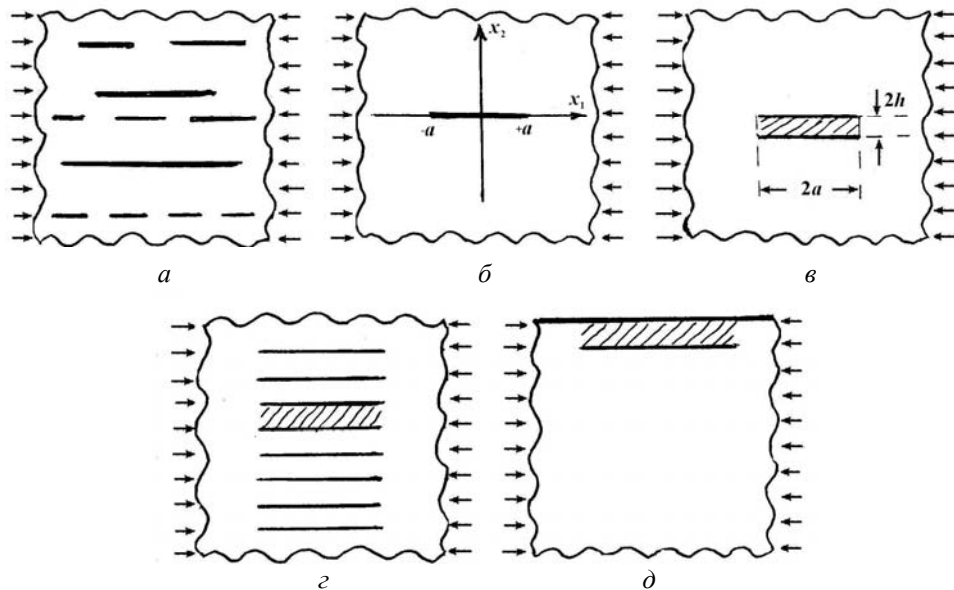


Рис. 8.1

На Рис. 8.1, *д* представлен простейший случай одной приповерхностной трещины, расположенной в параллельной плоскости к поверхности материала; при этом граница материала или граничная поверхность (на Рис. 8.1, *д* материал занимает нижнюю полуплоскость) обозначена «жирной» прямой линией.

Целесообразно отметить, что «густой» штриховкой отмеченные части материала на Рис. 8.1, *в* – *д* обсуждаются ниже в п. 8.2.3.

Расчетные схемы для слоистых композитных материалов. Рассматриваются слоистые композиты, образованные слоями наполнителя и связующего *постоянной толщины*, в границах раздела которых (in interface) расположены плоские трещины произвольной формы. Слои наполнителя и связующего будем считать изотропными или ортотропными материалами; в случае ортотропных материалов принимается, что одна из плоскостей симметрии свойств материала совпадает с плоскостью раздела свойств наполнителя и связующего (interface).

С учетом вышеизложенных условий основные расчетные схемы для слоистых композитов представлены на Рис. 8.2, *а* – *д* применительно к плоским задачам в плоскости $x_1 0x_2$, где ось $0x_3$ направлена по перпендикуляру к плоскости рисунка. В случае пространственных задач Рис. 8.2, *а* – *д* следует рассматривать как сечение.

Целесообразно отметить, что все сведения, обозначения и соображения, приведенные возле Рис. 8.1 применительно к однородным материалам в равной мере относятся и к расчетным схемам на Рис. 8.2 применительно к слоистым композитам или указанные данные необходимо несколько специализировать. Так, на Рис. 8.2: слои наполнителя и связующего обозначены штриховкой под разными углами; «жирными» линиями обозначены трещины в границе раздела (interface); многоточием обозначены части границ раздела без трещин.

Дополнительно для слоистых композитов, основные расчетные схемы для которых представлены на Рис. 8.2 (дополнительно по сравнению с однородными материалами, основные расчетные схемы для которых представлены на Рис. 8.1), *принимается следующее положение. При исследовании явлений внутри композита, включая и явления в приповерхностных слоях композита, в соответствии с Примечанием 3.8* (часть II настоящей обзорной статьи) «на бесконечности» (вдоль армирующих элементов) задаются *одинаковые деформации растяжения или сжатия для матрицы и армирующих элементов.*

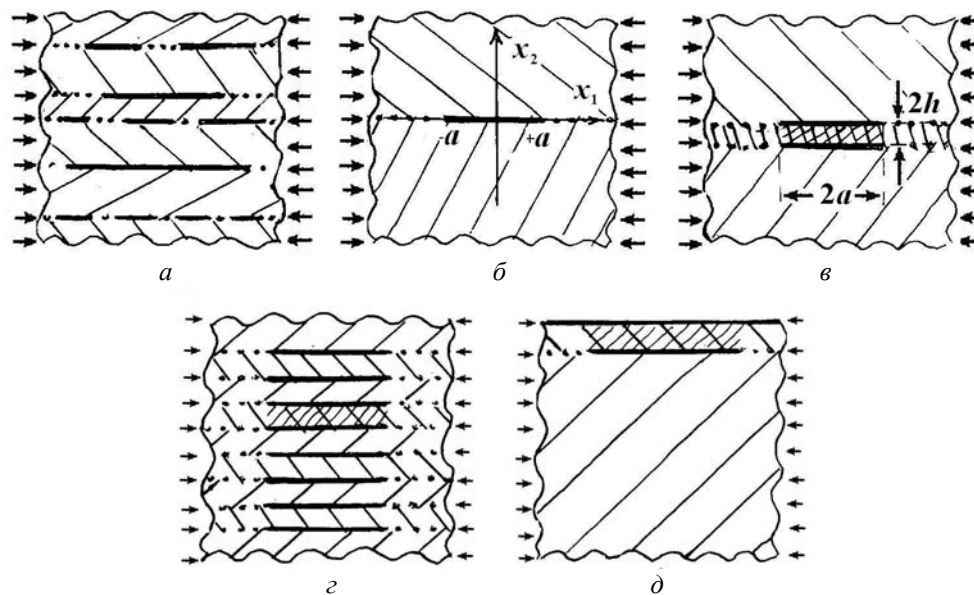


Рис. 8.2

Целесообразно заметить, что применительно к слоистым композитам «густой» штриховкой отмеченные части материала на Рис. 8.2, $a - d$ обсуждаются ниже в п. 8.2.3.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении расчетных схем для однородных (в континуальном приближении) материалов (Рис. 8.1, $a - d$) и слоистых композитных материалов (Рис. 8.2); дополнительные сведения можно получить из обзорной статьи [59] и монографий [44, 54, 154 т. 4 книга 1, 145 т. 5, 57 т. 2, 17].

8.2.2. Общая концепция. Из приведенных в заключительной части п. 8.1 сведений и соображений следует, что *при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, в однородных* изотропных и ортотропных материалах *и при сжатии вдоль слоев, в границах раздела которых (interface) расположены плоские трещины, в слоистых композитах со слоями постоянной толщины* классическая механика разрушения Гриффитса-Ирвина **не работает**. Целесообразно отметить, что в вышеуказанных двух случаях для ортотропных однородных материалов и для ортотропных слоев применительно к слоистым композитам принимается, что плоскости, в которых расположены трещины, параллельны плоскости симметрии свойств материала. Таким образом, для случаев, представленных на Рис. 8.1 и 8.2, *сжатие осуществляется вдоль осей и плоскостей симметрии свойств материала с учетом наличия трещин*.

Для проведения исследований по механике разрушения применительно к вышеуказанной неклассической проблеме механики разрушения (в настоящей обзорной статье, классифицируемой как **Проблема 6**) сформировалась общая концепция по аналогии с соответствующей ситуацией в механике тонкостенных элементов конструкций (стержни, балки, пластины и оболочки). Так, в механике тонкостенных элементов конструкций *при сжатии вдоль осей симметрии* (свойств материала и геометрической формы) *возникает явление потери устойчивости состояния равновесия*, которое в большинстве случаев в последующем приводит к *исчерпанию несущей способности*. Следует подчеркнуть, как уже отмечалось выше, что *в обсуждаемых случаях (Рис. 8.1 и 8.2) механики разрушения материалов при сжатии* также анализируется сжатие вдоль осей симметрии. Вышеизложенные сведения и соображения обосновывают сформировавшуюся общую концепцию, которую можно сформулировать следующим образом.

Общая концепция. В рассматриваемых ситуациях (Рис. 8.1, $a - d$, Рис. 8.2, $a - d$) **начало (старт) процесса разрушения материала определяется локальной потерей устойчивости состояния равновесия материала, который окружает трещины. В этом случае теоретический предел прочности соответствует величине критиче-**

ской нагрузки при потере устойчивости, которая вычисляется в рамках принятой конкретной теории устойчивости деформируемых тел.

Целесообразно отметить, что вышесформулированная **Общая концепция** относится к произвольным моделям (упругая, пластическая, вязкоупругая и т.д. среда) деформируемых тел применительно к изотропным и ортотропным (трещины расположены в плоскости симметрии свойств материала) материалам; необходимо только в случае конкретной модели применять критерии устойчивости, общепринятые в родственных классах задач.

Примечание 8.1. В расчетных схемах Рис. 8.1 з и Рис. 8.2 з (большое количество равноудаленных одинаковых трещин, что моделируется бесконечным периодическим рядом трещин) локальное разрушение возле трещин может перейти в общее разрушение, так как в этом случае (в силу периодического расположения трещин) возникает как бы «шарнир» по всей толщине материала.

Вышесформулированная **Общая концепция** представляется столь естественным обобщением, что в настоящее время, по-видимому (по крайней мере, по мнению автора настоящей обзорной статьи), не представляется возможным строго установить в какой публикации она была впервые последовательно изложена. Необходимо отметить, что вышесформулированная **Общая концепция** определяет лишь общее направление исследований анализируемых явлений; в рамках обсуждаемой концепции развиваются различные подходы и методы, приоритетные публикации по разработке которых устанавливаются, что и будет выполнено ниже в настоящем §8.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении **Общей концепции**, при этом ее реализация будет фактически рассматриваться при представлении конкретных результатов ниже в последующих пунктах §8.

8.2.3. Основные подходы. По **Проблеме 6** предложены разнообразные подходы и развиты в рамках этих подходов многочисленные методы исследования конкретных задач; определенное представление об обсуждаемых подходах и методах исследования можно получить из результатов, приведенных в обзорной статье [59] за 2014 г. Все же в настоящее время существуют или разработаны два принципиально отличающихся общих подхода, весьма краткое обсуждение которых проведем в настоящем п. 8.2.3; при этом необходимо отметить, что нумерация подходов (первый и второй) определяется не общностью или строгостью подходов, а очередностью их формирования в историческом аспекте.

Первый общий подход. Балочное приближение или балочный подход. Beam approximation. Балочный подход заключается в выделении части материала, находящегося между двумя соседними трещинами в параллельных плоскостях или между трещиной и граничной поверхностью материала, и в применении для выделенной части материала прикладных теорий устойчивости в рамках механики тонкостенных систем с привлечением гипотез плоских сечений, Кирхгоффа-Лява, типа Тимошенко и других гипотез; при этом исследования для выделенных частей материала проводятся для случаев граничных условий жесткого защемления или шарнирного опирания на «торцах». При рассматриваемом подходе теоретический предел прочности соответствует величине критической нагрузки, вычисленной в рамках прикладной теории устойчивости соответствующей механики тонкостенных систем. Выделяемые или вычлняемые указанным выше способом части материала отмечены сравнительно «густой» штриховкой на расчетных простейших схемах, представленных на Рис. 8.1, в, з, д и Рис. 8.2, в, з, д.

По-видимому, впервые применение балочного подхода было реализовано в статье Obreimoff [547] за 1930 г.; таким образом, можно считать, что Obreimoff является инициатором балочного подхода (*beam approximation*). В последующие годы в статьях Ентов и Салганик [118] за 1965 г. и Михайлов [147] за 1966 г. терминология «балочное приближение, балочный подход» начала применяться в названиях статей. В обзорной статье [59] приведены краткие сведения о дальнейшем развитии и применении балочного подхода к исследованию конкретных классов задач; также в статье указаны ведущие ученые, которые принимали участие в развитии обсуждаемого научного направления, основанного на **первом общем подходе** (*балочное приближение или балочный подход, beam approximation*).

Безусловно, балочный подход существенно упрощает исследование рассматриваемых проблем и дает возможность получить конкретные числовые результаты в законченном виде; в связи с этим балочный подход получил *повсеместное распространение в ряде или большинстве случаев без надлежащего обоснования*. Очевидно, анализ достоверности и точности результатов, получаемых с привлечением балочного подхода (beam approximation), требует квалифицированного обсуждения; краткий анализ балочного подхода представлен ниже, следуя, в основном, статье [59].

В соответствии с расчетными схемами на Рис. 8.1 и 8.2 при балочном подходе исследование проводится для выделенной или вычлененной части материала, которая на Рис. 8.1, *в – д* и Рис. 8.2, *в – д* показана «густой» штриховкой, при определенных граничных условиях на «мысленно выделенных» торцах. В соответствии с вышеизложенным подходом выделенная часть материала показана на Рис. 8.3. Как уже отмечалось в описании **Первого общего подхода**, теоретический предел прочности соответствует величине критической нагрузки, вычисленной в рамках соответствующей прикладной теории устойчивости тонкостенных систем; при этом величина критической нагрузки определяется, как правило, первым собственным числом задачи. Следует отметить, что собственные числа как бы «интегрально» характеризуют рассматриваемую задачу на собственные значения для всей области, а не поведение искомой функции в отдельных точках. В связи с вышеизложенным теоретический предел прочности на сжатие, полученный при рассматриваемом подходе, также является «интегральной» характеристикой для всей рассматриваемой задачи и, казалось бы, не должен сильно зависеть от поведения искомой функции в отдельных точках.

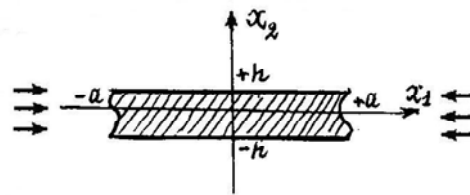


Рис. 8.3

Остановимся также на обсуждении граничных условий на «мысленно выделенных» торцах, т.е. при $x_1 = \pm a$ на Рис. 8.3. Рассмотрим с этой целью малую окрестность возле правой вершины применительно, для конкретности изложения, к расчетным схемам на Рис. 8.1, *д* и 8.2, *д*, соответствующим приповерхностному разрушению; при этом на Рис. 8.4 малая окрестность правой вершины трещины, соответствующая точке $+a$, обозначена наиболее густой штриховкой. Отметим, что Рис. 8.4, *а* относится к однородному материалу и соответствует расчетной схеме на Рис. 8.1, *д*, а Рис. 8.4, *б* относится к слоистому композиту и соответствует расчетной схеме на Рис. 8.1, *д*; при этом обозначения на Рис. 8.1, *д* и Рис. 8.4, *а* согласованы между собой, также согласованы между собой обозначения на Рис. 8.2, *д* и Рис. 8.4, *б*.

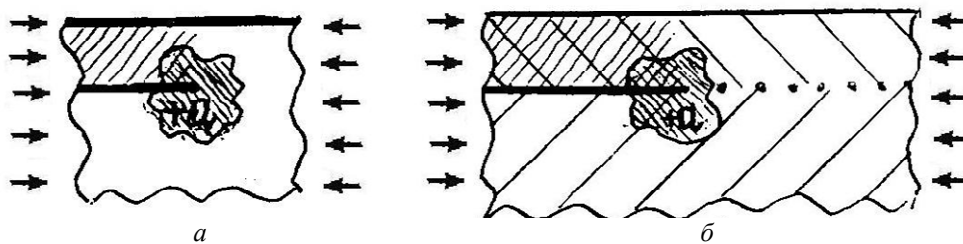


Рис. 8.4

Из Рис. 8.4 представляется очевидным, что в малой окрестности возле кончика трещины возникает (при исследовании задачи устойчивости) *сугубо трехмерное напряженно-деформированное состояние в случае пространственной задачи и сугубо двумерное напряженно-деформированное состояние в случае плоских задач*. При этом в рамках балочного подхода (beam approximation) в точке « $+a$ » на Рис. 8.4 или при $x_1 = \pm a$ на Рис. 8.3 формулируются граничные условия, соответствующие прикладной теории тонкостенных систем и полученные с привлечением общеизвестных

гипотез. В связи с этим в вышеуказанных двух случаях (первый – строгая постановка, второй – применение прикладных теорий тонкостенных систем) возникают особенности различного типа возле кончика трещины.

Учитывая вышеизложенные сведения и соображения, ниже сформулируем результаты краткого анализа балочного подхода (beam approximation) в виде следующих выводов.

Вывод 1. При любом значении параметра тонкостенности $h \cdot a^{-1}$ (Рис. 8.3) в балочном подходе возникает *неустраняемая погрешность* в связи с формулировкой граничных условий на торцах (при $x_1 = \pm a$ на Рис. 8.3) в рамках прикладных теорий тонкостенных систем, что приводит к изменению порядка особенности в вершине трещины (возле точки «+a» на Рис. 8.4).

Вывод 2. В рамках балочного подхода *невозможно строго* сформулировать граничные условия на торцах (при $x_1 = \pm a$ на Рис. 8.3) в рамках прикладных теорий тонкостенных систем; указанные граничные условия должны как бы соответствовать «упругой заделке».

Вывод 3. В связи с Выводом 2 исследования при балочном подходе, как правило, проводят для граничных условий на торцах в виде жесткого защемления или шарнирного опирания; при этом результаты, полученные при указанных двух видах граничных условий, отличаются *в несколько раз*.

Вывод 4. В связи с Выводом 3 возникает проблема оценки результатов, полученных в рамках **первого общего подхода** (балочное приближение), с точки зрения результатов, полученных в рамках более последовательных и строгих подходов.

Вывод 5. Балочный подход *не может обеспечить* исследования в рамках расчетной схемы, представленной на Рис. 8.1, *г* и 8.2, *г* (для большого числа трещин, моделируемых периодическим бесконечным рядом трещин), поскольку взаимодействие трещин не может быть учтено при жестком защемлении или шарнирном опирании на торцах (Рис. 8.3).

Вывод 6. Таким образом, **первый общий подход (балочное приближение, beam approximation)** является сугубо приближенным подходом и предел его применимости в зависимости от параметра тонкостенности $h \cdot a^{-1}$ (Рис. 8.3) может быть определен для каждого конкретного класса задач.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при кратком анализе балочного подхода (beam approximation); при этом дополнительные сведения можно получить из обзорной статьи [59].

Второй общий подход. Применение трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. *Рассматриваемый подход заключается в применении трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (сокращенно ТЛТУДТ), основной математический аппарат которой в сокращенной форме изложен в §2 (часть I) настоящей обзорной статьи, к исследованию устойчивости локального состояния равновесия материала, примыкающего к трещинам; при этом рассматриваются в трехмерной постановке строгие уравнения устойчивости и соответствующие граничные условия, что исключает необходимость привлечения дополнительных гипотез. Теоретический предел прочности определяется как критическое значение напряжений, соответствующее локальной потере устойчивости состояния равновесия возле трещин и вычисленное в рамках ТЛТУДТ.*

Сформулированный подход относится к однородным материалам при сжатии вдоль трещин применительно к расчетным схемам, указанным на Рис. 8.1, *a – д*, и к слоистым композитам со слоями постоянной толщины при сжатии вдоль трещин, расположенных в плоскостях раздела (interface), применительно к расчетным схемам, указанным на Рис. 8.2, *a – д*. В указанных случаях (расчетные схемы на Рис. 8.1 и 8.2) материал предполагается изотропным или ортотропным (плоскости симметрии свойств материала совпадают с горизонтальными плоскостями) для произвольных моделей (упругая, пластическая или вязкоупругая среда) деформируемых тел; при отмеченных условиях докритическое состояние будет однородным и будут выполняться условия (8.1).

Обсуждаемый Второй общий подход является наиболее строгим, последовательным и точным в рамках механики деформируемых тел; в связи с этим результаты, полученные с привлечением Второго общего подхода, можно применять для оценки результатов, полученных в рамках различных приближенных подходов, в том числе и Первого общего подхода (Балочное приближение или балочный подход. Beam approximation).

Второй общий подход применительно к механике разрушения при сжатии вдоль плоских трещин в параллельных плоскостях в материале был предложен, разработан и реализован **впервые в мире** в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ. По-видимому, первыми публикациями в этом направлении были статьи [39, 40] за 1981 г. автора настоящей обзорной статьи. В этих статьях с привлечением вышеизложенных **Общей концепции** и **Второго общего подхода** были сформулированы критерии разрушения в [39] для плоских задач и в [40] для пространственных задач для гиперупругих материалов с произвольной структурой упругого потенциала (при рассматриваемой симметрии свойств) в единой общей форме для **теорий 1, 2 и 3** (в соответствии с терминологией §2 настоящей обзорной статьи (часть I)). В публикациях [287 – 289] за 1982 г. вышеизложенный **Второй общий подход** был распространен на *пластические* материалы с учетом обобщенной концепции продолжающегося нагружения, которая кратко изложена в п. 2.3.2 (часть I) настоящей обзорной статьи.

Таким образом, можно считать, что в статьях [39, 40, 287 – 289] за 1981 – 1982 гг. были предложены основы **Второго общего подхода** в единой общей форме для сжимаемых и несжимаемых изотропных и ортотропных упругих материалов с произвольной структурой упругого потенциала (для хрупкого разрушения) и пластических материалов с определяющими соотношениями достаточно общего вида (для пластического разрушения) применительно к **Проблеме 6** (*Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин*). При этом исследования проводятся в рамках аппарата ТЛГУДТ, который изложен в §2 настоящей обзорной статьи (часть I). Отметим, что согласно расчетным схемам на Рис. 8.1 и 8.2 исследования применительно к обсуждаемой **Проблеме 6** проводятся при действии внешней «мертвой» нагрузки, что характерно практически для всех публикаций по механике разрушения. В связи с этим для расчетных схем на Рис. 8.1 и 8.2 применительно к упругим и пластическим материалам *строго доказано выполнение достаточных условий применимости статического метода исследования задач устойчивости* (п. 2.4.2 – первый результат, часть I настоящей обзорной статьи) и, таким образом, рассматриваемые задачи сводятся к *задачам на собственные значения, т.е. применяется метод Эйлера*; все же получаемые при этом результаты соответствуют применению динамического метода в силу вышеуказанного доказательства выполнения отмеченных достаточных условий.

Следовательно, применительно к обсуждаемой Проблеме 6 исследования в рамках вышеформулированного Второго общего подхода полностью соответствуют общепринятому и строгому методу исследования явления потери устойчивости – анализу поведения малых возмущений в рамках линеаризованных трехмерных динамических задач. Вышеформулированные *Вывод, доказательство и подход имеют место* для упругих и пластических моделей и *не имеют места* для моделей с реологическими свойствами.

Примечание 8.2. О применении общих решений ТЛГУДТ. В рамках вышеизложенного **Второго общего подхода** при исследовании **Проблемы 6** для расчетных схем, представленных на Рис. 8.1 и 8.2 имеет место следующая ситуация. Как отмечалось перед выражениями (8.1), в обсуждаемых случаях для применяемых моделей материалов возникает *однородное докритическое состояние*. Кроме того, выше при изложении **Второго общего подхода** отмечалось, что при рассматриваемом виде нагружения для упругих и пластических моделей материалов *выполняются достаточные условия* применимости статического метода исследования. Вышеприведенные сведения свидетельствуют, что с учетом отмеченной ситуации для исследования задач, соответствующих расчетным схемам на Рис. 8.1 и 8.2, целесообразно применять *общие решения для статических плоских и пространственных задач*, которые изложены в монографиях [30, 31, 34, 35, 44, 49, 54, 57, 334]; в наиболее компактной форме

эти общие решения представлены в монографии [57] (т. 1). Краткая информация об общих решениях *статических* пространственных и плоских задач ТЛУДУТ для сжимаемых и несжимаемых материалов, включая и применение комплексных потенциалов, представлена в п. 2.5 (часть I) настоящей обзорной статьи. Исследования целесообразно проводить в лагранжевых координатах x_j ($j = 1, 2, 3$), которые введены в первом отсчетном состоянии (для упругих тел – в естественном, в недеформированном состоянии) и которые в этом состоянии совпадают с декартовыми координатами, а также в криволинейных координатах, которые известными соотношениями связаны с декартовыми координатами.

Примечание 8.3. Необходимо отметить, что трехмерная линеаризованная теория упругой устойчивости при конечных докритических деформациях применялась также (в рамках плоской задачи) для исследования устойчивости бесконечного тела при сжатии вдоль одной плоской трещины, когда с самого начала исследования задавался упругий потенциал *конкретной частной структуры*. По-видимому, впервые результаты вышеуказанных исследований опубликованы в статьях [579, 580]; так, в [579] за 1979 г. исследован случай сжимаемого изотропного упругого тела с упругим потенциалом гармонического типа и в [580] за 1980 г. исследован случай несжимаемого изотропного упругого тела с упругим потенциалом конкретной простейшей структуры.

В заключение следует отметить, что публикации [579, 580] за 1979 – 1980 гг. и публикации [39, 40, 287 – 289] за 1981 – 1982 гг. автора настоящей обзорной статьи появились *независимо и в форме*, существенно отличающейся по общности постановки задач; кроме того, публикации [39, 40, 287 – 289] с самого начала были ориентированы на исследование неклассических проблем механики разрушения.

Примечание 8.4. О delamination слоистых композитов. Обычно, в широком понимании, под явлением delamination слоистых композитов понимается *отслоение* или *расслоение* вдоль поверхности раздела (interface) на достаточно малых или достаточно больших участках в случае сжатия вдоль поверхностей раздела, когда указанное отслоение или расслоение инициируется, в том числе, и наличием трещин в поверхности раздела. Обсуждаемое явление delamination может быть исследовано в рамках вышеизложенного **Второго общего подхода** в исследованиях **Проблемы 6** (*Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин*), если выполняется следующее условие. Для возникновения указанных расслоений или отслоений *необходимо*, чтобы рассматриваемому пределу прочности (величине критической нагрузки) соответствовали формы потери устойчивости, определяющие *раскрытие* трещин. Применительно к расчетным схемам для слоистых композитов со слоями постоянной толщины при сжатии вдоль слоев, которые представлены на Рис. 8.2, *a – д*, формы потери устойчивости с *раскрытием трещин*, представлены на Рис. 8.5, *б, в и д*; при этом Рис. 8.2, *a – д* и Рис. 8.5, *б, в и д* согласованы между собой. Заметим, что на Рис. 8.5, *в*, соответствующем расчетной схеме на рис. 8.2, *в*, только применительно к «нижней» трещине изображено расслоение или отслоение (delamination) в слоистых композитах, соответствующее возможным формам потери устойчивости. Дело в том, что для слоистых композитов при сжатии вдоль слоев возможны формы потери устойчивости, которые близкие к изгибным формам потери устойчивости; такие изгибные формы потери устойчивости, называемые еще формами потери устойчивости первого рода или сдвиговыми модами, представлены на Рис. 3.27 в п. 3.3.3.1 §3 настоящей обзорной статьи.

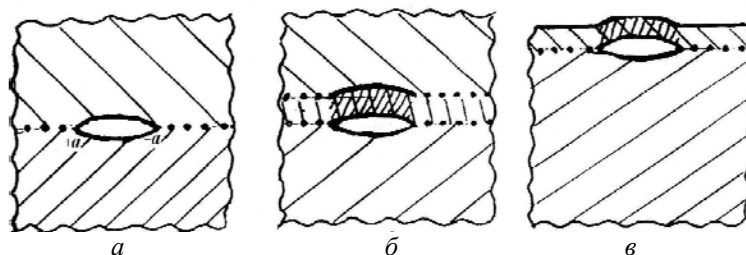


Рис. 8.5

При потере устойчивости по формам, близким к изгибным формам на вышеуказанном Рис. 3.27, *не происходит* заметного расслоения или отслоения, характерного для явления «delamination» на рассматриваемом этапе исследования; возможно, обсуждаемое явление возникает на последующем этапе деформирования, соответствующем нелинейному послекритическому поведению.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении **Второго общего подхода**, который, как уже отмечалось выше, был разработан и реализован в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ. В последующих пп. 8.3 – 8.6 настоящего §8 приведем краткую информацию о результатах исследования отдельных классов задач **Проблемы 6** (*Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин*) в рамках вышеизложенного **Второго общего подхода**, которые получены в отделе динамики и устойчивости сплошных сред, начиная с 1981 – 1982 гг.; более подробная информация об обсуждаемых результатах представлена на стр. 40 – 80 обзорной статьи [59] за 2014 г., при этом наиболее полная информация об этих результатах представлена в монографиях [57] (т. 2, стр. 145 – 318) за 2008 г. и [17] за 2017 г. Следуя стилю изложения обзорной статьи [59], при представлении результатов по отдельным классам задач в пп. 8.3 – 8.6 указаны ученые, которые получили основные результаты по каждому отдельному классу задач.

8.3. Результаты для однородных материалов с трещинами при хрупком и пластическом разрушениях. Второй общий подход. Исследования проведены для плоских и пространственных задач; при этом на Рис. 8.1, *a – d* для *плоских задач* представлены основные расчетные схемы, применительно к которым указаны материалы (изотропные и ортотропные; для ортотропных материалов одна из плоскостей симметрии свойств совпадает с плоскостями, в которых расположены трещины). Для *пространственных задач* основные расчетные схемы на Рис. 8.1, *a – d* остаются в силе применительно к рассматриваемым материалам (изотропные и трансверсально-изотропные); для трансверсально-изотропных вводится *дополнительное* условие – плоскости изотропии совпадают с плоскостями, в которых расположены трещины.

Результаты получены для двух характерных ситуаций: первая ситуация – анализ проводится для трещин, расположенных в одной плоскости, и *не учитывается* взаимодействие трещин, расположенных в соседних параллельных плоскостях; вторая ситуация – анализ проводится для расчетных схем, представленных на Рис. 8.1, *a – d*, и при этом *учитывается* взаимодействие, таким образом, трещин, расположенных в соседних параллельных плоскостях. Целесообразно отметить, что первая ситуация является *частным* случаем второй ситуации; при этом переход к исследованию задач, соответствующих *первой ситуации*, можно считать обоснованным, если *расстояния* между соседними плоскостями, в которых расположены трещины, *существенно* (на порядок и более) *больше* максимальных размеров трещин в плоскости.

8.3.1. Результаты для хрупкого и пластического разрушения однородных материалов с трещинами, расположенными в одной плоскости. Второй общий подход. Точные решения. Исследования проводились для антиплоских, плоских и пространственных задач. *Основные результаты получил А.Н.Гузь*, основные публикации представлены во Введении (п. 8.1) в настоящий §8. Для антиплоских и плоских задач исследования проводились с привлечением комплексных потенциалов ТЛТУДТ, информация о которых приведена в §2 настоящей обзорной статьи (часть I). Для пространственных задач исследования проводились с привлечением общих решений ТЛТУДТ, информация о которых приведена также в §2 настоящей обзорной статьи (часть I); при этом обсуждаемые задачи сводились к соответствующим смешанным задачам для гармонического потенциала для полупространства.

Необходимо отметить, что при получении **точных решений** обсуждаемых антиплоских, плоских и пространственных задач механики разрушения при сжатии вдоль плоских трещин различной формы, расположенных в одной плоскости, анализировались различные формы потери устойчивости, соответствующие различным условиям симметрии относительно плоскости, в которой расположены трещины. Рассмотрим пример для плоской задачи, который представлен на Рис. 8.6, *a – в*; так Рис. 8.6, *a* соответствует расчетной схеме для плоской задачи для одной трещины на Рис. 8.1, *б*, Рис. 8.6, *б* соответствует симметричной форме потери устойчивости, Рис. 8.6, *в* соответствует изгибной (антисимметричной) форме потери устойчивости. Форма по-

тери устойчивости в виде на Рис. 8.6, в обсуждалась в **Примечании 8.4** как форма потери устойчивости, при которой *не происходит* заметного расслоения или отслоения, характерного для явления «delamination» на рассматриваемом этапе исследования.

В результате точного решения для плоской задачи *строго доказано*:

теоретические пределы прочности при симметричной и изгибной формах потери устойчивости совпадают;

теоретический предел прочности определяется критическим значением параметра нагружения, соответствующим поверхностной неустойчивости полупространства в рамках плоской деформации;

теоретический предел прочности не зависит от количества трещин, расположенных в одной плоскости.

Последний вывод (независимость результата от количества трещин в одной плоскости) *не может быть получен* из соображений физического характера; обсуждение этой ситуации представлено в монографии [57] (т. 2) на стр. 167 в **Примечании 4**.

В результате точного решения для пространственной задачи *строго доказано*, что для пространственной задачи при осесимметричном нагружении теоретический предел прочности **не больше** критического значения параметра нагружения, соответствующего поверхностной неустойчивости полупространства в рамках пространственной задачи.

Выше применительно к результатам для пространственной задачи использована оценка «не больше» в связи с тем, что кроме вышеизложенных результатов, которые получены из анализа точных решений, для изгибной формы потери устойчивости также получена *еще одна* смешанная задача на собственные значения для двух гармонических функций для полупространства, которая *в общем случае определяющих уравнений осталась не исследованной*. Для конкретных моделей теории упругости и пластичности в монографиях [44, 54, 57, 154 т. 4 книга 1, 17] показано, что исследование вышеуказанной смешанной задачи для двух гармонических функций на собственные значения для полупространства *не вносит* новой информации о величине теоретического предела прочности.

Дополнительную информацию об обсуждаемых в настоящем п. 8.3.1 результатах можно получить из вышеуказанных монографий.

8.3.2. Результаты для хрупкого и пластического разрушения однородных материалов с трещинами, расположенными в параллельных плоскостях. Второй общий подход. Основные результаты получил В.М.Назаренко. Основные публикации, относящиеся к рассматриваемому научному направлению, включены в общий список, который приведен во Введении (п. 8.1) в настоящий §8. Исследования проведены для плоских и пространственных задач применительно к расчетным схемам, представленным на Рис. 8.1, $a - d$; при этом в случае пространственных задач рассматривались трещины в виде круговых дисков при осесимметричном нагружении.

Разработанные методы исследования основаны на применении общих решений ТЛТУДТ, краткая информация о которых приведена в §2 настоящей обзорной статьи (часть I), *при полном учете взаимодействия трещин*, расположенных в параллельных плоскостях. Эти методы основаны на применении интегральных преобразований (преобразований Фурье для плоских задач и преобразований Ханкеля для пространственных задач), на сведении задач к парным интегральным уравнениям и на последующем сведении к интегральным уравнениям следующего типа: в случае плоских – к интегральным уравнениям первого рода с интегрируемой особенностью логарифмического типа; в случае пространственных задач – к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

Следует отметить, что вышеуказанные методы относятся к исследованию соответствующих задач математической физики *на собственные значения*. При разработке вышеуказанных методов для **Проблемы 6** механики разрушения были существенно использованы общеизвестные подходы, относящиеся к соответствующим *краевым* смешанным задачам статики классической линейной теории упругости.

На заключительном этапе разработки методов исследования задач п. 8.3.2 обсуждаемые задачи, применяя вышеуказанные методы для классической линейной теории упругости, сведены к задачам *на собственные значения для одномерных интегральных*

уравнений. Было строго доказано, что полученные одномерные интегральные уравнения имеют непрерывные ядра в интервале от нулевых значений параметров нагружения до значений параметров нагружения, соответствующих теоретическим пределам прочности для случая сжатия однородного материала вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия таких трещин.

Вышеотмеченное доказательство непрерывности ядер одномерных интегральных уравнений дает возможность эффективно применять различные численные и приближенные методы для исследования собственных значений одномерных интегральных уравнений, через которые определяются теоретические пределы прочности для расчетных схем на Рис. 8.1, $\epsilon - \delta$ применительно к анализируемым механизмам разрушения. В рассматриваемых в настоящем п. 8.3.2 результатах для определения собственных значений полученных интегральных одномерных уравнений применялся метод Бубнова – Галеркина; при этом в качестве координатных функций выбирались степенные функции или ортонормированные на $[0, 1]$ смещенные полиномы Лежандра, и анализировалось изменение значений собственных чисел при увеличении числа координатных функций.

Так, в общих чертах можно описать разработанный метод решения задач механики разрушения однородных материалов при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия таких трещин. *Обсуждаемый метод решения является точным методом с точки зрения удовлетворения уравнений и граничных условий; точность же получения конкретных результатов определяется лишь точностью решения задачи на собственные значения полученных одномерных интегральных уравнений.*

В настоящее время с привлечением вышеизложенного метода уже исследовано значительное число плоских и пространственных задач при хрупком и пластическом разрушении для различных однородных материалов применительно к расчетным схемам, представленным на Рис. 8.1, $\epsilon - \delta$, с учетом взаимодействия трещин, расположенных в различных плоскостях; соответствующие результаты представлены достаточно подробно в монографиях [54, 154 т. 4 книга 1, 145 т. 5, 57 т. 2, 17] за 1990 – 2017 гг., в более сокращенном виде эти результаты представлены в обзорной статье [59] за 2014 г. В связи с вышеизложенным ниже не будем рассматривать обсуждаемые результаты, приведем лишь краткие выводы из анализа этих результатов. Отмеченное взаимовлияние трещин определяется зависимостью конечных результатов от следующего безразмерного параметра β

$$\beta = h \cdot a^{-1}, \quad (8.2)$$

где геометрические параметры a и h указаны на Рис. 8.1, ϵ ; необходимо отметить, что параметр β (8.2) относится к расчетным схемам на Рис. 8.1, $\epsilon - \delta$ и характеризует размеры «заштрихованной» части материала.

Рассмотрим некоторые выводы, относящиеся к п. 8.3.2.

1. *Предложенный метод является достаточно эффективным, так как он позволяет с точностью до трех знаков определить ϵ_T (теоретическое значение предельного укорочения) при помощи не более четырех координатных функций в случае изменения параметра β (8.2) в пределах $1/8 \leq \beta < +\infty$.*

2. *При высокой эффективности метода получаемые результаты при рассмотренном минимальном значении β ($\beta = 1/8$) на порядок и более меньше результатов для одной изолированной трещины.* Так, например, для приповерхностной трещины (Рис. 8.1 д) при $\beta = 1/8$ получаем ϵ_T (теоретическое значение предельного укорочения) в 30 раз меньше ϵ_T для одной изолированной трещины.

3. *При сближении плоскостей, в которых расположены трещины, происходит существенное уменьшение теоретического предела прочности σ_T по сравнению со случаем одной изолированной трещины (без учета взаимовлияния).* Так, при $\beta \approx 1/8$ может наблюдаться уменьшение σ_T на порядок и более.

4. При значениях параметра $\beta > 4$ можно не учитывать взаимодействие трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с точностью до 5% при исследовании пространственных задач; в случае плоских задач отмеченный вывод имеет место при несколько больших значениях параметра β .

8.3.3. Результаты для хрупкого и пластического разрушения однородных материалов с трещинами, расположенными в параллельных плоскостях. Второй общий подход. Объединенный подход для Проблем 4 и 6. Основные результаты получил В.Л.Богданов. Основные публикации, относящиеся к рассматриваемому научному направлению, включены в общий список, который приведен во Введении (п. 8.1) к настоящему §8. Следует отметить, что наиболее полное изложение обсуждаемых результатов представлено в монографии [17] за 2017 г., анализ результатов по соответствующим пространственным задачам проведен в обзорной статье [238] за 2015 г.

Объединенный подход к исследованию относится к задачам механики разрушения однородных материалов при сжатии вдоль системы плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом взаимодействия этих трещин для расчетных схем на Рис. 8.1, $a - d$ (**Проблема 6. Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин**) и к задачам механики разрушения однородных материалов с системой плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль таким образом расположенных трещин (**Проблема 4. Хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин**). Заметим, что в силу применения основных соотношений трехмерной линеаризированной механики деформируемых тел (ГЛМДТ) первые из вышеуказанных задач являются задачами на собственные значения и вторые из вышеуказанных задач являются краевыми задачами для одних и тех же уравнений, а также для одних и тех же областей, соответствующих расчетным схемам на Рис. 8.1, $a - d$. Таким образом, исследуя соответствующие краевые задачи при непрерывном изменении параметров нагружения в плоскости трещин, можно подойти к значениям этих параметров нагружения, когда амплитудные величины (напряжения и перемещения) стремятся «к бесконечности» (все амплитудные величины или часть из них); в связи с этим обнаруженные таким образом значения параметров нагружения (в плоскости трещин) соответствуют собственным числам соответствующей задачи на собственные значения.

Вышеизложенная ситуация, характеризующая обсуждаемый объединенный метод исследования по **Проблемам 6 и 4** неклассической механики разрушения, аналогична известной ситуации в теории колебаний. Отмеченная ситуация в теории колебаний заключается в следующем подходе – для определения собственных частот колебаний можно исследовать вынужденные колебания при непрерывном изменении частоты внешней нагрузки; в этом случае при существенном изменении амплитудной величины и стремлении ее «к бесконечности» определяется частота собственных колебаний.

Целесообразно отметить, что обсуждаемый объединенный подход для исследования задач **Проблем 4 и 6** относится не только к расчетным схемам **Проблемы 6**, которые представлены на Рис. 8.1 $a - d$, но и к сформулированным в п. 6.4.3 расчетным схемам **Проблемы 4**, по которым получены конкретные результаты (как точные решения, так и с применением компьютерных методов); при этом заметим, что в п. 6.4.3 сформулировано 11 соответствующих расчетных схем. При реализации обсуждаемого объединенного подхода применяются все математические аспекты соответствующих методов, которые указаны в первой части п. 8.3.2, с учетом той ситуации, что в п. 8.3.2 исследуются задачи на собственные значения, а в п. 8.3.3 исследуются, в основном, краевые задачи.

При применении объединенного подхода удобно выбрать величины – индикаторы напряженно-деформированного состояния применительно к задачам **Проблемы 4** (**Хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин**); отметим, что вышеуказанные индикаторы в определенном смысле, являются аналогом амплитуды при вышерассмотренной аналогии с теорией колебаний. В монографии [17] за 2017 г. и в обзорной статье [238] за 2015 г., а также в указанных списках литературы к [17, 238] статьях, в качестве обсуждаемых индикаторов применяются следующие величины

$$K_I / K_I^\infty, K_{II} / K_I^\infty, K_{III} / K_I^\infty. \quad (8.3)$$

В (8.3) введены обозначения: K_I, K_{II} и K_{III} – коэффициенты интенсивности напряжений в задачах **Проблемы 4** (как уже отмечалось выше, в п. 6.4.3 указаны 11 расчетных схем, по которым получены конкретные результаты в рамках **Проблемы 4**); $K_I^\infty, K_{II}^\infty$ и K_{III}^∞ – коэффициенты интенсивности напряжений в задачах **Проблемы 4** для одной трещины в «бесконечном» материале при действии рассматриваемых начальных (остаточных) напряжений.

Как показано в монографиях [44, 54, 154 т. 2, 57 т. 2, 17] для трещин, на берегах которых заданы напряжения, величины $K_I^\infty, K_{II}^\infty$ и K_{III}^∞ не зависят от начальных напряжений; таким образом, нормировку в индикаторах (8.3) можно проводить также и с привлечением величин K_{II}^∞ и K_{III}^∞ .

Таким образом, *обсуждаемый объединенный подход заключается в том, что в результате решения ряда краевых задач для рассматриваемого случая **Проблемы 4** определяется зависимость индикаторов (8.3) напряженно-деформированного состояния для этого же случая **Проблемы 4** от начальных (остаточных) напряжений. По полученной зависимости определяются значения начальных (остаточных) напряжений, при приближении к которым значения некоторых индикаторов (8.3) стремятся к «бесконечности». Полученные указанным способом значения начальных (остаточных) напряжений являются собственными числами соответствующей задачи **Проблемы 6**. В соответствии с **Общей концепцией**, сформулированной в п. 8.2.2 для **Проблемы 6**, вышеуказанные собственные числа (критические нагрузки) являются теоретическими пределами прочности для **Проблемы 6**, которые (теоретические пределы прочности) получены из решения последовательности краевых задач, соответствующих **Проблеме 4**.*

В ряде случаев, например для высокоэластических материалов, при представлении графической зависимости индикаторов (8.3) от начальных (остаточных) напряжений для задач **Проблемы 4** удобно начальные (остаточные) напряжения заменять соответствующими коэффициентами удлинения с привлечением известных соотношений. Ориентируясь на исследование задач **Проблемы 6**, расчетные схемы для которых представлены на Рис. 8.1, *в – д*, для вышеотмеченного графического представления удобно выбирать следующие коэффициенты удлинения: в случае плоской задачи λ_1 – коэффициент удлинения вдоль оси $0x_1$ (Рис. 8.1, *а – д*); в случае пространственной задачи при осесимметричном нагружении (Рис. 8.1, *б – д* для меридионального сечения) для трещин в виде круговых дисков $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_r$ – коэффициент удлинения в радиальном направлении. Вышеуказанные величины применялись в монографии [17] за 2017 г. и обзорной статье [238] за 2015 г.

На Рис. 8.6, который соответствует Рис. 21 обзорной статьи [238], представлены зависимости индикаторов (8.3) (Рис. 8.6, *а* – для K_I / K_I^∞ , Рис. 8.6, *б* – для K_{II} / K_I^∞) от

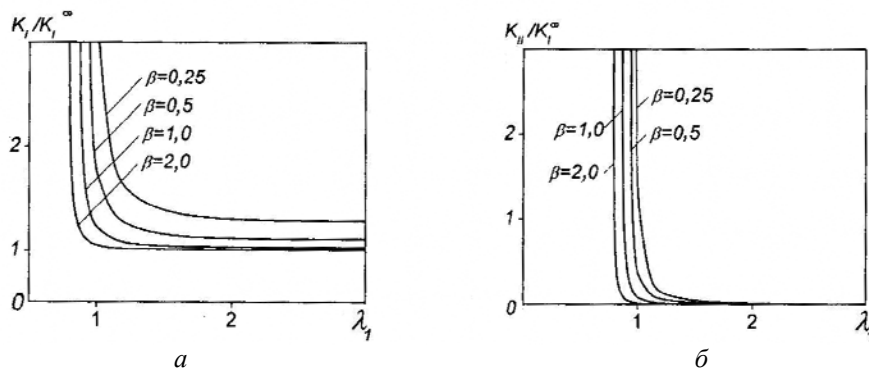


Рис. 8.6

коэффициента удлинения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_r$ для расчетной схемы 8 **Проблемы 4**, которая указана в п. 6.4.3, применительно к высокоэластическому несжимаемому материалу с упругим потенциалом Трелоара; отметим, что результаты на Рис. 8.6, *a* и *b* приведены для различных значений параметра β (8.2) в соответствии с принятыми обозначениями. Также заметим, что расчетная схема 8 **Проблемы 4**, указанная в п. 6.4.3, соответствует осесимметричным задачам для трещины в виде кругового диска вблизи границы полупространства (результаты на Рис. 8.6 соответствуют трещине нормальной отрыва в случае равномерной нормальной нагрузки на берегах трещины); следовательно, вышеуказанная расчетная схема 8 **Проблемы 4** в рамках **Проблемы 6** соответствует расчетной схеме на Рис. 8.1, *d*.

Представленные на Рис. 8.6 зависимости имеют *вертикальные асимптоты*, которые различны для различных значений параметра (8.2) β . В соответствии с вышеизложенным объединенным методом указанные вертикальные асимптоты соответствуют теоретическим пределам прочности для расчетной схемы на Рис. 8.1, *d* применительно к **Проблеме 6** для различных значений параметра β (8.2). Вертикальные асимптоты на Рис. 8.6 соответствуют собственным значениям задач на собственные значения, которые исследуются в **Проблеме 6**, а собственные значения соответствуют критическим нагрузкам, которые в силу **Общей концепции** (п. 8.2.2) для **Проблемы 6** определяют теоретические значения предела прочности.

Дополнительная информация о результатах для задач по **Проблеме 6**, полученным объединенным методом, представлена в монографии [17] за 2017 г. и обзорной статье [238] за 2015 г., в списках литературы к которым указаны основные публикации в периодических изданиях, относящиеся к рассматриваемому научному направлению.

Примечание 8.5. В настоящем п. 8.3.3 проведено более подробное обсуждение результатов, по сравнению с пп.8.3.1 и 8.3.2, поскольку обобщающие публикации по этому пункту (монография и обзорная статья) появились только в последние годы.

8.4. Результаты для слоистых композитов с трещинами в границах раздела (interface) при хрупком и пластическом разрушениях. Второй общий подход. Исследования проведены для плоских и пространственных задач в соответствии с постановкой задач, представленной для расчетных схем на Рис. 8.2, *a – d* и п. 8.2.1 в части с подзаголовком «Расчетные схемы для слоистых композитных материалов». Исследования выполнены в рамках **Второго общего подхода**, который в краткой форме изложен в п. 8.2.3 в части с подзаголовком «Второй общий подход. Применение трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел»; при этом основные соотношения и подходы этой теории указаны в §2 (часть I) настоящей обзорной статьи.

8.4.1. Введение. Исследования проводятся в рамках модели кусочно-однородной среды, когда для материалов слоев наполнителя и связующего применяются модели однородного материала (изотропное, трансверсально-изотропное или ортотропное упругое или пластическое тела) и на границах раздела (interface) формулируются определенные условия непрерывности с *учетом наличия трещин*; обсуждение модели кусочно-однородной среды в краткой форме проведено в заключительной части п. 1.4.1 (часть I) настоящей обзорной статьи.

Целесообразно отметить, что возможны постановки различных задач, определяемых соотношениями между параметрами h и a на Рис. 8.2, *e – d*; в связи с этим можно провести классификацию рассматриваемых задач. Классификация постановок задач для композитных материалов с трещинами рассматривалась в монографиях [54, 57]. Применительно к механике разрушения при сжатии слоистых композитов вдоль границ раздела слоев (interface), в которых расположены плоские трещины (Рис. 8.2, *e – d*), классификация постановок рассмотрена в публикациях [102, 447], которым будем следовать ниже, выделяя *микротрещины* и *макротрещины*.

Микротрещинами в плоскостях раздела (interface) слоистых композитных материалов (для расчетных схем на Рис. 8.2, *a, e – d*) будем называть трещины, для которых выполняются следующие условия

$$h \cdot a^{-1} \gg 1, \text{ включая } h \cdot a^{-1} \rightarrow \infty. \quad (8.4)$$

В этом случае приходим к задаче для двух соединенных между собой полупространств из различных материалов, в поверхности раздела (interface) которых расположены плоские трещины; расчетная схема для анализируемой ситуации в случае одной трещины для плоской деформации в плоскости $x_1 0x_2$ представлена на Рис. 8.2, б.

Макротрещинами в плоскостях раздела (interface) слоистых композитных материалов (для расчетной схемы на Рис. 8.2, а) будем называть трещины, для которых *не выполняется условие (8.4)*. В этом случае макротрещины, расположенные в соседних плоскостях раздела *взаимодействуют* между собой; таким образом, приходим к исследованию ситуаций, для которых характерны простейшие расчетные схемы представлены на Рис. 8.2, в – д.

Необходимо отметить, что в публикациях [102, 447] также выделены еще *структурные трещины*, которые имеет смысл рассматривать для слоистых композитов, составленных из наполнителя в виде слоев существенно различной толщины и связующего (матрицы) в виде слоев существенно различной толщины. В настоящей же обзорной статье анализируются результаты, полученные в рамках **Второго общего подхода**, для слоистых композитов, которые составлены из слоев наполнителя (армирующих элементов) одинаковой толщины h_a и слоев связующего (матрицы) одинаковой толщины h_m , чередующихся вдоль вертикальной оси; в связи с вышеизложенным для обсуждаемых слоистых композитов не имеет смысла выделять структурные трещины.

В настоящем п. 8.4 краткая информация обо всех полученных результатах (в рамках **Второго общего подхода**, п. 8.2.3) для хрупкого и пластического разрушения слоистых композитов *при сжатии* вдоль плоских трещин, расположенных в плоскостях раздела (interface), сгруппирована в следующих пунктах: п. 8.4.2 – результаты для слоистых композитов с *микротрещинами* в границах раздела; п. 8.4.3 – результаты для слоистых композитов с *макротрещинами* в границах раздела.

8.4.2. Результаты для хрупкого и пластического разрушения слоистых композитов с микротрещинами в границах раздела. Второй общий подход. *Основные результаты получили И.А.Гузь и А.Н.Гузь.* Основные публикации, относящиеся к обсуждаемому научному направлению, включены в общий список, который приведен во Введении (п. 8.1) к настоящему §8. Следует отметить, что наиболее полное изложение обсуждаемых результатов представлено в монографии [57] (т. 2); в достаточно полном объеме обсуждаемые результаты рассмотрены в обзорной статье [59] за 2014 г.

По-видимому, первыми публикациями в обсуждаемом научном направлении были статьи [102, 103, 448, 484] за 1992 – 1993 гг. для хрупкого разрушения в случае одной и двух микротрещин в границе раздела слоистого композита (расчетная схема для рассматриваемой ситуации представлена на Рис. 8.2, б) при сжатии вдоль границы раздела с привлечением численного метода исследования, предложенного в статье [503]. Вышеуказанные результаты получены в рамках **теории 3 ТЛТУДТ** (по терминологии п. 2.2 части I настоящей обзорной статьи) с привлечением модели линейного упругого изотропного тела для исследования *хрупкого* разрушения в обсуждаемой ситуации. В результате исследований в вышеуказанных публикациях для величины ε_T – теоретического значения предельного укорочения для слоистого композита с *одной микротрещиной* в границе раздела получено выражение

$$\varepsilon_T = \min \{ \varepsilon_T^a, \varepsilon_T^m \}, \quad (8.5)$$

где ε_T^a и ε_T^m – теоретические значения предельного укорочения, соответственно, материала наполнителя (армирующих элементов) и связующего (матрицы), которые соответствуют критическим значениям укорочения применительно к приповерхностной неустойчивости полупространства в рамках плоской деформации.

Для *хрупкого и пластического* разрушения изотропного и ортотропного сжимаемого и несжимаемого материалов наполнителя (армирующих элементов) и связующего (матрицы) в *единой общей форме* результаты получены для случая *конечного числа микротрещин* в границах раздела (interface) слоистого композита при сжатии вдоль

границы раздела; расчетная схема для обсуждаемого случая приведена на Рис. 8.7 для плоской деформации. Вышеуказанные результаты получены в статьях [377 – 380, 482] за 2000 – 2001 гг. в единой общей форме для **теорией 1 – 3** ТЛТУДТ (по терминологии п. 2.2 части I настоящей обзорной статьи). На Рис. 8.7 введены следующие обозначения: $D^{(\pm)}$ – полуплоскости из различных материалов; L_1 – совокупность отрезков на границе раздела, соответствующих трещинам; L_2 – совокупность отрезков на границе раздела, соответствующих полному соединению двух материалов. Кроме того, на Рис. 8.7 показаны сжимающие напряжения $\sigma_{11}^{0(+)} \neq \sigma_{11}^{0(-)}$ в связи с тем, что в соответствии с **Примечанием 3.8** (часть II настоящей обзорной статьи) при исследовании потери устойчивости во внутренней структуре композита и при приповерхностной потере устойчивости композита *предусматривается одинаковое укорочение наполнителя и матрицы вдоль направления сжатия*, что является, по-видимому, единственно возможным условием, позволяющим анализировать явления внутри композита.

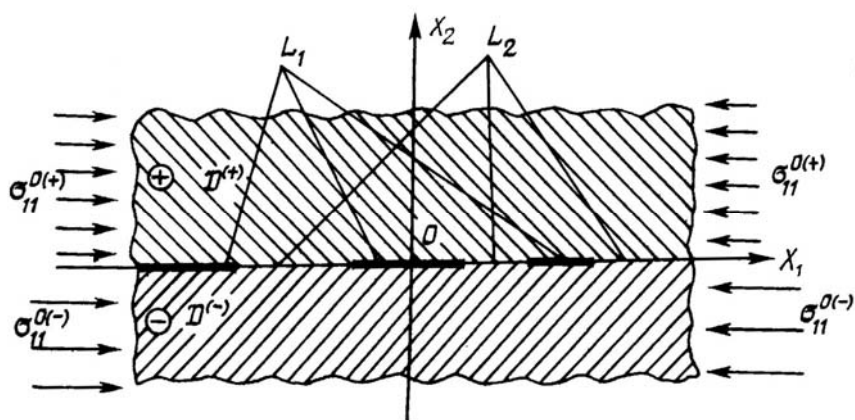


Рис. 8.7

Метод решения задачи, расчетная схема для которой представлена на Рис. 8.7, заключается в сведении к однородной задаче сопряжения (или задаче Римана – Гильберта) для двух голоморфных функций, заданных во всей плоскости, которая соответствует вышеформулированной задаче на собственные значения ТЛТУДТ; рассматриваемый метод является развитием (на задачи на собственные значения) метода Мусхелишвили [148], разработанного для краевых задач статики классической линейной теории упругости.

Для реализации вышеуказанного метода в статьях [377 – 380, 482] применялось для плоских статических задач ТЛТУДТ представление напряжений и перемещений для каждой из полуплоскостей $D^{(\pm)}$ через одну функцию комплексных переменных, которая является аналитической и определенной во всей плоскости; такого типа представления имеют вид (2.129) для случая неравных корней и вид (2.130) для случая равных корней (часть I настоящей обзорной статьи). С привлечением вышеуказанных представлений для плоской статической задачи ТЛТУДТ применительно к расчетной схеме на Рис. 8.7 получена однородная задача сопряжения для двух голоморфных во всей плоскости функций для следующих трех случаев компоновки слоистого композита:

- материал $D^{(+)}$ имеет *неравные* корни, и материал $D^{(-)}$ имеет *неравные* корни;
- материал $D^{(+)}$ имеет *равные* корни, и материал $D^{(-)}$ имеет *равные* корни;
- материал $D^{(+)}$ имеет *неравные* корни, и материал $D^{(-)}$ имеет *равные* корни.

Отметим, что три вышеуказанных случая компоновки слоистых композитов исчерпывают *все возможные случаи* компоновки слоистых композитов применительно к исследованию микротрещин.

В публикациях [377 – 380, 482] за 2000 – 2001 гг. получено **точное решение** однородной задачи сопряжения двух голоморфных во всей плоскости функций в общей вышеизложенной постановке для трех вышеуказанных компоновок слоистого композита. Из этого **точного решения независимо от количества трещин** (Рис. 8.7) для ε_T – **теоретического значения предельного укорочения** получено выражение (8.5), где ε_T^a и ε_T^m соответствуют достаточно общим моделям теории упругости и пластичности при общей постановке задач ТЛТУДТ в настоящем п. 8.4.2.

Вышеизложенные результаты **по точному определению** ε_T для слоистого композита с микротрещинами в границе раздела (Рис. 8.7) (ε_T – **теоретическое значение предельного укорочения**) достаточно подробно изложены в монографии [57] (т. 2, глава 8, §2); целесообразно отметить, что вышеуказанное **точное решение не имеет аналога в мировой науке** в публикациях по механике разрушения слоистых композитов при сжатии.

Примечание 8.6. Предположение *о независимости результатов от количества трещин* применительно к ситуации на Рис. 8.7 *нельзя получить a priori* из соображений физического характера в силу следующего факта. Дело в том, что в постановку задач для ситуации на Рис. 8.7 входит безразмерный геометрический параметр, соответствующий отношению длины одной из перемычек между трещинами к длине одной из трещин; в связи с этим из соображений физического характера следовало бы ожидать зависимость конечного результата от указанного безразмерного геометрического параметра.

8.4.3. Результаты для хрупкого разрушения слоистых композитов с макротрещинами в границах раздела. Второй общий подход. *Основные результаты получил И.А.Гузь.* Основные публикации, относящиеся к обсуждаемому научному направлению, включены в общий список, который приведен во Введении (п. 8.1) к настоящему §8. Обсуждаемые в п. 8.4.3 результаты представлены в публикациях [105, 449 – 457, 462 – 466, 481, 574 – 578], начиная с 1994 г.; соответствующий анализ этих результатов представлен в обзорной статье [59] за 2014 г., которой и будем, в основном, следовать ниже.

В указанных публикациях излагаются результаты исследований для *макротрещин* в границах раздела слоев (interface) в рамках расчетных схем, представленных на Рис. 8.2 *в – д* для характерных простейших случаев, а также для родственных расчетных схем. Эти исследования выполнены, в основном, для плоской задачи в плоскости $x_1 0x_2$ применительно к *хрупкому* разрушению; при этом для сравнительно жестких конструкционных слоистых композитов применялась **теория 3** ТЛТУДТ (по терминологии п. 2.2 части I настоящей обзорной статьи) и модель линейного упругого изотропного или ортотропного тела и для высокоэластических слоистых композитов применялась **теория 1** ТЛТУДТ (по терминологии п. 2.2 части I настоящей обзорной статьи) и соответствующие упругие потенциалы простейшей структуры.

Целесообразно отметить, что результаты настоящего п. 8.4.3 получены *исключительно с применением численных методов исследования* – методов конечных разностей и конечных элементов. Для получения обсуждаемых результатов не представляется возможным применение аналитических методов исследования по аналогии с подходами, изложенными в предыдущем п. 8.4.2.

Также необходимо отметить, что конкретные результаты, которые изложены в публикациях, указанных в начале настоящего п. 8.4.3, и которые представлены ниже, получены, в основном, для слоистых композитов, образованных продольно-поперечной укладкой из однонаправленного волокнистого композита. Указанный однонаправленный волокнистый композит в континуальном приближении рассматривается как однородный ортотропный материал с усредненными упругими постоянными, которые определяются из соответствующих выражений общеизвестных монографий. Таким образом, при образовании слоистого композита продольно-поперечной укладкой слоев, например на Рис. 8.8, в слоях наполнителя (армирующих элементах, все величины которых отмечены индексом «*a*») волокна направлены вдоль оси $0x_1$ и

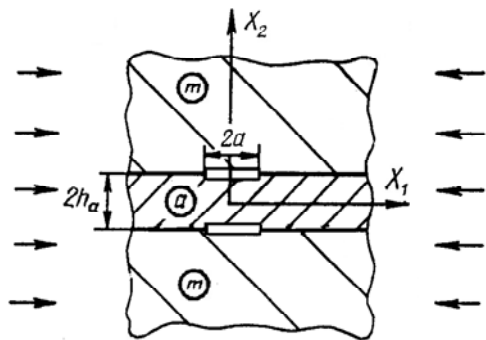


Рис. 8.8

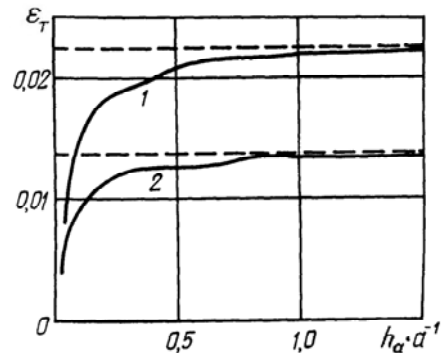


Рис. 8.9

в слоях связующего (матрицы, все величины которой отмечены индексом « m ») волокна направлены перпендикулярно к плоскости Рис. 8.8; в этом случае при нагружении вдоль оси $0x_1$ (Рис. 8.8) наполнитель является более жестким материалом и связующее является менее жестким материалом.

На Рис. 8.8 приведена расчетная схема для слоистого композита со слоями постоянной толщины применительно к плоской задаче в плоскости $x_1 0x_2$ (плоская деформация), когда слои связующего значительно толще слоев наполнителя (при $h_m \gg h_a$, все обозначения приведены на Рис. 8.8). В обсуждаемом случае приближенно слои связующего заменены двумя полуплоскостями; исследование проведено для двух трещин, расположенных в соседних плоскостях раздела, при учете взаимодействия между этими трещинами, которые при вышеизложенной постановке в соответствии с классификацией [102, 447] можно называть *структурными* трещинами.

Конкретные результаты для слоистого композита применительно к расчетной схеме на Рис. 8.8 для хрупкого разрушения, которые получены с привлечением метода конечных разностей, представлены в статье [449] за 1994 г.; при этом изменялось количество узлов сетки, чтоб обеспечить достоверность полученных результатов. Исследования в [449] проводились для различных материалов в монослое (в однонаправленном волокнистом композите). На Рис. 8.9, в качестве примера, приведены результаты лишь для двух материалов в монослое (в однонаправленном волокнистом композите): *первый* материал, результаты для которого на Рис. 8.9 отмечены цифрой «1», образован углеродными волокнами (Торнел – 300) в виде наполнителя и эпоксидной смолой в виде связующего; *второй* материал, результаты для которого отмечены цифрой «2», образован борными волокнами (фирмы Avco) в виде наполнителя и эпоксидной смолой в виде связующего. Дополнительные сведения о материале для монослоя, включая материалы «1» и «2», а также другие рассмотренные материалы, и о реализации численного анализа, обеспечивающего достоверность полученных результатов, можно получить из статьи [449].

На Рис. 8.9 приведена, согласно [449], зависимость величины ε_T – *теоретического значения предельного укорочения* для слоистого композита с двумя трещинами (Рис. 8.8) от параметра $h_a \cdot a^{-1}$, характеризующего относительные размеры трещины (Рис. 8.8), для *первого* и *второго* вышеуказанного слоистого композита. На Рис. 8.9 сплошными линиями показаны результаты для двух трещин (Рис. 8.8) при учете их взаимодействия, и штриховыми линиями показаны результаты для одной микротрещины, соответствующие выражению (8.5), которые впервые получены численными методами в публикациях [102, 103, 448, 484], начиная с 1992 г. Из результатов на Рис. 8.9 следует, что при изменении параметра $h_a \cdot a^{-1}$ можно получить уменьшение величины ε_T на сотни процентов.

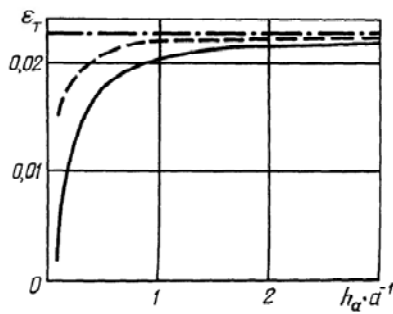


Рис.8.10

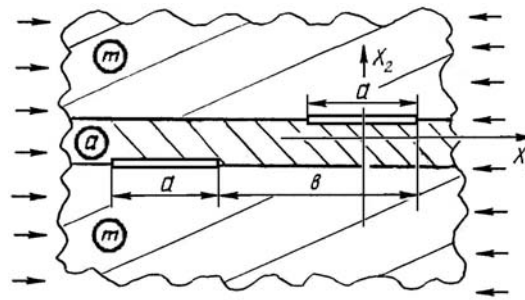


Рис. 8.11

В публикациях, указанных в начале п. 8.4.3, представлены результаты для различных задач применительно к *макротрещинам* или *структурным трещинам* в слоистых композитах при хрупком разрушении при сжатии вдоль границ раздела. Так, в статье [451] за 1995 г. представлены результаты для слоистого композита с периодической системой трещин для расчетной схемы, близкой к Рис. 8.2 з, при сжатии вдоль трещин. На Рис. 8.10, следуя [451, 449], представлена зависимость ε_T – *теоретического значения предельного укорочения* вдоль оси $0x_1$ (Рис. 8.8, Рис. 8.2, з) от параметра $h_a \cdot a^{-1}$, характеризующего относительные размеры трещин. Результаты на Рис. 8.10 приведены для композита, который применительно к Рис. 8.9 назван «первым» материалом; при этом сплошная кривая соответствует слоистому композиту с периодической системой трещин [451]; штриховая линия соответствует слоистому композиту с двумя трещинами [449]; штрихпунктирная линия соответствует слоистому композиту с одной микротрещиной [102, 103, 448, 484]. Из анализа результатов, представленных на Рис.8.10, и других результатов, представленных в [449, 451], в [451] сделан следующий вывод.

При $h_a \cdot a^{-1} > 2$ можно не учитывать взаимовлияние трещин в параллельных плоскостях раздела (interface) применительно к двум трещинам (Рис. 8.8) [449] и к периодическому ряду трещин [451] и для оценки величины ε_T – теоретического значения предельного укорочения можно применять выражение (8.5), соответствующее одной микротрещине.

Вышеизложенный вывод следует, например, из Рис. 8.10, так как при $h_a \cdot a^{-1} > 2$ сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии практически совпадают. В публикациях, указанных в начале настоящего п. 8.4.3, также приведен анализ других закономерностей, соответствующих обсуждаемым вопросам механики хрупкого разрушения слоистых композитов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях раздела (interface).

В последующие годы были получены результаты по механике хрупкого разрушения слоистых композитов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях раздела, применительно к более сложным расчетным схемам по сравнению с Рис. 8.2 и 8.8. Обсуждаемые результаты, которые представлены, например, в публикациях [574 – 578] за 2006 – 2008 гг., относятся к макротрещинам, которые не расположены друг над другом (Рис. 8.2 и 8.8), а смещены в параллельных плоскостях друг относительно друга; простейшая расчетная схема такого типа представлена на Рис. 8.11.

Вышеизложенными в п. 8.4 сведениями ограничимся при обсуждении результатов по механике *хрупкого и пластического* разрушения слоистых композитов при сжатии вдоль плоских трещин, которые расположены в параллельных плоскостях (interface) раздела; при этом все рассмотренные результаты получены в рамках **Второго общего подхода**, который в краткой форме изложен во второй части п. 8.3.3.

8.5. Результаты для хрупкого разрушения однородных материалов с трещинами, расположенными в близких параллельных плоскостях. Предельные пере-

ходы. **Второй общий подход.** Основные результаты получили В.М.Назаренко и М.В.Довжик. Основные результаты изложены в публикациях [112 – 116, 369] за 2011 – 2013 гг., достаточно подробный анализ этих результатов представлен в обзорной статье [59] за 2014 г. В вышеуказанных публикациях разработан метод исследования, являющийся развитием метода п. 8.3.2, который позволил получать результаты для сближающихся вплоть до предельных переходов трещин, расположенных в параллельных плоскостях. Обсуждаемый метод разработан с привлечением теорий 1 – 3 ТЛТУДТ (по терминологии п. 2.2 части I настоящей обзорной статьи) в рамках **Второго общего подхода Проблемы 6** (*Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин*), который в краткой форме изложен во второй части п. 8.2.3.

8.5.1. Краткое описание разработанного метода исследования. Обсуждаемые результаты [112 – 116, 369] относятся к расчетным схемам на Рис. 8.1, $\nu - d$ и получены применительно к пространственным задачам для одинаковых трещин в виде кругового диска (penney-shaped cracks) при осесимметричном внешнем нагружении; с учетом информации во вводной части п. 8.3.2 вышеуказанные результаты можно считать продолжением исследований п. 8.3.2.

В п. 8.3.2 указывалось, что обсуждаемые пространственные задачи в общем случае для хрупкого и пластического разрушения сведены к задачам на собственные значения одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Выражения для определения ядер указанных одномерных интегральных уравнений в развернутом виде представлены в монографиях [54, 57 т. 2, 154 т. 4 книга 1, 17]; отметим, что ядра имеют сложную структуру и представляются в виде определенных интегралов от различных специальных функций, в том числе и от функций кругового цилиндра. Полученные одномерные интегральные уравнения являются лишь заключительным результатом длинной цепочки сложных и громоздких математических преобразований, соответствующих методу решения п. 8.3.2.

Для численного определения собственных чисел полученных однородных одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода применялся метод Бубнова – Галеркина; при этом искомая функция $g(\xi)$ представлялась в виде ряда по степенным функциям

$$g(\xi) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot \xi^i, \text{ где } a_i - \text{неизвестные коэффициенты.} \quad (8.6)$$

В силу сложной структуры ядер одномерных интегральных уравнений в сложившейся ситуации (применение метода Бубнова – Галеркина и степенных функций в качестве координатных функций) *не представлялось возможным выполнить в аналитической форме интегрирование* выражений, соответствующих указанным ядрам. В связи с вышеизложенным дополнительно применялось численное интегрирование и квадратурная формула Гаусса, что привело к громоздким преобразованиям и большому объему вычислений. Вышеуказанная ситуация привела к тому, что *конкретные результаты не были получены для сравнительно большего числа координатных функций в (8.6)*; так, даже для доказательства достоверности результатов вычисления проводились при $N_{\max} = 6; 7; 8$, в других же случаях ограничивались $N_{\max} = 3; 4$. При таком подходе конкретные результаты в п. 8.3.2 были получены при изменении параметра $\beta = h \cdot a^{-1}$ в следующем интервале:

$$0,063 \leq \beta \leq \infty. \quad (8.7)$$

В публикациях [112 – 116, 369] был предложен **подход, позволивший получить конкретные результаты** практически во всем следующем интервале:

$$0 \leq \beta \leq \infty. \quad (8.8)$$

Поскольку в п. 8.3.2 уже были получены конкретные результаты в интервале (8.7), то в [112 – 116, 369] достаточно было получить конкретные результаты для следующего интервала:

$$0 \leq \beta \leq 0,1, \quad (8.9)$$

хотя в указанных публикациях представлены результаты и для более широкого интервала по сравнению с (8.9).

Целесообразно отметить, что подход и результаты [112 – 116, 369] являются *принципиально новыми*, позволившими фактически получить предельные переходы при $\beta \rightarrow 0$. Подход вышеуказанных публикаций основан на применении пакета (Wolfram Mathematica 7), являющегося пакетом символьной математики. Mathematica имеет высокую скорость и наперед заданную гарантируемую точность вычислений, что позволяет ей эффективно работать на ПК. Основная особенность обсуждаемого *нового подхода* заключается в том, что в ранее указанной ситуации (применение метода Бубнова – Галеркина и степенных функций в качестве координатных функций) при определении собственных чисел одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода *удалось избежать процедуры* численного интегрирования и применения квадратурной формулы Гаусса; *используя пакет символьных вычислений Mathematica, обсуждаемые интегралы были вычислены в аналитической форме*. В связи с этим были исключены громоздкие преобразования и большой объем вычислений, характерные для подхода 8.3.2; вышеотмеченное позволило при дальнейших численных расчетах *увеличить точность вычислений за счет исключения погрешности численного интегрирования*. Для ускорения вычисления интегралов был использован алгоритм, основанный на применении рекуррентных соотношений.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при кратком описании подхода, изложенного в публикациях [112 – 116, 369], который позволил получить результаты практически во всем интервале (8.8).

Конкретные результаты в [112 – 116, 369] получены для высокоэластических сжимаемых и несжимаемых материалов с упругими потенциалами простейшей структуры для расчетных схем на Рис. 8.1, *в* – *д*; при получении конкретных результатов применялась **теория 1** ТЛТУДТ (по терминологии п. 2.2 части I настоящей обзорной статьи) и исследования проводились в рамках **Второго общего подхода Проблемы 6**, который изложен во второй части п. 8.2.3. Таким образом, конкретные результаты в [112 – 116, 369] получены для трех ситуаций: две трещины в виде одинаковых круговых дисков (расчетная схема на Рис. 8.1, *в*); периодический ряд трещин в виде одинаковых круговых дисков (расчетная схема на Рис. 8.1, *з*); одна трещина в виде кругового диска, расположенная параллельно границе полупространства (приповерхностная трещина) (расчетная схема на Рис. 8.1, *д*); при этом конкретные результаты получены практически во всем интервале (8.8).

Целесообразно отметить, что конкретные результаты, полученные в [112 – 116, 369] для вышеуказанных трех расчетных схем и вышеуказанных материалов при хрупком разрушении, являются *практически точными*, поскольку они получены для всего интервала (8.8), включая и случай $\beta = h \cdot a^{-1} \rightarrow 0$. В связи с вышеизложенным результаты [112 – 116, 369] можно применять для оценки соответствующих результатов, полученных с привлечением **Первого общего подхода** (*балочное приближение, beam approximation*), согласно **Выводу 4**, сформулированному в результате краткого анализа балочного подхода (beam approximation) в конце первой части п. 8.2.3, относящейся непосредственно к **Первому общему подходу**. Все же необходимо учесть, что *анализ точности* балочного подхода (beam approximation) применительно к большому числу трещин, моделируемых бесконечным периодическим рядом трещин, является *беспредметным* согласно **Выводу 5**, также сформулированному в конце первой части п. 8.2.3, относящейся непосредственно к **Первому общему подходу**.

Ниже в настоящем п. 8.5 в качестве примера результатов [112 – 116, 369] рассмотрим результаты, относящиеся к одной приповерхностной трещине.

8.5.2. Приповерхностная трещина. Расчетная схема представлена на Рис. 8.1, *д*, исследование проводится для пространственной задачи при осесимметричном нагружении применительно к одной приповерхностной трещине в виде кругового диска, которая расположена параллельно границе полупространства; на Рис. 8.1, *д* приведено поперечное сечение плоскостью $x_3 = 0$, где h – расстояние от трещины до поверхности полупространства, a – радиус круговой трещины. Конкретные результаты представлены: в статье [112] для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонич-

ческого типа и для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева-Хазановича; в статье [369] для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара (материал неогукковского типа).

Ниже в настоящем п. 8.5.2 в качестве примера приведены конкретные результаты для несжимаемого высокоэластического материала с упругим потенциалом Трелоара, следуя [369]; при этом применяются обозначения: ε_T – теоретическое значение предельного радиального укорочения, σ_T^I – теоретическое значение предела прочности при **Первом общем подходе** (балочное приближение, beam approximation, первая часть п. 8.2.3), σ_T – теоретическое значение предела прочности при **Втором общем подходе** (применение ТЛГУДТ, вторая часть п. 8.2.3), параметр $\beta = h \cdot a^{-1}$ согласно (8.2), постоянная c_{10} соответствует выражению для упругого потенциала Трелоара (например, монография [49] стр. 358, выражение (3.431)).

На Рис. 8.12 представлена зависимость ε_T от β : на Рис. 8.12, а – для интервала $0,1 \leq \beta \leq 3,0$ и на Рис. 8.12, б – для интервала $0,01 \leq \beta \leq 0,10$.

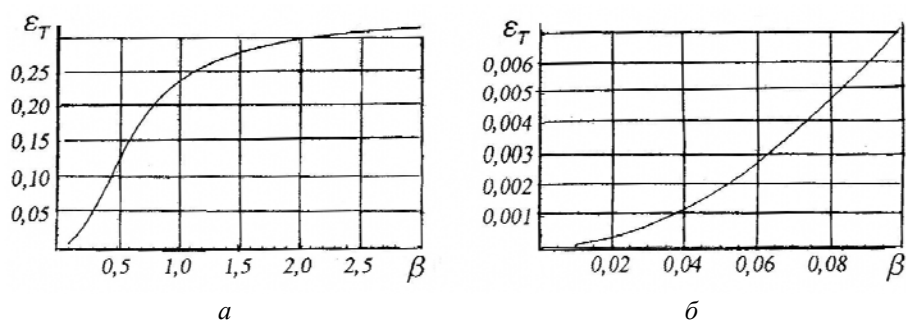


Рис. 8.12

В соответствии с вышеуказанными обозначениями имеет место [369] следующее выражение:

$$\sigma_T^I = A^I c_{10} \beta^2; \quad \beta = h \cdot a^{-1} \quad (8.10)$$

для **Первого общего подхода**. В этом случае коэффициент A^I для жесткого защемления круговой пластины, которое наиболее популярно в исследованиях по указанному подходу, определяется следующим образом

$$A^I = 9,7866. \quad (8.11)$$

Учитывая структуру выражения (8.10), соответствующего **Первому общему подходу**, с целью сравнения выражение для определения σ_T , соответствующее **Второму общему подходу**, также представим в аналогичной форме

$$\sigma_T = A c_{10} \beta^2; \quad \beta = h \cdot a^{-1}; \quad A = A(\beta). \quad (8.12)$$

Безусловно, для определения величины $A(\beta)$, соответствующей в (8.12) каждому значению β , необходимо выполнить значительную работу математического и вычислительного характера, кратко описанную в пп. 8.3.2 и 8.5.1. Принимая во внимание обозначения (8.10) – (8.12), в Табл. 8.1 приведены значения величин ε_T и A при изменении параметра β в интервале $1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 9 \cdot 10^{-2}$.

Для получения конкретных результатов, которые представлены на Рис. 8.12 и в Табл. 8.1, в [369] использовалось в выражении (8.6) максимальное число координатных функций $N_{\max} = 20$; при этом практическая сходимость достигалась как путем

увеличения числа координатных функций, так и путем увеличения точности вычислений, используя большее количество значащих цифр после запятой.

Таблица 8.1

β	ε_T	A
$9 \cdot 10^{-2}$	$5,96120 \cdot 10^{-3}$	8,83140
$8 \cdot 10^{-2}$	$4,76105 \cdot 10^{-3}$	8,92798
$7 \cdot 10^{-2}$	$3,68511 \cdot 10^{-3}$	9,02475
$6 \cdot 10^{-2}$	$2,73747 \cdot 10^{-3}$	9,12490
$5 \cdot 10^{-2}$	$1,92242 \cdot 10^{-3}$	9,22762
$4 \cdot 10^{-2}$	$1,24441 \cdot 10^{-3}$	9,33309
$3 \cdot 10^{-2}$	$7,08118 \cdot 10^{-4}$	9,44157
$2 \cdot 10^{-2}$	$3,18445 \cdot 10^{-4}$	9,55334
$1 \cdot 10^{-2}$	$8,05725 \cdot 10^{-5}$	9,66870
$1 \cdot 10^{-3}$	$8,14575 \cdot 10^{-7}$	9,77490
$1 \cdot 10^{-4}$	$8,15068 \cdot 10^{-9}$	9,78076
$1 \cdot 10^{-5}$	$8,14758 \cdot 10^{-11}$	9,77710
$1 \cdot 10^{-6}$	$8,14606 \cdot 10^{-13}$	9,77527
$1 \cdot 10^{-9}$	$8,14575 \cdot 10^{-19}$	9,77490

Из анализа конкретных результатов, представленных на Рис. 8.12 и в Табл. 8.1, можно сделать следующие существенные выводы.

1. Получены результаты в весьма широком интервале изменения параметра β ($1 \cdot 10^{-9} \leq \beta \leq 3$), включающем практически и предельный переход (при $\beta \rightarrow 0$) к результатам **Первого общего подхода** (балочное приближение, балочный подход, beam approximation, первая часть п. 8.2.3).

2. Для случая приповерхностной трещины (расчетная схема на Рис. 8.1 д) при достаточно малых значениях параметра β (при $\beta \rightarrow 0$) можно получить **уменьшение величины ε_T на два и более порядка по сравнению со случаем одной изолированной трещины без учета влияния граничной поверхности материала** (результаты п. 8.3.1, что на Рис. 8.12, а соответствует значению ε_T при $\beta \geq 3$).

3. Для случая приповерхностной трещины (расчетная схема на Рис. 8.1 д) обосновано применение **граничных условий жесткой заделки в Первом общем подходе** (первая часть п. 8.2.3), так как при $\beta = h \cdot a^{-1} < 0,01$ согласно Табл. 8.1 значение величины A в (8.12), соответствующей **Второму общему подходу**, практически совпадает со значением величины A^I (8.11) в (8.10), соответствующей **Первому общему подходу**.

4. Для случая приповерхностной трещины (расчетная схема на Рис. 8.1, д) **установлен предел применимости Первого общего подхода** (первая часть п. 8.2.3) с точки зрения результатов (Рис. 8.12 и Табл. 8.1) **Второго общего подхода** (вторая часть п. 8.2.3). **Так, при $\beta = h \cdot a^{-1} < 0,01$ результаты применительно к σ_T по Второму общему подходу и σ_T^I по Первому общему подходу практически совпадают.**

Необходимо отметить, что, как уже было подчеркнуто в заключительной части п. 8.5.1, конкретные результаты в [112 – 116, 369] получены для высокоэластических сжимаемых и несжимаемых материалов с упругими потенциалами простейшей структуры для расчетных схем на Рис. 8.1, в – д; при этом при получении конкретных результатов применялась **теория 1 ТЛТУДТ** (по терминологии п. 2.2. части I настоящей обзорной статьи) и исследования проводились в рамках **Второго общего подхода**

Проблемы 6 (вторая часть п. 8.2.3). В частности, вышеизложенные *Выводы 1 – 4* представлены согласно [369] для несжимаемого материала с упругим потенциалом Трелоара; естественно, что применительно к другим материалам соответствующие выводы можно получить лишь после формирования аналогичных конкретных результатов для обсуждаемых материалов. Также отметим, что аналогичные конкретные результаты и выводы получены: для двух трещин [113, 115] и для периодического ряда трещин в [114, 116]; краткий анализ конкретных результатов [113 – 116] также представлен в обзорной статье [59] за 2014 г.

Примечание 8.7. Как уже отмечалось, конкретные результаты, получаемые при подходе [112 – 116, 369], являются *практически точными*; в связи с этим их можно применять для *оценки точности и пределов применимости Первого общего подхода Проблемы 6* (балочное приближение, beam approximation, первая часть п. 8.2.3). Целесообразно отметить, что вышеуказанный анализ *обоснованно* можно проводить лишь для двух случаев: для *двух равных трещин* (расчетная схема на Рис. 8.1, в), для *приповерхностной одной трещины* (расчетная схема на Рис. 8.1, д). Анализ для случая *периодического ряда трещин* является **беспредметным** согласно *Выводу 5*, сформулированному в конце первой части п. 8.2.3, относящейся непосредственно к **Первому общему подходу**.

В [112 – 116, 369] для рассматриваемых в них материалов применительно к двум равным трещинам и одной приповерхностной трещине *определен предел применимости Первого общего подхода в Проблеме 6* в виде следующего условия

$$\beta = h \cdot a^{-1} < 0,01, \quad (8.13)$$

исходя из **критерия** практически полного совпадения (*достаточно сильного критерия*) результатов, полученных при **Первом общем подходе**, с результатами, полученными при **Втором общем подходе**. Согласно условию (8.13) **Первый общий подход** применим для ситуации, когда линейные размеры трещин **в 100 раз больше** расстояния между двумя трещинами или между трещиной и поверхностью материала; по-видимому, для указанной ситуации возникает вопрос о *реалистичности* таких трещин. Указанные размеры трещин можно существенно уменьшить, если вместо достаточно сильного критерия совпадения результатов (условие (8.13) получено из достаточно сильного критерия о практическом совпадении результатов) применять более слабые критерии совпадения результатов (например, совпадение результатов с точностью до 5 %; 10 %; 20 % и т.д.).

Вышеизложенными сведениями и соображениями ограничимся при изложении в настоящем п. 8.5 результатов для хрупкого разрушения однородных материалов с трещинами, расположенными в близких параллельных плоскостях, включая и предельные переходы; при этом отметим, что обсуждаемые результаты получены в рамках **Второго общего подхода Проблемы 6** (*Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин*), который в краткой форме изложен во второй части п. 8.2.3.

8.6. О результатах для вязкоупругого разрушения. *Основные результаты получил С.Д.Акбаров.* Обсуждаемые результаты при вязкоупругом разрушении получены для однородных материалов при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в параллельных плоскостях, и большинство результатов – для слоистых композитов и элементов конструкций при сжатии вдоль плоских трещин, расположенных в границах раздела (interfase) слоев. Рассматриваемые результаты представлены в монографии [188], опубликованной в 2012 г., и в отдельных статьях [186, 187, 204, 212, 552], начиная с 1998 г., и в ряде других публикаций, указанных в монографии [188] и в обзорной статье [187], которая опубликована в 2007 г. В список литературы к настоящей обзорной статье включены в качестве примера лишь отдельные публикации, относящиеся к обсуждаемому научному направлению, поскольку последующие исследования развивались в Азербайджане и Турции с привлечением в определенной мере результатов по механике композитов с искривленными структурами, которые в краткой форме рассмотрены в **§7 в Проблеме 5** (*Хрупкое разрушение в виде «размочаливания» при растяжении или сжатии композитных материалов вдоль армирующих элементов*). Как уже отмечалось во Введении (п. 7.1) в §7 (часть III настоящей обзорной ста-

ты), основные вышеуказанные результаты по **Проблеме 5** получены в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ и опубликованы в ряде указанных в п. 7.1 монографий, в том числе и в монографии [197] на английском языке.

Разработанные С.Д.Акбаровым методы исследования *в трехмерной постановке* устойчивости материалов и элементов конструкций *для вязкоупругих моделей* включают следующие позиции.

1. Исследования проводятся с привлечением *статических уравнений* в напряжениях и граничных условий *ТЛТУДТ*, краткое изложение которой представлено в §2 (часть I настоящей обзорной статьи).

2. Для описания вязкоупругого деформирования материала, в основном, связующего (матрицы) в композите, применяется линейная теория вязкоупругости наследственного типа с привлечением дробно-экспоненциальных операторов Работнова.

3. В качестве критерия устойчивости при вязкоупругом деформировании применяется *обобщение* (на задачи в трехмерной постановке) *приближенного критерия устойчивости Хоффа* [495], первоначально предложенного в 1954 г. для исследования устойчивости тонкостенных систем (стержни, пластины и оболочки) при ползучести. В соответствии с подходом [495] вводится *приближенно* малое отклонение от первоначально прямолинейной формы тонкостенных систем и в дальнейшем анализируется изменение во времени введенного отклонения при постоянной или возрастающей нагрузке. В *трехмерной постановке* процедура введения малых отклонений в структуре композита осуществляется при помощи *методов механики искривленных композитов*, изложенной в монографии [197], обзор результатов по которой представлен в обзорной статье [199].

4. Для исследования соответствующим образом сформулированных задач применяется преобразование Лапласа по времени; при этом для перехода к оригиналам применяется приближенный метод Шепери [555].

5. Для получения конкретной информации на заключительном этапе исследования применяются, в основном, численные методы – метод конечных элементов и метод граничных элементов.

Применительно к механике разрушения при сжатии вдоль параллельных трещин (предмет исследования в **Проблеме 6**, §8 настоящей обзорной статьи) *при вязкоупругом деформировании материала* вышеизложенные методы приближенного исследования *в трехмерной постановке* вопросов устойчивости материалов и элементов конструкций для вязкоупругих моделей дополняются **Общей концепцией**, определяющей начало (старт) процесса разрушения, **которая сформулирована в п. 8.2.2**. Вышеуказанные результаты можно классифицировать как приближенный подход в *трехмерной постановке*, позволяющий исследовать устойчивость композитов и элементов конструкций при вязкоупругом деформировании, а также задачи механики разрушения при сжатии вдоль системы трещин применительно к вязкоупругим моделям материала. Обсуждаемый приближенный подход изложен в публикациях С.Д.Акабарова, а в многочисленных публикациях автора подхода и его учеников, указанных в монографии [188] за 2012 г. и обзорной статье [187] за 2007 г., исследованы широкие классы конкретных задач.

Все же необходимо отметить, что *обсуждаемый подход, несмотря на трехмерную постановку, является сугубо приближенным, не соответствует общепринятому в механике строгому методу исследования потери устойчивости; по последовательности и строгости отличается от результатов для упругих и пластических моделей, которые получены на основе ТЛТУДТ и анализу которых посвящена настоящая обзорная статья.*

Вышеизложенное мнение обосновывается в следующем примечании.

Примечание 8.8.

1. По-видимому, можно считать, что в механике общепринятый и достаточно строгий метод исследования явления потери устойчивости заключается в анализе поведения малых возмущений в рамках *линеаризированных трехмерных или двухмерных (в случае механики тонкостенных конструкций) динамических задач*; при этом критерием устойчивости является невозрастание возмущений во времени.

2. Для упругих и пластических материалов в рамках строгой ТЛУДТ с привлечением динамической постановки доказано выполнение достаточных условий применимости статического метода исследования (метода Эйлера, метода задач на собственные значения). Таким образом, конкретные результаты, полученные для упругих и пластических материалов статическим методом, совпадают с результатами, полученными на основании динамических уравнений (общепринятый в механике метод исследования явления устойчивости, п. 1 настоящего примечания).

3. В обсуждаемом методе исследования задач устойчивости для вязкоупругих материалов не применяются динамические линеаризованные уравнения устойчивости; исследования с самого начала проводятся для статических уравнений устойчивости. Введение отклонений от прямолинейной формы и их анализ во времени в соответствии с приближенным критерием Хоффа [495] не совпадает с линеаризованными динамическими уравнениями.

Вышеизложенные в Примечании 8.8 соображения свидетельствуют о том, что обсуждаемый в п. 8.6 подход для исследования устойчивости вязкоупругих материалов является сугубо приближенным. Безусловно, полученные при обсуждаемом подходе конкретные результаты целесообразно анализировать в отдельной обзорной статье, поскольку в настоящей обзорной статье рассматриваются результаты также для упругих и пластических материалов, полученные в рамках общепринятого в механике и достаточно строгого метода анализа явления устойчивости.

Вышеизложенными в §8 сведениями ограничимся при анализе Проблемы 6 (Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин), более подробное обсуждение анализируемых результатов представлено в обзорной статье [59] за 2014 г.

§9. Проблема 7. Хрупкое разрушение материалов с трещинами при действии динамических нагрузок (с учетом контактного взаимодействия берегов трещин).

В настоящем параграфе в весьма краткой форме (по сравнению с Проблемами 4 – 6, которые уже обсуждены в рассматриваемой части III настоящей обзорной статьи) представлены результаты по вышеуказанной Проблеме 7, которые получены в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ; при этом изложение обсуждаемых результатов представлено в стиле, анонсированном во Введении (часть I) в данную обзорную статью (без чрезмерного привлечения аспектов математического характера).

9.1. Введение. Основные результаты по рассматриваемой проблеме, полученные в отделе динамики и устойчивости сплошных сред, представлены в монографии [154] (т. 4, книга 2) за 1993 г., в обзорных статьях [432 – 434], которые полностью посвящены анализу результатов по Проблеме 7, и в обзорных статьях [55, 329, 336, 347, 350], которые посвящены анализу результатов по различным неклассическим проблемам механики разрушения, в том числе и по Проблеме 7. Первоначально вышеуказанные результаты были представлены в публикациях [70 – 73, 119 – 124, 141 – 144, 407, 408, 430, 435 – 439, 528 – 533, 582 – 597] и в ряде других публикаций и докладов на международных конференциях, начиная с 1990, 1991 г.

По рассматриваемому научному направлению отдела динамики и устойчивости сплошных сред подготовлены и защищены 3 диссертации на степень доктора физико-математических наук (DSc): В.В.Зозули, А.В.Меньшикова и В.А.Меньшикова.

Примечание 9.1. Диссертация В.А.Меньшикова посвящена динамическим пространственным задачам механики хрупкого разрушения для материала с трещинами, которые расположены в границе двух материалов (interface), без учета контактного взаимодействия берегов трещины. Все же разработанные в ней численные методы могут быть использованы при построении алгоритма исследований с учетом контактного взаимодействия берегов трещин, что дало основания отнести обсуждаемую диссертацию к рассматриваемому научному направлению. Обзор результатов по динамическим пространственным задачам для трещин, расположенных в границе раздела двух материалов (interface) представлен в обзорной статье [63] за 2013 г.; в качестве примера в список литературы к настоящей обзорной статье по тематике обзора [63] включена статья [384].

Целесообразно отметить, что, начиная с классических результатов по дифракции упругих волн на плоских трещинах, во всех соответствующих публикациях не учитывалось контактное взаимодействие берегов трещин. В последующие годы вышеука-

занные результаты исследований перешли в динамическую механику хрупкого разрушения. Казалось бы, для механики разрушения всегда было характерным углубленное исследование явлений, происходящих возле трещины и, особенно, возле кончика трещины. К сожалению, такого не случилось для исследований по динамической механике хрупкого разрушения; в динамической механике хрупкого разрушения также не учитывалось контактное взаимодействие берегов трещины *вплоть до публикаций отдела динамики и устойчивости сплошных сред*, указанных в начале настоящего Введения (п. 9.1). Подтверждением вышеуказанной ситуации является, что в общеизвестных монографиях [156] за 1985 г. и [157] за 1988 г., посвященных всецело динамической механике хрупкого разрушения (даже судя по их названию), не рассматривалось и не анализировалось контактное взаимодействие берегов трещин; также аналогичная ситуация имеет место и в общеизвестной монографии (Elastodynamic crack problems / Eds G.G.Sih. – Leyden: Noordhoff, 1977. – 423 p.). В 1994 г. был опубликован обзор [431] публикаций по динамической механике хрупкого разрушения без учета контактного взаимодействия берегов трещины; в настоящее время продолжается публикация подобных статей даже без комментариев о неполном учете явлений возле трещин, в качестве примера можно указать статью [535] за 2004 г. и ряд других.

Ниже в настоящем §9 в краткой форме излагается обоснование постановки задач динамической механики хрупкого разрушения *с учетом контактного взаимодействия берегов трещин*, а также в весьма краткой форме рассматриваются постановка обсуждаемых задач, разработанный метод исследования и, в виде примеров, ряд результатов по решению конкретных задач *с учетом контактного взаимодействия берегов трещин* и с анализом соответствующих эффектов.

9.2. Обоснование постановки задач. Метод решения. С целью обоснования обсуждаемой постановки задач проведем анализ постановки простейшей задачи традиционной динамической механики хрупкого разрушения, которая в определенном смысле является эталонной и приводится практически во всех монографических изданиях по динамической механике хрупкого разрушения.

9.2.1. Обоснование обсуждаемой постановки задач. Рассмотрим случай, когда материал моделируется линейно-упругим изотропным телом; анализ проведем с применением декартовых координат x_j ($j = 1, 2, 3$). Будем считать тело бесконечным, в котором в плоскости $x_2 = 0$ (Рис. 9.1) имеется бесконечная вдоль оси $0x_3$ (ось $0x_3$ направлена перпендикулярно к плоскости Рис. 9.1) плоская трещина постоянной ширины $2a$. Будем считать также, что приложена динамическая нагрузка, которая не зависит от координаты x_3 ; в этом случае можно рассматривать плоскую задачу в плоскости $x_1 0x_2$ (Рис. 9.1) для бесконечного тела с трещиной длиной $2a$ вдоль оси $0x_1$ (Рис. 9.1). Проведем анализ постановки задач, когда вдоль оси $0x_2$ (Рис. 9.1) распространяется плоская гармоническая продольная волна расширения; в этом случае все величины (напряжение и перемещения) с учетом явления дифракции волны имеют множитель $(\exp i \omega t)$, в том числе и возле кончика трещины.

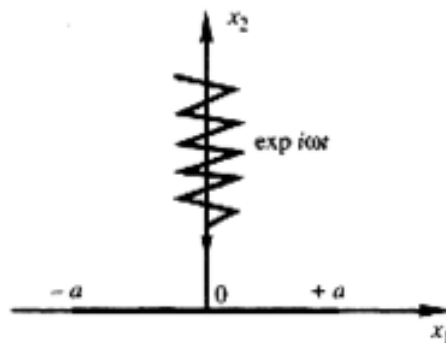


Рис. 9.1

Рассмотрим явления, которые возникают в исследуемом случае, например, возле правого кончика трещины (Рис. 9.2, а). При действии рассматриваемой нагрузки возле правого кончика трещины, как и во всем теле, возникают три характерных положения: 1 – положение в состоянии покоя (Рис. 9.2, а); 2 – положение в фазе растяжения, соответствующее максимальному раскрытию трещины (Рис. 9.2, б); 3 – положение в фазе сжатия, соответствующее максимальному закрытию трещины (Рис. 9.2, с). Следует

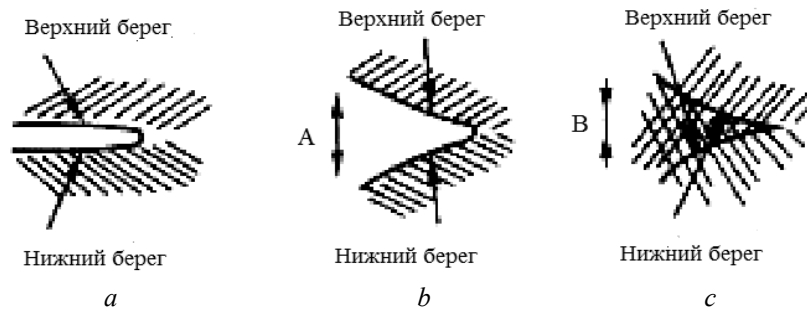


Рис. 9.2

отметить, что положение «3» возникает во времени через полпериода после возникновения положения «2». На Рис. 9.2, *в* через *A* обозначена величина раскрытия берегов трещины в некоторой точке вблизи правого кончика трещины в фазе растяжения.

Во всех публикациях по классической динамической механике разрушения на берегах трещины ставят граничные условия, которые не учитывают явлений, возникающих в фазе сжатия, при этом не учитывается контактное взаимодействие и позволяет как бы «свободное проникновение» берегов трещин друг в друга. Эта ситуация, принимаемая в классической динамической механике разрушения в фазе сжатия, схематически представлена на Рис. 9.2, *с*; на Рис. 9.2, *с* берега трещины как бы поменялись местами – верхний берег переходит в положение нижнего берега и нижний берег переходит в положение верхнего берега. На Рис. 9.2, *с* через *B* обозначена величина «взаимного проникновения» берегов трещины (в той же точке, что и на Рис. 9.2, *в*) вблизи правого кончика трещины в фазе сжатия. Указанная на Рис. 9.2, *а – с* ситуация возникает во всех публикациях по динамической механике разрушения, когда ставятся граничные условия, соответствующие незагруженной трещине. Из вышеизложенного и Рис. 9.2, *в, с* следует равенство

$$A = B. \quad (9.1)$$

Таким образом, в классической динамической механике разрушения в фазе растяжения правильно учитываются явления такого же порядка, как и неправильно учитываемые в фазе сжатия; следовательно, в результаты классической динамической механики разрушения включается неустраняемая погрешность независимо от интенсивности приложенной нагрузки.

Также необходимо отметить, что примерная расчетная схема в фазе сжатия, представленная на Рис. 9.2, *с* и применяемая фактически во всех публикациях по классической динамической механике разрушения, свидетельствует о том, что материалу предоставляется как бы «дополнительная инерционность», когда не учитывается контактное взаимодействие берегов трещины. В связи с этим следует ожидать, что в публикациях по классической динамической механике разрушения должны получаться завышенные значения максимальных величин, включая также и информацию о коэффициентах интенсивности напряжений.

Общий вывод. В связи с вышеотмеченным изменением во времени знака перемещений берегов трещины, характерным для физики явлений, возникающих в динамической механике разрушения, необходимо (при правильной и строгой постановке задач динамической механики разрушения) учитывать контактное взаимодействие берегов трещины. Указанное контактное взаимодействие берегов трещин возникает независимо от уровня действующей нагрузки и имеет место, естественно, при применении также и линейных уравнений механики деформируемых тел, описывающих закономерности распространения волн. Естественно, что указанное явление возникает при моделировании трещины математическим разрезом; при этом следует отметить, что указанное моделирование используется исключительно во всех публикациях по динамической механике разрушения. Неучет же контактного взаимодействия берегов трещин применительно к динамической механике разрушения приводит к неустраняемым погрешностям, так как контактное взаимодействие является необходимым моментом, определяемым физикой явлений. В связи с этим, по-видимому, можно

считать все ранее полученные результаты по динамической механике разрушения как несоответствующие физике рассматриваемого явления; безусловно речь идет о результатах, полученных в рамках механики деформируемого тела. Столь серьезное заключение становится очевидным после рассмотрения выше постановки простейшей эталонной задачи классической динамической механики хрупкого разрушения, которая, как уже отмечалось выше, приводится во всех монографических изданиях по динамической механике хрупкого разрушения.

В связи с вышеизложенным **Общим выводом** представляется целесообразным, в крайнем случае по мнению автора настоящей обзорной статьи, рассмотрение **всех задач** динамической механики хрупкого разрушения с учетом контактного взаимодействия берегов трещин, поскольку оно соответствует **физике явлений**; лишь конкретные результаты, полученные с учетом контактного взаимодействия берегов трещин, позволяет оценить влияние обсуждаемого явления в отдельных классах задач. Исходя из соображений физического характера, как уже отмечалось выше перед **Общим выводом**, можно ожидать, что классическая динамическая механика хрупкого разрушения, пренебрегающая молчаливо обсуждаемым физическим явлением, должна получать завышенные значения максимальных величин, включая также информацию о коэффициентах интенсивности напряжений.

9.2.2. О методе исследования. Учитывая вышеизложенный **Общий вывод** и комментарии к нему, построение динамической механики хрупкого разрушения для материалов с трещинами при учете контактного взаимодействия берегов трещин было предложено в качестве темы докторской диссертации при поступлении В.В.Зозули в докторантуру Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ в 1989 г. Указанный момент можно считать началом разработки **Проблемы 7** (*Хрупкое разрушение материалов с трещинами при действии динамических нагрузок (с учетом контактного взаимодействия берегов трещины)*) в отделе динамики и устойчивости сплошных сред.

По обсуждаемой тематике первые статьи отдела динамики и устойчивости сплошных сред [119 – 124, 70 – 72, 430] были опубликованы в 1990 – 1992 гг., авторами указанных статей были В.В.Зозуля и, в определенной мере, автор настоящей обзорной статьи. Как выяснилось за все прошедшие годы, вышеуказанные статьи были в *мировой научной литературе первыми статьями по динамической механике хрупкого разрушения материалов с учетом контактного взаимодействия берегов трещин*. В обсуждаемых статьях была изложена постановка указанных задач, разработанный метод исследования и ряд результатов для плоских задач; более подробно вся информация с соответствующими аспектами математического характера представлена в монографии [154] (т. 4, книга 2) за 1993 г.

Естественно, что рассматриваемые в вышеуказанной постановке задачи формулируются как *нелинейные*, поскольку размеры зоны контакта определяются величиной перемещений берегов трещины и другими величинами; полученная при этом задача в простейшем случае состоит из *линейных уравнений и нелинейных граничных условий*. Для решения таких задач применяются пошаговые методы, когда на каждом шаге получается задача с фиксированной зоной контакта; это обычно принятый подход для решения задач с зоной контакта, размеры которой определяются из решения этой же задачи (нелинейной задачи). Конкретно в вышеуказанных исследованиях по построению динамической механики разрушения с учетом контактного взаимодействия берегов трещин применялся метод решения, основанный на сведении к граничным интегральным уравнениям с ограничениями в виде неравенств на берегах трещин; в дальнейшем использовался метод граничных элементов с шаговой по времени схемой и соответствующий итерационный процесс. Конкретные результаты получены для плоских трещин при действии гармонических динамических нагрузок. Необходимо отметить, что рассматриваемую проблему *следует относить к неклассическим проблемам механики разрушения* в связи с тем, что при ее исследовании *учитывается изменение конфигурации тела в кончике трещины – учитывается контактное взаимодействие берегов трещины*. Кроме того, неклассичность этой проблемы еще заключается в том, что *учитывается физическое явление, которое не принимали во внимание другие авторы и необходимость рассмотрения которого достаточно очевидно следует из соображений, изложенных в п. 9.2.1.*

9.3. Конкретные результаты. В настоящем п. 9.3 в краткой форме рассмотрим ряд конкретных результатов по динамической механике хрупкого разрушения материалов с трещинами, которые получены в соответствии с постановкой задач и метода исследования предыдущего п. 9.2 *с учетом контактного взаимодействия берегов трещин*. Вышеотмеченные конкретные результаты относятся к **Проблеме 7** (*Хрупкое разрушение материалов с трещинами при действии динамических нагрузок (с учетом контактного взаимодействия берегов трещины)*), обсуждению которой посвящен §9 настоящей обзорной статьи (часть III). Рассматриваемую краткую информацию о конкретных результатах представим отдельно для двумерных задач по пространственным переменным (плоские, антиплоские и другие задачи) и для трехмерных задач по пространственным переменным (пространственные задачи); вышеуказанные результаты, наряду с другими родственными результатами, изложены в публикациях, которые перечислены во Введении (п. 9.1).

9.3.1. Двухмерные задачи. Прежде всего, рассмотрим конкретные результаты, полученные в рамках классической динамической механики хрупкого разрушения (**без учета контактного взаимодействия берегов трещины**) и в рамках подходов **Проблемы 7** (постановка и метод п. 9.2, **с учетом контактного взаимодействия берегов трещины**), применительно к простейшей эталонной задаче, расчетная схема для которой представлена на Рис. 9.1. Дополнительные сведения и обозначения представлены в начале п. 9.2.1. Конкретные результаты применительно к обсуждаемой задаче представлены на Рис. 9.3 в виде зависимости K_I^* – безразмерного значения коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва от безразмерной частоты $a\omega c_1^{-1}$ (безразмерного волнового числа), где через c_1 обозначена скорость продольной волны; при этом величина K_I^* определяется следующим выражением

$$K_I^* = (K_I^{\text{стат}})^{-1} \cdot K_I^{\text{дин}}. \quad (9.2)$$

В (9.2) и ниже в настоящем §9 введены обозначения: $K_I^{\text{дин}}$ – амплитудное значение (без временного множителя типа $\exp i\omega t$) коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва при *динамическом нагружении*; $K_I^{\text{стат}}$ – коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва при *соответствующем статическом нагружении*.

На Рис. 9.3 кривая 1 соответствует динамической механике хрупкого разрушения **без учета контактного взаимодействия берегов трещины**, а кривая 2 относится к динамической механике хрупкого разрушения **с учетом контактного взаимодействия берегов трещины** (постановка и метод п. 9.2, **Проблема 7**). Из анализа результатов на Рис. 9.3 следует два вывода:

Вывод 1. При **учете** контактного взаимодействия берегов трещины происходит **снижение** максимального значения величины K_I^* (9.2).

Вывод 2. При **учете** контактного взаимодействия берегов трещины максимальное значение величины K_I^* (9.2) достигается при другом значении безразмерной частоты

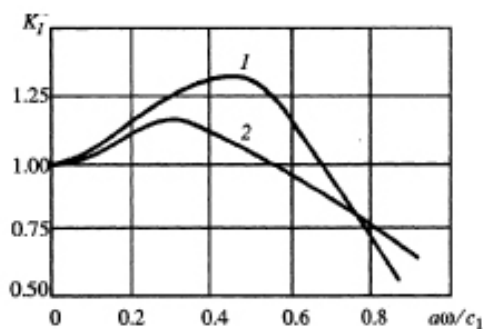


Рис. 9.3

по сравнению с классической динамической механикой хрупкого разрушения.

Целесообразно отметить, что **Вывод 1** подтверждает соображения физического характера (8 последних строк перед **Общим выводом** п. 9.2.1 и несколько последних строк перед п. 9.2.2), которые сформулированы до проведения строгих исследований *с учетом контактного взаимодействия берегов трещины*.

Результаты, изложенные выше в п. 9.3.1, достаточно подробно представлены в главе 7 монографии [154] (т. 4, книга 2).

Ниже в настоящем п. 9.3.1 кратко укажем некоторые задачи динамической механики хрупкого разрушения, которые исследованы в соответствии с постановкой и методом, изложенными в п. 9.2, *с учетом контактного взаимодействия берегов трещин*, что определяет их принадлежность к обсуждаемой **Проблеме 7**.

Задача для двух одинаковых параллельных плоских трещин, смещенных друг относительно друга, при падении под произвольным углом гармонической продольной волны; исследования проведены для бесконечного материала (не учитываются отраженные волны от внешней границы материала). Результаты количественного характера в виде графических зависимостей приведены на 12-и рисунках на стр. 192 – 193 монографии [154] (т. 4, книга 2).

Задача для одной трещины (Рис. 9.1) при полигармоническом нагружении, соответствующем падению вдоль оси $0x_2$ двух продольных или двух поперечных волн, частота в одной из которых отличается в два раза от другой; исследования проведены для бесконечного материала (не учитываются отраженные волны от внешней границы материала). Результаты количественного характера приведены в виде графических зависимостей вида на Рис. 9.3; при этом кривых типа 2 на Рис. 9.3 получено уже несколько вместо одной кривой типа 2 на Рис. 9.3. Необходимо отметить, что в силу *нелинейного характера* задач **Проблемы 7** (линейные уравнения, но нелинейные граничные условия) происходит взаимодействие при полигармоническом нагружении.

С результатами исследования других двумерных (по пространственным переменным) задач, относящихся к **Проблеме 7** (*с учетом контактного взаимодействия берегов трещин*), можно познакомиться, учитывая список публикаций в начале Введения (п. 9.1).

9.3.2. Трехмерные (пространственные) задачи. Как и в предыдущем п. 9.3.1 применительно к двумерным (по пространственным переменным), так и в настоящем п. 9.3.2 применительно к трехмерным (по пространственным переменным) задачам для случая простейших эталонных задач прежде всего рассмотрим конкретные результаты, полученные в рамках классической динамической механики хрупкого разрушения (*без учета контактного взаимодействия берегов трещин*) и в рамках подходов **Проблемы 7** (постановка и метод п. 9.2, *с учетом контактного взаимодействия берегов трещин*) и **проведем их сравнение**.

Пример 1. Так, на Рис. 9.4 представлены конкретные результаты применительно к следующей простейшей эталонной задаче. Рассматривается бесконечный материал (не учитываются отраженные волны от внешних границ области, занятой материалом), в котором в плоскости $x_1 0x_2$ расположена плоская трещина в виде кругового диска (penny-shaped crack) радиуса a . Вдоль оси $0x_3$ (перпендикулярно к трещине) падает гармоническая продольная волна с частотой ω . Вышеизложенная ситуация аналогична ситуации, представленной на Рис. 9.1 для случая двумерной задачи (плоская деформация в плоскости $x_1 0x_2$).

На Рис. 9.4 для обсуждаемой пространственной задачи представлена зависимость величины K_I^* – безразмерного значения коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва, определяемого выражением (9.2), от безразмерной частоты $a\omega c_2^{-1}$ (безразмерного волнового числа), где через c_2 обозначена скорость поперечной волны. Необходимо отметить, что на горизонтальной оси на Рис. 9.3 представлена безразмерная величина $a\omega c_1^{-1}$, а на Рис. 9.4 и 9.5 представлена безразмерная величина $a\omega c_2^{-1}$, что соответствует первоисточникам [154] (т. 4, книга 2), [531] и [438].

На Рис. 9.4 кривая 1 (как и на Рис. 9.3) соответствует классической динамической механике хрупкого разрушения (*без учета контактного взаимодействия берегов*

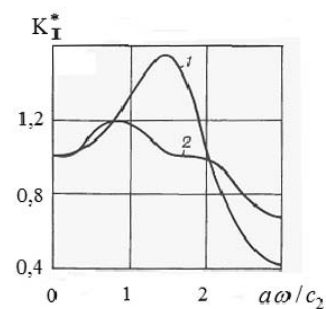


Рис. 9.4

трещины), а кривая 2 относится к динамической механике хрупкого разрушения с учетом контактного взаимодействия берегов трещин (постановка и метод п. 9.2, Проблема 7). Из анализа результатов на Рис. 9.4 следуют Вывод 1 и Вывод 2, представленные в п. 9.3.1 для двумерных задач, а также соображения физического характера, также представленные в п. 9.3.1. Из анализа результатов на Рис. 9.3 и 9.4 следует также Вывод 3, который не имеет места для двумерных задач.

Вывод 3. В отличие от двумерных задач (рис. 9.3) в трехмерных задачах (Рис. 9.4) по горизонтальной оси от «0» до величины, соответствующей \max на кривой 1, существует небольшой интервал, в котором результаты на кривой 2 выше результатов на кривой 1.

Пример 2. На Рис. 9.5 представлены конкретные результаты применительно к следующей более сложной эталонной задаче. Рассматривается бесконечный материал (не учитываются отраженные волны от внешних границ области, занятой материалом), в котором в плоскости $x_1 0x_2$ расположена плоская трещина в виде эллиптического диска, где a и b – большая и малая полуоси эллипса. Вдоль оси $0x_3$ (перпендикулярно к трещине) падает гармоническая продольная волна с частотой ω . Вышеизложенная ситуация аналогична ситуации, представленной на Рис. 9.1 для случая двумерной задачи (плоская деформация в плоскости $x_1 0x_2$), и ситуации в Примере 1 настоящего п. 9.3.2.

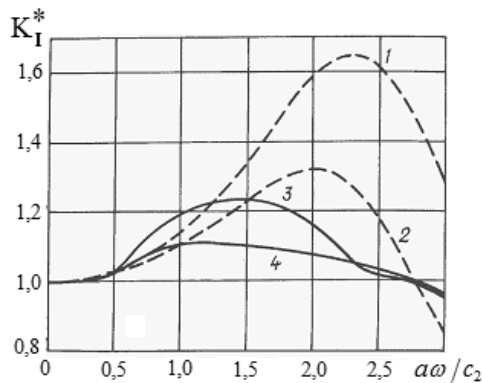


Рис. 9.5

На Рис. 9.5 для обсуждаемой пространственной задачи представлена зависимость величины K_I^* – безразмерного значения коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва, определяемого выражением (9.2), от безразмерной частоты $a\omega c_2^{-1}$ (безразмерного волнового числа), где c_2 – скорость поперечной волны и a – большая полуось эллиптической трещины; результаты на Рис. 9.5 представлены в виде пунктирных кривых, отмеченных цифрами 1 и 2, и сплошных кривых, отмеченных цифрами 3 и 4. Результаты на кривых 1 и 3 относятся к вершине малой полуоси эллипса, а результаты на кривых 2 и 4 относятся к вершине большой полуоси; пунктирные кривые 1 и 2 соответствуют результатам классической динамической механики хрупкого разрушения (без учета контактного взаимодействия берегов трещины), сплошные кривые 3 и 4 соответствуют динамической механике хрупкого разрушения с учетом контактного взаимодействия берегов трещины (постановка и метод п. 9.2, Проблема 7).

Из анализа результатов на Рис. 9.5 следуют Выводы 1 и 2, сформулированные в п. 9.3.1, и Вывод 3, сформулированный в Примере 1 настоящего п. 9.3.2. Кроме того, из анализа результатов статьи [438] и результатов, представленных на Рис. 9.5, следует Вывод 4, который соответствует исследованиям без учета и с учетом контактного взаимодействия берегов трещин.

Вывод 4. При нормальном падении гармонической продольной волны на плоскую трещину в виде эллиптического диска \max величины K_I^* (9.2) возникает в окрестности продолжения малой полуоси и \min величины K_I^* (9.2) возникает в окрестности продолжения большой полуоси эллиптической трещины.

Целесообразно отметить, что в выше рассмотренных двух примерах сравнительно подробно, с точки зрения стиля настоящей обзорной статьи, приведена краткая информация о конкретных двух пространственных задачах динамической механики хрупкого разрушения (падение гармонической продольной волны на плоскую трещи-

ну в виде кругового диска (penny-shaped crack) – **Пример 1** или на плоскую трещину в виде эллиптического диска – **Пример 2**), которые исследованы с учетом *контактного взаимодействия берегов трещин* (постановка и метод п. 9.2, **Проблема 7**). В список литературы по динамической механике хрупкого разрушения материалов с учетом *контактного взаимодействия берегов трещин* (постановка и метод п. 9.2, **Проблема 7**), который приведен во Введении (п. 9.1) в настоящий §9, указаны и другие публикации, относящиеся к пространственным задачам, которые опубликованы по обсуждаемой тематике отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ. В силу определенной ограниченности объема части III настоящей обзорной статьи отсутствует возможность привести краткую информацию по вышеотмеченным публикациям; в связи с этим ниже в настоящем п. 9.3.2 укажем лишь перечень пространственных задач, которые исследованы при обсуждаемой постановке по динамической механике хрупкого разрушения материалов с учетом *контактного взаимодействия берегов трещин*.

Задача для материала с трещиной в виде кругового диска (penny-shaped crack) при падении совместно гармонических продольных и поперечных волн под произвольным углом к плоскости трещины. Исследования проведены для бесконечного материала (не учитываются отраженные волны от внешней границы области, занятой материалом). Приведены конкретные результаты в виде графических зависимостей различных величин.

Задача для материала с трещиной в виде эллиптического диска при падении гармонической поперечной волны, распространяющейся перпендикулярно к плоскости трещины и под произвольным углом к большой оси эллипса. Исследования проведены для бесконечного материала (не учитываются отраженные волны от внешней границы области, занятой материалом). Приведены конкретные результаты в виде графических зависимостей различных величин.

Задача для материала с двумя одинаковыми трещинами в виде кругового диска (penny-shaped crack), которые расположены в одной плоскости или в двух параллельных плоскостях (это две различные задачи), при нормальном падении гармонической продольной волны. Исследования проведены для бесконечного материала (не учитываются отраженные волны от внешней границы области, занятой материалом). Приведены отдельные конкретные результаты в виде графических зависимостей различных величин; получение отдельных конкретных результатов и особенно их анализ, в крайнем случае по мнению автора настоящей обзорной статьи, целесообразно продолжить.

Следует также отметить, что докторская диссертация А.В.Меньшикова, указанная во Введении (п. 9.1) в §9, также посвящена пространственным задачам динамической механики хрупкого разрушения материалов с учетом *контактного взаимодействия берегов трещин* (постановка и метод п. 9.2, **Проблема 7**).

Вышеизложенными краткими сведениями по **Проблеме 7** (*Хрупкое разрушение материалов с трещинами при действии динамических нагрузок (с учетом контактного взаимодействия берегов трещины)*) ограничимся в настоящей обзорной статье.

В заключение к §9 также отметим, что *первыми публикациями в мировой научной литературе* по исследованию задач динамической механики разрушения с учетом *контактного взаимодействия берегов трещин* были статьи за 1990 – 1992 гг. [119 – 124, 70 – 72, 430] В.В.Зозули и автора настоящей обзорной статьи.

§10. Проблема 8. Разрушение тонкостенных тел с трещинами при растяжении в случае предварительной потери устойчивости.

В настоящем параграфе в весьма краткой форме (даже по сравнению с **Проблемой 7**, которая уже обсуждена в рассматриваемой части III настоящей обзорной статьи) представлены результаты по вышеуказанной **Проблеме 8**, которые получены в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ; при этом изложение обсуждаемых результатов представлено в стиле, анонсированном во Введении (часть I) в данную обзорную статью (без чрезмерного привлечения аспектов математического характера).

10.1. Введение. Необходимо отметить, что «неклассичность» обсуждаемой проблемы механики разрушения заключается в том, что в рассматриваемом случае не выполняется *Условие 2* применимости классической механики разрушения (потеря

устойчивости не предшествует разрушению), которое сформулировано в п. 1.1. §1 настоящей обзорной статьи (часть I), где также проведено обсуждение вышеуказанного условия. Действительно, в классической механике разрушения материалов с трещинами при растяжении и сдвиге практически всегда молчаливо предполагается, что разрушение начинается от той конфигурации тела, которую оно имело в недеформированном состоянии. Следовательно, принимается, что в процессе деформирования до начала разрушения не происходит резкого изменения конфигурации тела, т.е. потеря устойчивости не предшествует разрушению. *В действительности даже при растяжении в случае тонкостенных элементов конструкций локальная потеря устойчивости состояния равновесия возле трещин может предшествовать разрушению.*

Эталонными задачами в обсуждаемой неклассической проблеме механики разрушения являются задачи о растяжении тонкостенных пластин и оболочек перпендикулярно к трещине; в случае цилиндрических оболочек, как правило, исследуется ситуация, когда трещина расположена вдоль направляющей оболочки и оболочка растягивается вдоль ее оси. В указанной ситуации в результате концентрации напряжений возле трещины возникают локальные зоны сжимающих напряжений, что может привести к локальной потере устойчивости возле трещин до начала процесса разрушения.

Различные авторы при исследовании вышеизложенной ситуации применяют различные приближенные расчетные схемы при анализе локальных зон потери устойчивости возле трещин и отверстий.

В работах автора настоящей обзорной статьи и его учеников для анализа рассматриваемой проблемы применялись строгие уравнения механики тонкостенных систем с последующим использованием вариационных и численных методов; при этом существенное внимание уделялось проведению экспериментальных исследований и использованию их результатов при анализе рассматриваемой проблемы.

Основные результаты по рассматриваемой проблеме, полученные в отделе динамики и устойчивости сплошных сред, представлены в монографиях [69] за 1981 г. и [154] (т. 4, книга 1) за 1992 г., в обзорных статьях [371 – 373], которые полностью посвящены анализу результатов по **Проблеме 8**, и в обзорных статьях [55, 329, 336, 347, 350], которые посвящены анализу результатов по различным неклассическим проблемам механики разрушения, в том числе и по **Проблеме 8**. Первоначально вышеуказанные результаты были представлены в публикациях [68, 77 – 79, 130, 131, 255 – 270, 370, 397, 399, 508 – 510, 536, 537] и в ряде других публикаций, начиная с 1975 г.; при этом первый доклад [398] на международном конгрессе был представлен уже в 1976 г.

По рассматриваемому научному направлению отдела динамики и устойчивости сплошных сред подготовлены и защищены 2 диссертации: Г.Г.Кулиева – на степень доктора физико-математических наук; М.Ш.Дышеля – на степень доктора технических наук.

Примечание 10.1. В докторскую диссертацию Г.Г.Кулиева наряду с результатами исследований по обсуждаемой **Проблеме 8** (*Разрушение тонкостенных тел с трещинами при растяжении в случае предварительной потери устойчивости*), также вошли результаты исследований по устойчивости состояния равновесия горного массива возле горных выработок, которые сокращенно называются теорией устойчивости горных выработок. Указанные исследования Г.Г.Кулиева по теории устойчивости горных выработок выполнены на основании подхода монографии [34] за 1977 г. автора настоящей обзорной статьи; отметим, что современный обзор результатов по теории устойчивости горных выработок представлен в обзорной статье [344] за 2003 г. В последующие годы Г.Г.Кулиев проводит научные исследования в Азербайджане, где и были, в значительной мере, опубликованы полученные новые результаты; в список литературы к настоящей обзорной статье включены статьи Г.Г.Кулиева, относящиеся к киевскому периоду его деятельности.

10.2. Постановка задач. Во Введении (п. 10.1) были сформулированы соображения качественного характера о том, что при растяжении пластин и оболочек с трещинами в результате концентрации напряжений возле трещин возникают локальные зоны сжимающих напряжений, что может привести к локальной потере устойчивости до

разрушения. Отметим, что вышеизложенное соображение имеет *только качественный характер*; ниже на примере простейшей эталонной задачи приведем информацию *количественного характера* об обсуждаемых зонах сжимающих напряжений.

Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим известное точное решение Инглиса-Мухелишвили об упругом равновесии изотропной пластины с трещиной при одноосном растяжении (Рис. 10.1) в перпендикулярном направлении к трещине. В верхней части Рис. 10.1 показано распределение напряжений σ_{11} , действующих вдоль контура трещины; заштрихованные области соответствуют сжимающим напряжениям σ_{11} при действии одноосного растяжения «на бесконечности», причем кривые с числами (-1; -0,3; -0,1) отделяют области с напряжениями σ_{11} указанной интенсивности. Поскольку сжимающие напряжения действуют вдоль трещины, то при большой длине трещины по сравнению с толщиной пластины локальная потеря устойчивости, характеризуемая нормальным прогибом w , может предшествовать разрушению. Аналогичная ситуация может возникнуть и в тонкостенных оболочках при внешних нагрузках, вызывающих как бы только растягивающие напряжения возле трещин.

Учитывая вышеизложенную информацию, можно обоснованно считать, что в обсуждаемой **Проблеме 8** в общем случае рассматривается сравнительно широкий круг вопросов построения механики разрушения для тонкостенных пластин и оболочек при действии внешних нагрузок, обеспечивающих возникновение возле трещин, в основном, растягивающих напряжений, применительно к случаю, когда локальная потеря устойчивости возле трещин может предшествовать разрушению. Для построения механики разрушения в обсуждаемом случае необходимо решить *два вопроса*:

первый вопрос – исследовать локальную потерю устойчивости возле трещины, соответствующую рассматриваемому виду нагружения;

второй вопрос – исследовать механизм разрушения, исходя из формы тонкостенного элемента и распределения напряженно-деформированного состояния, соответствующего тонкостенному элементу после потери устойчивости.

Основные публикации до настоящего времени, за редким исключением, посвящены исследованию первого из вышеуказанных вопросов, включая теоретические и экспериментальные подходы. Исследованию второго вопроса посвящены достаточно малочисленные публикации, где приведены, за редким исключением, результаты экспериментальных исследований.

При анализе локальной потери устойчивости возле трещин и отверстий при растяжении пластин и оболочек, что в случае трещин соответствует *первому вопросу* при построении механики разрушения в рамках обсуждаемой **Проблемы 8**, подавляющее большинство авторов предлагают или применяют различные приближенные расчетные схемы и модели; в числе примеров можно указать статью [158] за 1968 г. для случая растяжения пластины с отверстием и статью [106] за 1978 г. для случая пластины с трещиной. Если считать мембрану приближенной расчетной схемой или моделью при проведении исследований для пластины, то целесообразно также указать статью [171] еще за 1963 г., в которой изложено *точное решение* задачи о локальной потере устойчивости возле отверстия при растяжении мембраны. В большинстве случаев исследования проводятся в рамках достаточно приближенных расчетных схем и моделей; для примера рассмотрим ниже расчетную схему, которая применялась в [106] для растяжения пластины с трещиной с целью анализа локальной потери устойчиво-

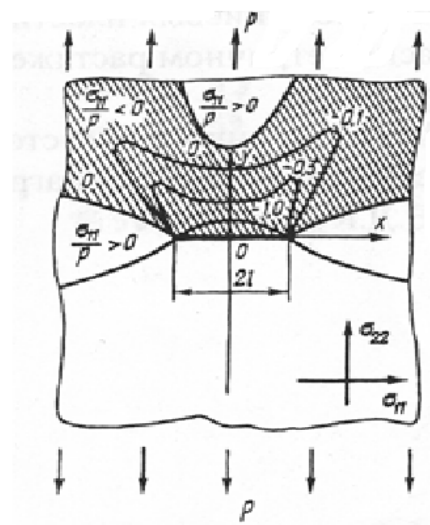


Рис. 10.1

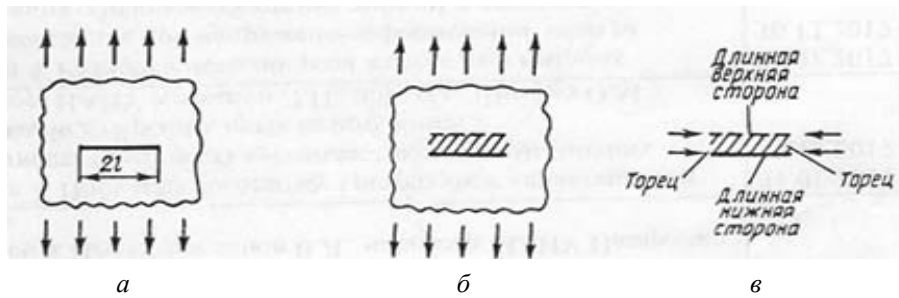


Рис. 10.2

сти возле трещины. Вдоль трещины (Рис. 10.2, *а*) условно выделяется конечная полоса определенной ширины и длины (на Рис. 10.2, *б* выделяемая полоса заштрихована); в последующем анализируется устойчивость таким образом выделенной полосы под действием нагрузок, соответствующих напряжениям в исходной пластине с трещиной (Рис. 10.2, *в*). Приближенность и недостатки такого подхода очевидны, так как он связан с произволом при выборе ширины и длины выделяемой полосы, вида граничных условий на торцах и на верхней длинной стороне (Рис. 10.2, *в*) этой полосы, а также характера и интенсивности назначаемых внешних нагрузок (Рис. 10.2, *в*).

Вывод. Из вышеизложенной на Рис. 10.2, *а – в* расчетной схемы статьи [106], приведенной в качестве примера, следует, что для получения более строгих результатов необходимы более достоверные расчетные схемы, более последовательные методы и проведение дополнительных исследований.

10.3. Методы исследований и полученные результаты. В публикациях автора настоящей обзорной статьи, его учеников и коллег были предложены более строгие методы и проведены исследования по *первому* вопросу, а также были организованы целенаправленные экспериментальные исследования по *второму* вопросу, решения которых совместно определяют построение механики разрушения в рамках обсуждаемой **Проблемы 8**. В частности, *при решении первого вопроса* был предложен следующий сравнительно более строгий подход.

Для исследования локальной потери устойчивости в случае пластин и оболочек в ситуации, которая схематично представлена на Рис. 10.1, применяется линеаризованная теория устойчивости тонкостенных пластин или пологих оболочек. Исследование проводится для «бесконечной» области (плоскости); при этом на берегах трещины ставятся граничные условия, соответствующие конкретной задаче, и на «бесконечности» (при удалении от трещины) ставятся условия затухания.

При вышеизложенном подходе с привлечением вариационных и численных методов получены конкретные результаты для пластин и цилиндрических оболочек и проведено сравнение полученных конкретных результатов с экспериментальными результатами. С обсуждаемыми результатами можно познакомиться в опубликованных статьях, которые указаны во Введении (п. 10.1) в §10, и частично в монографии [154] (т. 4, книга 1).

В качестве примера приведем некоторые результаты для пластин применительно к ситуации, которая представлена на Рис. 10.1. С применением *вышеуказанного предложенного подхода* для величины критической нагрузки p_{cr} , соответствующей потере устойчивости, получено следующее выражение:

$$p_{cr} = t_*(\nu) \frac{E}{6(1-\nu^2)} \frac{1}{l^2}. \quad (10.1)$$

В (10.1) и ниже введены следующие обозначения: E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; l – безразмерная длина трещины, отнесенная к h – толщине пластины; $t_*(\nu)$ – минимальное собственное число сформулированной задачи на собственные значения.

В рамках механики разрушения Гриффитса [276] величина разрушающей нагрузки определяется следующим выражением

$$p_* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi h}} \frac{1}{\sqrt{l}}, \quad (10.2)$$

где γ – удельная поверхностная энергия или более строго – плотность эффективной поверхностной энергии хрупкого или квазихрупкого материала.

На Рис. 10.3 схематически показана зависимость величины p_{cr} , определяемой из выражения (10.1), в виде пунктирной линии и величины p_* , определяемой из выражения (10.2), в виде сплошной линии от безразмерной длины трещины – величины l . Из Рис. 10.3 следует результат качественного характера – при длинах трещины $l > l_{cr}$ потеря устойчивости будет предшествовать разрушению.

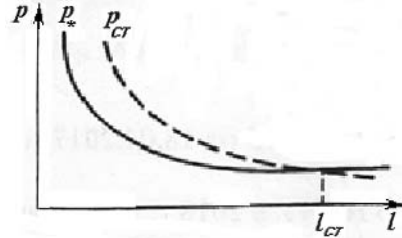


Рис. 10.3

Как следует из выражения (10.1), точность определения величины критической нагрузки p_{cr} , соответствующей потере устойчивости, определяется точностью определения минимального положительного собственного числа сформулированной задачи на собственные значения в соответствии с предложенным подходом к решению обсуждаемой задачи, который (подход) в краткой форме изложен в начале настоящего п. 10.3. В связи с вышеизложенным приведем некоторые дополнительные сведения о предложенном подходе и следующих при его применении конкретных результатах в случае использования вариационного метода; более подробные сведения представлены в монографиях [69] и [154] (т. 4, книга 1), в которых также приведен анализ различных приближенных схем типа на Рис. 10.2.

В соответствии с предложенным подходом, сформулированным в начале п. 10.3, для исследования локальной потери устойчивости тонкостенных пластин с трещинами при растяжении применяются линеаризованные уравнения Кармана; при этом рассматривается приращение полной энергии тонкостенной пластины $\Delta \mathcal{E}$ при переходе от невозмущенного состояния (при $w \equiv 0$) к возмущенному состоянию ($w \neq 0$). Исследование проводится для «бесконечной» области (внешность трещины) и применяется вариационный метод с минимизацией функционала $\Delta \mathcal{E}$. Для прогиба w используется представление через координатные функции $\begin{bmatrix} \rho^{-n} \cos m\theta \\ \sin \end{bmatrix}$ в виде

$$w = |\omega'(\zeta)|^4 \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \left(\frac{1}{\rho}\right)^n \frac{\cos m\theta}{\sin}, \quad (10.3)$$

где: A_{nm} и B_{nm} – неизвестные постоянные; $\omega(\zeta)$ – функция, реализующая конформное отображение рассматриваемой области (внешность трещины, Рис. 10.1) на внешность круга единичного радиуса

$$z = x + iy; \quad \zeta = \rho e^{i\theta}; \quad \omega(\zeta) = \frac{l}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (10.4)$$

Необходимо отметить, что используемые координатные функции удовлетворяют условиям затухания «на бесконечности» (при $\rho \rightarrow \infty$); при этом выбор множителя $|\omega'(\zeta)|^4$ в выражении (10.3) подробно обсужден и обоснован в монографиях [69] и [154] (т. 4, книга 1). При исследовании применяется вариационное уравнение

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0. \quad (10.5)$$

Приведем сведения об отдельных результатах, полученных с привлечением *предложенного подхода*, для пластины, представленной на Рис. 10.1. Прежде всего, приведем сведения о точности вычислений величины $t_*(\nu)$ – минимального собственного числа сформулированной задачи на собственные значения при применении *предложенного подхода*, которое входит в выражение (10.1) для определения критической нагрузки, соответствующей потере устойчивости. Для случая $\nu = 0,3$ в Табл. 10.1 приведены значения величины $t_*(\nu)$, которые получены при различном количестве координатных функций в представлении (10.3); при этом количество координатных функций в (10.3) в Табл. 10.1 определяется числом Ω согласно обозначениям [69] и [154] (т. 4, книга 1). Из анализа результатов в Табл. 10.1 следует, что результаты при $\Omega = 24$ и $\Omega = 40$ отличаются в третьей значащей цифре; таким образом, при вычислениях можно ограничиться числом координатных функций $\Omega = 24$. Из результатов, представленных в Табл. 10.1, можно сделать следующий общий вывод.

Таблица 10.1

Ω	4	12	24	40
$t_*(\nu)$	25	5,945	5,516	5,508

Предложенный подход является весьма эффективным, так как он позволяет получить достаточно точные результаты; все же для получения достаточно точных результатов необходимо привлечь достаточно большое число координатных функций (в обсуждаемом случае необходимое число координатных функций равно 24). В Табл. 10.2 приведены для различных значений коэффициента Пуассона (величины ν) численные значения величины $t_*(\nu)$, которая входит в выражение (10.1) для определения величины критической нагрузки, соответствующей потере устойчивости.

Таблица 10.2

ν	0,10	0,20	0,25	0,28	0,30	0,33	0,35	0,40
$t_*(\nu)$	6,24	5,71	5,62	5,54	5,51	5,42	5,37	5,28

Результаты, представленные в Табл. 10.2, получены с точностью, соответствующей результатам в Табл. 10.1 (при $\Omega = 24$).

Таким образом, можно считать, что для пластины в ситуации, представленной на Рис. 10.1, результаты (выражение (10.1), Табл. 10.2) достаточно последовательно и строго и сравнительно точно решают *первый вопрос* (по терминологии средней части п. 10.2) при построении механики разрушения для **Проблемы 8** (*Разрушение тонкостенных тел с трещинами при растяжении в случае предварительной потери устойчивости*). Дополнительные сведения, относящиеся к исследованию обсуждаемого *первого вопроса* для пластин и оболочек, можно получить из монографий [69] и [154] (т. 4, книга 1), а также из статей, которые указаны во Введении (п. 10.1) в §10.

При исследовании *второго вопроса* (по терминологии средней части п. 10.2) построения механики разрушения для обсуждаемой **Проблемы 8** в отделе динамики и устойчивости сплошных сред анализировались результаты специально поставленных экспериментов двух типов. Для первого и второго типа экспериментов применялись образцы (пластины и оболочки) из одного и того же материала и с теми же геометрическими параметрами. В первом типе экспериментов не исключалась потеря устойчивости до разрушения для тех образцов, для которых это явление возможно. Во втором типе экспериментов предварительная потеря устойчивости до разрушения исключалась за счет деформирования пластины между двумя жесткими направляющими, расстояние между которыми не изменялось. Различие между величинами разрушающих нагрузок, соответствующих этим двум типам экспериментов, в определенном смысле иллюстрирует влияние предварительной потери устойчивости (локальной потери устойчивости возле трещин) на механизм разрушения. Многочисленные конкретные результаты, полученные для различных материалов (металлы и сплавы) применительно к различным пластинам и оболочкам, приведены в монографиях [69] и [154]

(т. 4, книга 1). Ниже в Табл. 10.3 приведены, в качестве примера, конкретные результаты для пяти материалов в случае пластины.

Таблица 10.3

Материалы	$2b$, мм	h , мм	l_0/b	ρ , МПа		δ %
				p_1	p_2	
Алюминиевый сплав АМг6М	250	0,90	0,32	119	126	8,8
	250	0,26	0,40	116	144	23,7
Алюминиевый сплав АМцМ	250	0,92	0,24	67	72	6,9
	250	0,92	0,40	52	57	8,8
Сталь 65Г	250	0,51	0,24	256	270	5,2
	250	0,54	0,24	210	220	4,5
Сталь 20	250	0,54	0,32	189	200	5,5
	250	0,54	0,40	164	176	6,8
Сталь Н36	250	0,43	0,32	335	435	21,1

В Табл. 10.3 введены обозначения: $2b$ – ширина пластины (полосы); h – толщина пластины; $2l_0$ – длина трещины; p_1 – величина разрушающей нагрузки, когда допускалась потеря устойчивости; p_2 – величина разрушающей нагрузки для той же пластины, когда потеря устойчивости исключалась; $\delta = (p_1 - p_2) \cdot p_2^{-1} \cdot 100\%$ – относительная погрешность. Из результатов, представленных в Табл. 10.3, следует, что различие между вышеуказанными разрушающими нагрузками может достигать и 23%; отмеченное свидетельствует о **существенности рассматриваемого явления и необходимости развития этого научного направления.**

Примечание 10.2. В заключение к настоящему §10 необходимо отметить следующую ситуацию. Обсуждаемый §10, посвященный краткому обзору результатов по **Проблеме 8** (*Разрушение тонкостенных тел с трещинами при растяжении в случае предварительной потери устойчивости*), сформулирован в объеме, который является наименьшим из всех **Проблем 1 – 8**; к тому же материал §10 в значительной мере соответствует материалу обзоров [347] за 1006 – 2007 г. и обзор [350] за 2009 г. Вышеуказанная ситуация сложилась, по-видимому, в связи с тем, что, по мнению автора настоящей обзорной статьи, за годы, прошедшие со времени публикаций указанных обзоров (с 2006 – 2009 гг.), по обсуждаемой **Проблеме 8** не были получены новые, в определенной мере, существенные результаты.

Вышеизложенными в §10 сведениями ограничимся при обсуждении **Проблемы 8** (*Разрушение тонкостенных тел с трещинами при растяжении в случае предварительной потери устойчивости*).

Общее заключение к обзорной статье (части I, II, III).

Актуальность обсуждаемых исследований (**неклассические проблемы механики разрушения**) и достаточно длительный период (**около полувека**) их проведения в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ способствовали формированию (у автора настоящей обзорной статьи) убежденности в целесообразности, а в определенной мере, и необходимости подготовки представленного читателям обзора, который состоит из трех частей, опубликованных журналом «Прикладная механика» в № 2 – 4 за 2019 г.

Специалисты по различным научно-техническим направлениям в представленном обзоре найдут информацию в краткой форме по широкому аспекту неклассических проблем механики разрушения; начинающие молодые исследователи в представленном обзоре найдут информацию по сравнительно новым проблемам механики разрушения с достаточно обширным списком литературы, насчитывающим 597 наименований.

Безусловно, создание подобного уровня обзоров, кроме наличия соответствующих научных результатов, требует длительного анализа различных аспектов исследований (длительной работы на протяжении многих месяцев); в связи с этим, по-видимому, в ближайшее время не возникнет большое количество таких обзоров.

Применительно к обсуждаемому обзору возникло соображение, что в связи с постоянно расширяющимся созданием новых материалов и на их основе новых элементов конструкций **неклассические проблемы механики разрушения** могут оставаться достаточно актуальными.

Как представляется автору настоящей обзорной статьи, обсуждаемые научные результаты *по восьми неклассическим проблемам механики разрушения*, полученные в Институте механики им. С.П.Тимошенко НАНУ за последние 50 лет, *по общности и строгости постановок проблем, по точности и общности полученных конкретных результатов, а также по тщательности и обоснованности сформулированных выводов, относящихся к исследованию анализируемых механических явлений, не имеют аналогов в современной мировой науке по рассматриваемым проблемам.*

РЕЗЮМЕ. Оглядова стаття присвячена короткому опису та відповідному аналізу основних результатів по неklasичним проблемам механіки руйнування, які одержані автором статті та його учнями за останні 50 років у відділі динаміки та стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ.

Оглядова стаття розділена на три частини. Перша частина має підзаголовок «Загальні питання» і опублікована в журналі «Прикладная механика» (55, № 2, 2019); в першу частину включені Вступ та §§1 і 2. Друга частина має підзаголовок «Руйнування композитних матеріалів при стиску» і опублікована в журналі «Прикладная механика» (55, № 3, 2019); в другу частину включені §§3 – 5. Третя частина має підзаголовок «Інші неklasичні проблеми механіки руйнування» і публікується в журналі «Прикладная механика» (55, № 4, 2019); в третю частину включені §§6 – 10 та список літератури, який є загальним для всіх трьох частин.

1. Акбаров С.Д. Влияние реологических параметров материала матрицы на распределение самоуравновешенных напряжений в многослойном композите с искривленными структурами // Мех. комп. материалов. – 1986. – № 4. – С. 610 – 617.
2. Акбаров С.Д. К механике композитных материалов с локальными искривлениями в структуре // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 1. – С. 119 – 122.
3. Акбаров С.Д. О распределении самоуравновешенных напряжений в многослойном композитном материале с искривленными структурами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 83 – 89.
4. Акбаров С.Д., Гузь А.Н. О напряженном состоянии в композитном материале с искривленными слоями с малой концентрацией наполнителя // Мех. комп. материалов. – 1984. – № 6. – С. 990 – 996.
5. Акбаров С.Д., Гузь А.Н. К механике композитных материалов с искривленными структурами // ДАН СССР. – 1985. – 281, № 1. – С. 37 – 41.
6. Акбаров С.Д., Гузь А.Н. Об одном эффекте в механике разрушения композитных материалов // ДАН СССР. – 1986. – 290, № 1. – С. 23 – 26.
7. Акбаров С.Д., Гузь А.Н. Распределение напряжений в многослойном композитном материале с искривленными структурами (модель кусочно-однородного тела) // Мех. комп. материалов. – 1987. – № 4. – С. 592 – 599.
8. Бабич И.Ю. О неустойчивости деформирования композитных материалов при малых деформациях // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1973. – № 10. – С. 909 – 913.
9. Бабич И.Ю., Гузь А.Н. О применимости подхода Эйлера к исследованию устойчивости деформирования анизотропных нелинейно-упругих тел при конечных докритических деформациях // ДАН СССР. – 1972. – 202, № 4. – С. 795 – 796.
10. Бабич И.Ю., Гузь А.Н. К теории упругой устойчивости сжимаемых и несжимаемых композитных сред // Мех. полимеров. – 1972. – № 2. – С. 267 – 275.
11. Бабич И.Ю., Гузь А.Н. Трехмерная задача об устойчивости волокна в матрице при высокоэластических деформациях // Изв. АН СССР. – 1973. – № 3. – С. 44 – 48.
12. Богданов В.Л. Неосесимметричная задача о разрушении полупространства при сжатии вдоль приповерхностной круговой трещины // Докл. АН УССР, Сер. Б. – 1991. – № 5. – С. 42 – 47.
13. Богданов В.Л. Осесимметричная задача про приповерхневу тріщину нормального відриву в композитному матеріалі з залишковими напруженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, № 2. – С. 45 – 54.

14. Богданов В.Л. Неосесимметричная задача о периодической системе дискообразных трещин нормального отрыва в теле с начальными напряжениями // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 4. – С. 149 – 151.
15. Богданов В.Л. О кручении предварительно напряженного материала с двумя параллельными соосными трещинами // *Доп. НАНУ.* – 2008. – № 11. – С. 59 – 66.
16. Богданов В.Л. Неосесимметрична задача про дві паралельні співвісні тріщини нормального відриву в матеріалі з початковими напруженнями // *Доп. НАНУ.* – 2010. – № 8. – С. 49 – 59.
17. Богданов В.Л., Гузь А.Н., Назаренко В.М. Объединенный подход в неклассических проблемах механики разрушения. – Saarbrücken / Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 528 с.
18. Богданов В.Л., Назаренко В.М. Сжатие композитного материала вдоль приповерхностной макротрещины // *Мех. комп. материалов.* – 1994. – **30**, № 3. – С. 352 – 358.
19. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М.: Физматгиз, 1953. – 264 с.
20. Гаращук И.Н. Об устойчивости волокна в матрице при неоднородных докритических деформациях // *Докл. АН УССР, Сер. А.* – 1983. – № 8. – С. 24 – 27.
21. Гольдман А.Я., Савельева Н.Ф., Смирнов В.И. Исследование механических свойств тканевых стеклопластиков при растяжении и сжатии нормально к плоскости армирования // *Механика полимеров.* – 1968. – № 5 – С. 803 – 809.
22. Гузь А.Н. О точности гипотезы Кирхгоффа-Лява при определении критических сил в теории упругой устойчивости // *ДАН СССР.* – 1968. – **179**, № 3. – С. 552 – 554.
23. Гузь А.Н. Об устойчивости трехмерных упругих тел // *ПММ.* – 1968. – **32**, № 5. – С. 930 – 935.
24. Гузь А.Н. Об устойчивости полосы // *Изв. АН СССР, Механика твердого тела.* – 1969. – № 6. – С. 111 – 113.
25. Гузь А.Н. О построении теории устойчивости однонаправленных волокнистых материалов // *Прикл. механика.* – 1969. – **5**, № 2. – С. 62 – 70.
26. Гузь О.М. Про визначення теоретичної границі міцності на стиск армованих матеріалів // *Доп. АН УРСР, Сер. А.* – 1969. – № 3. – С. 236 – 238.
27. Гузь А.Н. Об условия применения метода Эйлера исследования устойчивости деформирования нелинейно-упругих тел при конечных докритических деформациях // *ДАН СССР.* – 1970. – **194**, № 3. – С. 38 – 40.
28. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости деформирования материалов с реологическими свойствами // *Изв. АН СССР, Механика твердого тела.* – 1970. – № 6. – С. 104 – 107.
29. Гузь А.Н. О построении теории прочности однонаправленных армированных материалов на сжатие // *Проблемы прочности.* – 1971. – **3**, № 3. – С. 37 – 40.
30. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 276 с.
31. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 272 с.
32. Гузь А.Н. Об аналогиях между линеаризованными и линейными задачами теории упругости // *ДАН СССР.* – 1973. – **212**, № 5. – С. 1089 – 1091.
33. Гузь О.М. Про варіаційні принципи тривимірних задач стійкості непружних тіл // *Доп. АН УРСР, Сер. А.* – 1973. – № 11. – С. 1008 – 1012.
34. Гузь А.Н. Основы теории устойчивости горных выработок. – К.: Наук. думка, 1977. – 204 с.
35. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. – К.: Наук. думка, 1979. – 144 с.
36. Гузь А.Н. О вариационных принципах трехмерной теории устойчивости деформируемых тел при действии «следящих» нагрузок // *ДАН СССР.* – 1979. – **246**, № 6. – С. 1314 – 1316.
37. Гузь А.Н. К линеаризованной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // *ДАН СССР.* – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085 – 1088.
38. Гузь А.Н. Трещины отрыва в упругих телах с начальными напряжениями // *ДАН СССР.* – 1980. – **254**, № 3. – С. 571 – 574.
39. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача // *ДАН СССР.* – 1981. – **259**, № 6. – С. 1315 – 1318.
40. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача // *ДАН СССР.* – 1981. – **261**, № 1. – С. 42 – 45.
41. Гузь А.Н. О критерии хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями // *ДАН СССР.* – 1982. – **262**, № 2. – С. 285 – 288.
42. Гузь А.Н. О континуальной теории разрушения при сжатии композитного материала с упруго-пластической матрицей // *ДАН СССР.* – 1982. – **262**, № 3. – С. 556 – 560.

43. Гузь А.Н. Разрушение однонаправленных композитных материалов при осевом сжатии // *Мех. комп. материалов.* – 1982. – № 3. – С. 417 – 425.
44. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
45. Гузь А.Н. О континуальной теории композитных материалов с мелкомасштабными искривлениями в структуре // *ДАН СССР.* – 1983. – **268**, № 2. – С. 307 – 313.
46. Гузь А.Н. О теории колебаний композитных материалов с мелкомасштабными искривлениями в структуре // *ДАН СССР.* – 1983. – **270**, № 4. – С. 824 – 827.
47. Гузь А.Н. О критерии хрупкого разрушения при сжатии материалов с дефектами // *ДАН СССР.* – 1985. – **285**, № 4. – С. 828 – 831.
48. Гузь А.Н. О порядке особенности в кончике трещины в материалах с начальными напряжениями // *ДАН СССР.* – 1986. – **289**, № 2. – С. 310 – 313.
49. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 512 с.
50. Гузь А.Н. О континуальной теории разрушения композитных материалов при двухосном сжатии // *ДАН СССР.* – 1987. – **293**, № 4. – С. 805 – 809.
51. Гузь А.Н. О континуальной теории разрушения композитных материалов при смятии торцов // *ДАН СССР.* – 1988. – **298**, № 3. – С. 565 – 570.
52. Гузь А.Н. Точное решение плоской задачи о разрушении материала при сжатии вдоль трещин, лежащих в одной плоскости // *ДАН СССР.* – 1990. – **310**, № 3. – С. 563 – 566.
53. Гузь А.Н. О локальной устойчивости волокнистых композитов // *ДАН СССР.* – 1990. – **314**, № 4. – С. 806 – 809.
54. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. – К.: Наук. думка, 1990. – 630 с.
55. Гузь А.Н. О неклассических проблемах механики разрушения // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1993. – **29**, № 3. – С. 86 – 97.
56. Гузь А.Н. Движущиеся трещины в композитных материалах с начальными напряжениями // *Мех. комп. материалов.* – 2001. – **37**, № 5/6. – С. 695 – 708.
57. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2-х томах. – К.: «ЛИТЕРА», 2008.
 - Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.
 - Т. 2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
58. Гузь А.Н. Механика движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями (обзор) // *Прикл. механика.* – 2011. – **47**, № 2. – С. 3 – 75.
59. Гузь А.Н. О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // *Прикл. механика.* – 2014. – **50**, № 1. – С. 5 – 89.
60. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. В 2-х частях. – Saarbrücken / Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016.
 - Часть 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – 501 с.
 - Часть 2. Волны в полуграниченных телах. – 505 с.
61. Гузь А.Н., Гузь И.А. О континуальном приближении в теории устойчивости слоистых композитных материалов // *ДАН СССР.* – 1989. – **305**, № 5. – С. 1073 – 1076.
62. Гузь А.Н., Гузь И.А. О локальной неустойчивости слоистых композитных материалов // *ДАН СССР.* – 1990. – **311**, № 4. – С. 812 – 814.
63. Гузь А.Н., Гузь И.А., Меньшиков А.В., Меньшиков В.А. Пространственные задачи динамической механики разрушения материалов с трещинами в границе раздела (обзор) // *Прикл. механика.* – 2013. – **49**, № 1. – С. 3 – 78.
64. Гузь А.Н., Декрет В.А. Модель коротких волокон в теории устойчивости композитов. – Saarbrücken / Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 316 с.
65. Гузь А.Н., Декрет В.А. Модель волокон конечных размеров в трехмерной теории устойчивости композитных материалов (обзор) // *Прикл. механика.* – 2016. – **52**, № 1. – С. 3 – 77.
66. Гузь А.Н., Декрет В.А., Коханенко Ю.В. Плоские задачи устойчивости композитных материалов для случая заполнения конечных размеров // *Мех. комп. материалов.* – 2000. – **36**, № 1. – С. 77 – 86.
67. Гузь А.Н., Декрет В.А., Коханенко Ю.В. Взаимодействие коротких волокон при потере устойчивости. Плоская задача // «Проблемы механики», Сборник статей к 90-летию со дня рождения А.Ю.Ишлинского. М.: Физматлит. – 2003. – С. 331 – 341.

68. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Кулиев Г.Г., Милованова О.Б. Устойчивость тонких пластин с трещинами // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1977. – № 5. – С. 421 – 426.
69. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Кулиев Г.Г., Милованова О.Б. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 184 с.
70. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Динамическая задача для плоскости с разрезом. Учет взаимодействия берегов // ДАН СССР. – 1991. – **318**, № 2. – С. 304 – 307.
71. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Динамическая контактная задача для плоскости с двумя разрезами // ДАН СССР. – 1991. – **321**, № 2. – С. 278 – 280.
72. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Динамическая задача теории упругости с ограничениями в виде неравенств // Докл. АН УССР. – 1991. – № 5. – С. 47 – 50.
73. Гузь А.Н., Зозуля В.В., Меньшиков А.В. Контактное взаимодействие берегов эллиптической трещины под воздействием нормальной гармонической нагрузки // Сборник научных трудов «Проблемы механики деформируемых тел и горных пород» / Под ред. Д.Д.Ивлева и Н.Ф.Морозова, М.: Физматгиз. – 2006. – С. 204 – 220.
74. Гузь А.Н., Кнюх В.И., Назаренко В.М. Расслоение композита при сжатии вдоль двух параллельных макротрещин // Физ.-хим. механика материалов. – 1987. – **23**, № 1. – С. 72 – 78.
75. Гузь А.Н., Корж В.П., Чехов В.Н. Устойчивость слоистой полуплоскости под действием поверхностных распределенных нагрузок // ДАН СССР. – 1990. – **313**, № 6. – С. 1381 – 1385.
76. Гузь А.Н., Коханенко Ю.В. Хрупкое разрушение композитных материалов при смятии торцов (модель кусочно-однородной среды) // ДАН СССР. – 1987. – **296**, № 4. – С. 805 – 808.
77. Гузь А.Н., Кулиев Г.Г. К постановке задач устойчивости деформирования тонких тел с трещинами // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1976. – № 12. – С. 1085 – 1088.
78. Гузь А.Н., Кулиев Г.Г., Зейналов Н.К. Выпучивание растянутой пластины с криволинейным отверстием // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1979. – № 2. – С. 163 – 168.
79. Гузь А.Н., Кулиев Г.Г., Цурпал И.А. Концепции устойчивости в теории хрупкого разрушения // Аннотации докл. IV Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. – К.: – 1976. – С. 90.
80. Гузь А.Н., Лапуста Ю.Н. О методе исследования устойчивости волокна в упругой полубесконечной матрице вблизи свободной поверхности // ПММ. – 1989. – **53**, № 4. – С. 693 – 697.
81. Гузь А.Н., Лапуста Ю.Н. Приповерхностная неустойчивость ряда волокон в композите // ДАН. – 1992. – **325**, № 4. – С. 679 – 683.
82. Гузь А.Н., Мусаев Д.А. О разрушении ленточных композитных материалов при сжатии // ДАН СССР. – 1988. – **301**, № 3. – С. 565 – 568.
83. Гузь А.Н., Назаренко В.М., Богданов В.Л. Пространственная неосесимметричная задача о разрушении полупространства с приповерхностной круговой трещиной // ДАН СССР. – 1991. – **319**, № 4. – С. 835 – 839.
84. Гузь А.Н., Назаренко В.М. Осесимметричная задача о разрушении полупространства с поверхностной дискообразной трещиной // ДАН СССР. – 1984. – **274**, № 1. – С. 38 – 41.
85. Гузь А.Н., Назаренко В.М. Пространственная задача о пластическом приповерхностном разрушении материала при сжатии вдоль макротрещин // ДАН СССР. – 1985. – **284**, № 4. – С. 812 – 815.
86. Гузь А.Н., Назаренко В.М. К теории приповерхностного отслаивания композитных материалов при сжатии вдоль макротрещин // Мех. комп. материалов. – 1985. – № 5. – С. 826 – 833.
87. Гузь А.Н., Назаренко В.М. Разрушение материалов при сжатии вдоль периодической системы трещин в условиях плоской деформации // ПММ. – 1987. – **51**, № 2. – С. 323 – 329.
88. Гузь А.Н., Назаренко В.М., Стародубцев И.П. Плоская задача разрушения материалов с двумя параллельными трещинами при сжатии вдоль трещин // Проблемы механики деформируемого твердого тела / Под ред. В.Г.Зубчанинова. – Калинин: Калинин. ун-т, 1986. – С. 138 – 151.
89. Гузь А.Н., Назаренко В.М., Хома Ю.И. Разрушение композитного материала при сжатии вдоль цилиндрической трещины // Докл. НАНУ. – 1995. – № 10. – С. 48 – 52.
90. Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокompозитов. – К.: Институт механики им. С.П.Тимошенко, 2010. – 398 с.
91. Гузь А.Н., Ткаченко Э.А., Чехов В.Н. Расчеты на устойчивость слоистых композитных покрытий в триботехнике // Мех. комп. материалов. – 2000. – **36**, № 2. – С. 229 – 236.
92. Гузь А.Н., Ткаченко Э.А., Чехов В.Н. Приповерхностная неустойчивость слоистых покрытий при неупругом деформировании // Мех. комп. материалов. – 2000. – **36**, № 6. – С. 791 – 800.
93. Гузь А.Н., Черевко М.А. К механике разрушения волокнистого композитного материала при сжатии // ДАН СССР. – 1981. – **268**, № 4. – С. 806 – 808.

94. Гузь А.Н., Черевко М.А. О разрушении однонаправленного волокнистого композита с упруго-пластической матрицей при сжатии // Мех. комп. материалов. – 1982. – № 6. – С. 987 – 994.
95. Гузь А.Н., Черевко М.А., Марголин Г.Г., Ромашко И.М. О разрушении однонаправленных бороалюминиевых композитов при сжатии // Мех. комп. материалов. – 1986. – № 2. – С. 226 – 230.
96. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Поверхностная потеря устойчивости слоистой полуплоскости при упруго-пластическом деформировании слоев // ДАН СССР. – 1983. – 272, № 3. – С. 546 – 550.
97. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Поверхностная неустойчивость слоистых композитов при малых и конечных докритических деформациях // Мех. комп. материалов. – 1984. – № 5. – С. 838 – 843.
98. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Исследование устойчивости полубесконечных слоистых сред с учетом их упругих и упруго-пластических свойств // Изв. АН СССР. – 1985. – № 1. – С. 87 – 96.
99. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Применение вариационных методов в задачах устойчивости слоистых полуограниченных сред // ДАН СССР. – 1985. – 283, № 5. – С. 1123 – 1126.
100. Гузь А.Н., Чехов В.Н., Шульга Н.А. Поверхностная неустойчивость полупространства периодической структуры // ДАН СССР. – 1982. – 266, № 6. – С. 1306 – 1310.
101. Гузь И.А. Устойчивость композита при сжатии вдоль трещины на границе раздела слоев // ДАН. – 1992. – 325, № 3. – С. 455 – 458.
102. Гузь И.А. Устойчивость композитных материалов с межслойными трещинами // Мех. комп. материалов. – 1992. – № 5. – С. 603 – 608.
103. Гузь И.А. Устойчивость композита при сжатии вдоль двух микротрещин на границе раздела слоев // ДАН. – 1993. – 328, № 4. – С. 437 – 439.
104. Гузь И.А. Композиты с межслойными трещинами: устойчивость при сжатии вдоль двух микротрещин между ортотропными слоями // Мех. комп. материалов. – 1993. – № 6. – С. 791 – 798.
105. Гузь И.А. Устойчивость композитов при сжатии вдоль системы параллельных межслоевых трещин // Докл. НАНУ. – 1995. – № 6. – С. 44 – 47.
106. Даль Ю.М. О местном изгибе растянутой пластины с трещиной // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 135 – 141.
107. Декрет В.А. Розв'язання плоскої задачі стійкості композитного матеріалу, армованого двома короткими волокнами // Доп. НАНУ. – 2003. – № 8. – С. 37 – 40.
108. Декрет В.А. Плоска задача стійкості композита, армованого двома паралельними короткими волокнами // Доп. НАНУ. – 2003. – № 12. – С. 38 – 41.
109. Декрет В.А. Про стійкість композитного матеріалу, армованого періодичним рядом коротких волокон // Доп. НАНУ. – 2004. – № 11. – С. 47 – 50.
110. Декрет В.А. Про стійкість композитного матеріалу, армованого періодичним рядом паралельно розміщених коротких волокон // Доп. НАНУ. – 2004. – № 12. – С. 41 – 44.
111. Декрет В.А. Про стійкість композитного матеріалу, слабоармованого короткими волокнами поблизу вільної поверхні // Доп. НАНУ. – 2006. – № 10. – С. 49 – 51.
112. Довжик М.В. Разрушение полупространства при сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной // Прикл. механика. – 2012. – 48, № 3. – С. 79 – 88.
113. Довжик М.В. Разрушение материала с двумя дискообразными трещинами при сжатии вдоль трещин для малых расстояний между трещинами // Прикл. механика. – 2013. – 49, № 1. – С. 100 – 108.
114. Довжик М.В. Разрушение материала с периодической системой дискообразных трещин при сжатии вдоль трещин для малых значений расстояний между трещинами // Доп. НАНУ. – 2013. – № 10. – С. 100 – 105.
115. Довжик М.В., Назаренко В.М. Разрушение материала при сжатии вдоль двух дискообразных трещин для малых расстояний между трещинами // Прикл. механика. – 2012. – 48, № 4. – С. 78 – 85.
116. Довжик М.В., Назаренко В.М. Разрушение материала при сжатии вдоль периодической системы близко расположенных трещин // Прикл. механика. – 2012. – 48, № 6. – С. 106 – 113.
117. Дышель М.Ш. Учет локальной потери устойчивости пластин с трещинами при экспериментальном определении коэффициента интенсивности напряжений // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1988. – № 11. – С. 40 – 44.
118. Ентов В.М., Салганик Р.Л. О балочном приближении в теории трещин // Изв. АН СССР, Механика. – 1965. – № 5. – С. 95 – 102.

119. Зозуля В.В. О динамических задачах теории трещин с областями контакта, сцепления и скольжения // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1990. – № 1. – С. 47 – 50.
120. Зозуля В.В. О разрешимости динамических задач теории трещин с областями контакта, сцепления и скольжения // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1990. – № 3. – С. 53 – 55.
121. Зозуля В.В. О действии гармонической нагрузки на трещину в бесконечном теле с учетом взаимодействия ее берегов // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1990. – № 4. – С. 46 – 49.
122. Зозуля В.В. Интегралы типа Адамара в динамических задачах теории трещин // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1991. – № 2. – С. 19 – 22.
123. Зозуля В.В. Динамическая задача для плоскости с двумя трещинами. Учет контакта берегов // Докл. АН УССР. – 1991. – № 8. – С. 75 – 80.
124. Зозуля В.В. О решении задач динамики тел с трещинами методом граничных интегральных уравнений // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1992. – № 3. – С. 38 – 43.
125. Ишлинский А.Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости состояния равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. журнал – 1954. – 6, № 2. – С. 140 – 146.
126. Келдыш М.В., Седов Л.И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций // ДАН СССР. – 1937. – 16, № 1. – С. 7 – 10.
127. Композитные материалы. В 8-и томах (Под общей ред. Л.Браутмана и Л.Крока). (Перевод с англ.). – М.: Т. 1, 2, 5 и 6 – Мир, Т. 3, 4, 7 и 8 – Машиностроение, 1978 – 1979.
 - Т. 1. Поверхности раздела в металлических композитах, 1978. – 438 с.
 - Т. 2. Механика композитных материалов, 1978. – 564 с.
 - Т. 3. Применение композитных материалов в технике, 1979. – 511 с.
 - Т. 4. Композитные материалы с металлической матрицей, 1978. – 508 с.
 - Т. 5. Разрушение и усталость, 1978. – 484 с.
 - Т. 6. Поверхности раздела в полимерных композитах, 1978. – 294 с.
 - Т. 7. Анализ и проектирование конструкций. Ч. 1, 1979. – 300 с.
 - Т. 8. Анализ и проектирование конструкций. Ч. 2, 1979. – 264 с.
128. Коханенко Ю.В. Застосування методу скінченних різниць до проблеми пружної стійкості // Доп. АН УРСР, Сер. А. – 1973. – № 7. – С. 537 – 539.
129. Коханенко Ю.В. Об одном способе решения задач трехмерной устойчивости композитных материалов ленточной структуры // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1989. – № 2. – С. 31 – 33.
130. Кулиев Г.Г. О разрушении деформируемых тел с центральной вертикальной трещиной в однородном силовом поле // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1978. – № 8. – С. 714 – 717.
131. Кулиев Г.Г. О предшествовании процесса потери устойчивости возле трещины процессу хрупкого разрушения // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1979. – № 5. – С. 355 – 358.
132. Лапуста Ю.Н. Метод исследования устойчивости двух волокон в упругой полубесконечной матрице // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1989. – № 1. – С. 42 – 45.
133. Лапуста Ю.Н. Учет влияния свободной границы на устойчивость периодического ряда волокон в упругой полубесконечной матрице // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1989. – № 5. – С. 34 – 37.
134. Лапуста Ю.Н. К решению задачи приповерхностного выпучивания периодической системы волокон в упругой матрице // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1989. – № 7. – С. 48 – 52.
135. Лапуста Ю.Н. О возможных формах потери устойчивости волокна в полубесконечной матрице // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1989. – № 11. – С. 42 – 45.
136. Лапуста Ю.Н. Устойчивость ряда волокон вблизи свободного плоского края связующего при осевом сжатии // Мех. комп. материалов. – 1990. – № 4. – С. 739 – 742.
137. Лапуста Ю.Н. Об устойчивости волокна вблизи полости в упруго-пластической матрице // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1991. – № 9. – С. 80 – 84.
138. Лапуста Ю.Н. Приповерхностная неустойчивость периодической системы волокон в упругой матрице // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1992. – № 8. – С. 70 – 75.
139. Лейбензон Л.С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. В: Собр. трудов, т. 1. – М.: 1951. – С. 110 – 121.
140. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
141. Меньшиков А.В. Пространственная контактная задача для двух соосных круговых трещин при нормальном гармоническом нагружении // Доп. НАНУ. – 2005. – № 6. – С. 44 – 49.

142. *Меньшиков А.В.* Коэффициенты интенсивности напряжений для круговой трещины при гармоническом нагружении и учете контакта берегов // Пробл. машиностроения. – 2006. – 9, № 2. – С. 43 – 47.
143. *Меньшиков А.В., Гузь И.А.* Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений сдвига от силы трения при гармоническом нагружении круговой трещины // Пробл. машиностроения. – 2006. – 9, № 3. – С. 65 – 71.
144. *Меньшиков А.В., Меньшикова М.В.* Исследование контактного взаимодействия берегов трещины методом Галеркина // Теор. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 151 – 155.
145. *Механика композитов:* В 12-и томах. (Под общ. ред. А.Н.Гузя). К.: Т. 1 – 4 «Наук. думка», Т. 5 – 12 «А.С.К.». – 1993 – 2003.
- Т.1. Статика материалов. (Под ред. В.Т.Головчана), 1993. – 454 с.
- Т.2. Динамика и устойчивость материалов. (Под ред. Н.А.Шульги), 1993. – 430 с.
- Т.3. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. (Под ред. Л.П.Хорошуна), 1993. – 390 с.
- Т.4. Механика материалов с искривленными структурами. (Под ред. А.Н.Гузя и С.Д.Акбарова), 1995. – 320 с.
- Т.5. Механика разрушения. (Под ред. А.А.Каминского), 1996. – 360 с.
- Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. (Под ред. Н.А.Шульги и В.Т.Томашевского), 1997. – 396 с.
- Т.7. Концентрация напряжений. (Под ред. А.Н.Гузя, А.С.Космодамианского и В.П.Шевченко), 1998. – 388 с.
- Т.8. Статика элементов конструкций. (Под ред. Я.М.Григоренко), 1999. – 382 с.
- Т.9. Динамика элементов конструкций. (Под ред. В.Д.Кубенко), 1999. – 384 с.
- Т.10. Устойчивость элементов конструкций. (Под ред. И.Ю.Бабича), 2001. – 376 с.
- Т.11. Численные методы. (Под ред. Я.М.Григоренко и Ю.Н.Шевченко), 2002. – 448 с.
- Т.12. Прикладные исследования. (Под ред. А.Н.Гузя и Л.П.Хорошуна), 2003. – 400 с.
146. *Механика разрушения и прочность материалов.* Справочное пособие. В 4-х томах (Под общей ред. В.В.Панасюка). – К.: Наук. думка, 1988 – 1990.
- Т. 1. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов, 1988. – 488 с.
- Т. 2. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами, 1988. – 616 с.
- Т. 3. Ковчик С.Е., Морозов Е.М. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения, 1988. – 434 с.
- Т. 4. Романив О.Н., Ярема С.Я., Никифорчин Г.Н., Махутов Н.А., Стадник М.М. Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов, 1990. – 680 с.
147. *Михайлов А.М.* Динамические задачи теории трещин в балочном приближении // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1966. – № 5. – С. 167 – 172.
148. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
149. *Назаренко В.М.* Пространственная задача о сжатии материала вдоль периодической системы параллельных круговых трещин // ПММ. – 1988. – 52, № 1. – С. 145 – 152.
150. *Назаренко В.М.* Неосесимметричная задача о сжатии материала вдоль приповерхностной круговой трещины // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 1. – С. 124 – 127.
151. *Назаренко В.М., Хома Ю.И.* О методе решения задач разрушения бесконечного материала с цилиндрической трещиной при осевом сжатии (случай неравных корней) // Докл. НАНУ. – 1994. – № 7. – С. 62 – 67.
152. *Назаренко В.М., Хома Ю.И.* Сжатие бесконечного композитного материала вдоль конечной цилиндрической трещины // Мех. комп. материалов. – 1995. – 31, № 1. – С. 27 – 34.
153. *Наполнители* для полимерных композиционных материалов (Под ред. Г.С.Каца и Д.В.Милевски). Справочное пособие (Перевод с англ.). – М.: Химия, 1981. – 738 с.
154. *Неклассические проблемы механики разрушения:* В 4-х томах, 5-и книгах. (Под общ. ред. А.Н.Гузя). – К.: Наук. думка, 1990 – 1993.
- Т.1. Каминский А.А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами, 1990. – 312 с.
- Т.2. Гузь А.Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями, 1991. – 288 с.

- Т.3. Каминский А.А., Гаврилов Д.Н. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами, 1992. – 248 с.
- Т.4, книга 1. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами, 1992. – 434 с.
- Т.4, книга 2. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках, 1993. – 238 с.
155. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
156. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамическая механика разрушения. – М.: Машиностроение, 1985. – 264 с.
157. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамика хрупкого разрушения. – М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.
158. *Пелле Д.А., Костелло Р.Г., Брок Й.Е.* Выпучивание панели с круговым отверстием при растяжении // Ракетная техника и космонавтика. – 1968. – 6, № 10. – С. 241 – 243.
159. *Писаренко Г.С., Науменко В.П., Митченко О.В., Волков Г.С.* Экспериментальное определение величины K_I при сжатии пластины вдоль линии трещины // Пробл. прочности. – 1984. – № 11. – С. 3 – 9.
160. *Разрушение.* В 7-и томах (Под ред. Г.Либовица). (Перевод с англ.). – М.: Т. 1, 2, 3, 7 ч. 1 и 7 ч. 2 – Мир, Т. 4 и 5 - Машиностроение, Т. 6 – Металлургия, 1973 – 1977.
- Т. 1. Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения, 1973. – 616 с.
- Т. 2. Математические основы механики разрушения, 1975. – 764 с.
- Т. 3. Инженерные основы и воздействие внешней среды, 1976. – 796 с.
- Т. 4. Исследование разрушения для инженерных расчетов, 1977. – 400 с.
- Т. 5. Расчет конструкций на хрупкую прочность, 1977. – 464 с.
- Т. 6. Разрушение металлов, 1976. – 496 с.
- Т.7, ч. 1. Разрушение неметаллов и композитных материалов. Неорганические материалы (стекла, горные породы, композиты, керамики, лед), 1976. – 634 с.
- Т.7, ч. 2. Разрушение неметаллов и композитных материалов. Органические материалы (стеклообразные полимеры, эластомеры, кость), 1976. – 470 с.
161. *Розен Б.У.* Механика упрочнения композитов. В: «Волокнистые композитные материалы. – М.: Мир, 1967». – С. 54 – 94.
162. *Розен Б.У., Дау Н.Ф.* Механика разрушения волокнистых композитов. В: «Разрушение, Т. 7, часть 1. Разрушение неметаллов и композитных материалов. Неорганические материалы (стекла, горные породы, композиты, керамики, лед). – М.: Мир, 1976». – С. 300 – 366.
163. *Современные композиционные материалы* (Под ред. Л.Браутмана, Р.Крока). (Перевод с англ.). – М.: Мир, 1970. – 672 с.
164. *Спорыхин А.Н.* О неустойчивости деформирования слоистых массивов в упрочняющихся пластических средах // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1975. – № 1. – С. 63 – 65.
165. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – 368 с.
166. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Л.: Наука, 1977. – 220 с.
167. *Черевко М.А.* Устойчивость волокна в упруго-пластической матрице // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1982. – № 9. – С. 43 – 46.
168. *Черевко М.А.* Устойчивость полого волокна в упруго-пластической матрице // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1982. – № 11. – С. 35 – 38.
169. *Черевко М.А.* Устойчивость волокна в упруго-пластической матрице при неполном контакте // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 9. – С. 122 – 123.
170. *Черевко М.А.* Устойчивость ряда круговых волокон в упруго-пластической матрице // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 12. – С. 35 – 40.
171. *Черепанов Г.П.* О выпучивании мембран с отверстиями при растяжении // ПММ. – 1963. – 27, № 2. – С. 275 – 286.
172. *Черепанов Г.П.* О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. – 1967. – 31, № 3. – С. 476 – 488.
173. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
174. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983. – 298 с.

175. Чехов В.Н. Поверхностная неустойчивость слоистых сред при конечных деформациях // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1983. – № 5. – С. 48 – 50.
176. Akbarov S.D. A Method of solving problems in the mechanics of composite materials with curved viscoelastic layers // Sov. Appl. Mech. – 1985. – **21**, N 3. – P. 221 – 225.
177. Akbarov S.D. Normal stresses in a fiber composite with curved structures having a low concentration of filler // Sov. Appl. Mech. – 1985. – **21**, N 11. – P. 1065 – 1069.
178. Akbarov S.D. Stress state in a viscoelastic fibrous composite with curved structures and low fiber concentration // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **22**, N 6. – P. 506 – 513.
179. Akbarov S.D. Stress distribution in multi-layered composite with small-scale antiphase curvatures in structure // Sov. Appl. Mech. – 1987. – **23**, N 2. – P. 107 – 111.
180. Akbarov S.D. Stress state in a laminar composite material with local warps in the structure // Sov. Appl. Mech. – 1988. – **24**, N 5. – P. 445 – 452.
181. Akbarov S.D. Distribution of self-balanced stresses in a laminated composite material with antiphase locally distorted structures // Sov. Appl. Mech. – 1988. – **24**, N 6. – P. 560 – 566.
182. Akbarov S.D. Solution of problems of the stress-strain state of composite materials with curvilinearly anisotropic layers // Sov. Appl. Mech. – 1989. – **25**, N 1. – P. 12 – 20.
183. Akbarov S.D. The distribution of self-equilibrated stresses in fibrous composite materials with twisted fibers // Mech. Comp. Materials. – 1990. – N 3. – P. 803 – 812.
184. Akbarov S.D. On the crack problems in composite materials with locally curved layers // Mech. Comp. Materials. – 1994. – N 6. – P. 750 – 759.
185. Akbarov S.D. On the determination of normalized non-linear mechanical properties of composite materials with periodically curved layers // Int. J. Solid and Structures. – 1995. – **32**, N 21. – P. 3229 – 3243.
186. Akbarov S.D. On the three-dimensional stability loss problems of elements of constructions fabricated from the viscoelastic composite materials // Mech. Compos. Mater. – 1998. – **34**, N 6. – P. 537 – 544.
187. Akbarov S.D. Three-dimensional stability loss problems of viscoelastic composite materials and structural members // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 10. – P. 1069 – 1089.
188. Akbarov S.D. Stability Loss and Buckling Delamination. – Berlin: Springer, 2012. – 450 p.
189. Akbarov S.D., Aliev S.A. Stress state in laminar composite material with partial distortion in structure // Sov. Appl. Mech. – 1990. – **26**, N 12. – P. 1127 – 1132.
190. Akbarov S.D., Djmalov Z.R. Influence of geometric non-linearly calculation of stress disturbance in laminar composites with curved structures // Mech. Comp. Materials. – 1992. – N 6. – P. 799 – 812.
191. Akbarov S.D., Guz A.N. Method of solving problems in mechanics of composite materials with bent layers // Sov. Appl. Mech. – 1984. – **20**, N 4. – P. 299 – 304.
192. Akbarov S.D., Guz A.N. Method of solving problems in mechanics of fiber composites with curved structures // Sov. Appl. Mech. – 1984. – **20**, N 9. – P. 777 – 784.
193. Akbarov S.D., Guz A.N. Model of a piecewise-homogeneous body in the mechanics of laminar composites with fine-scale curvatures // Sov. Appl. Mech. – 1985. – **21**, N 4. – P. 313 – 318.
194. Akbarov S.D., Guz A.N. Stress state of a fiber composite with curved structures with a low fiber concentration // Sov. Appl. Mech. – 1985. – **21**, N 6. – P. 560 – 565.
195. Akbarov S.D., Guz A.N. Continuum theory in the mechanics of composite materials with small-scale structural distortion // Sov. Appl. Mech. – 1991. – **27**, N 1. – P. 107 – 117.
196. Akbarov S.D., Guz A.N. Mechanics of composite materials with curved structures (survey). Composite laminates // Sov. Appl. Mech. – 1991. – **27**, N 6. – P. 535 – 550.
197. Akbarov S.D., Guz A.N. Mechanics of Curved Composites. – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publisher, 2000. – 464 p.
198. Akbarov S.D., Guz A.N. Mechanics of curved composites (piecewise-homogeneous body model) // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 12. – P. 1415 – 1439.
199. Akbarov S.D., Guz A.N. Mechanics of curved composites and some related problems for structural members // Mech. Advan. Mater. Struc. – 2004. – **11**, Pt. II, N 6. – P. 445 – 515.
200. Akbarov S.D., Guz A.N., Djmalov Z.R., Movsumov E.A. Solution of problems involving the stress state of composite materials with curved layers in the geometrically nonlinear statement // Int. Appl. Mech. – 1992. – **28**, N 6. – P. 343 – 346.
201. Akbarov S.D., Guz A.N., Mustafaev S.M. Mechanics of composite materials with anisotropic distorted layers // Sov. Appl. Mech. – 1987. – **23**, N 6. – P. 528 – 533.

202. Akbarov S.D., Guz A.N., Yahnioglu N. Mechanics of composite materials with curved structures and elements of constructions (review) // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 11. – P. 1067 – 1078.
203. Akbarov S.D., Guz A.N., Zamanov A.D. Natural vibrations of composite materials having structures with small-scale curvatures // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 12. – P. 794 – 800.
204. Akbarov S.D., Cilli A., Guz A.N. The theoretical strength limit in compression of viscoelastic layered composite materials // *Composites. Part B: Engineering.* – 1999. – P. 365 – 372.
205. Akbarov S.D., Verdiev M.D., Guz A.N. Stress and deformation in a layered composite material with distorted layers // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 12. – P. 1146 – 1153.
206. Akbarov S.D., Kosker R., Ucan Y. Stress distribution in a composite material with a row of anti-phase periodically curved fibers // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 4. – P. 486 – 488.
207. Akbarov S.D., Maksudov F.G., Panakhov P.G., Seyfullayev A.I. On the crack problems in composite materials with curved layers // *Int. J. Eng. Sci.* – 1994. – **32**, N 6. – P. 1003 – 1016.
208. Akbarov S.D., Mustafaev S.M. Distribution of self-balanced stresses in composite materials with curved curvilinearly anisotropic layers // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 12. – P. 1225 – 1227.
209. Akbarov S.D., Rzayev O.G. Delamination of unidirectional viscoelastic composite materials // *Mech. Compos. Mater.* – 2002. – **39**, N 3. – P. 368 – 374.
210. Akbarov S.D., Sisman T., Yahnioglu N. On the fracture of the unidirectional composites in compression // *Int. J. Eng. Sci.* – 1997. – **35**, N 12/13. – P. 1115 – 1136.
211. Akbarov S.D., Yahnioglu N. Stress distribution in a strip fabricated from a composite material with small-scale curved structure // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 9. – P. 684 – 690.
212. Akbarov S.D., Yahnioglu N. The method for investigation of the general theory of stability problems of structural elements fabricated from the viscoelastic composite materials // *Composites, Part. B: Engineering.* – 2001. – **32**, N 5. – P. 475 – 482.
213. Babich I.Yu. On the Stability of a fiber in a matrix under small deformations // *Sov. Appl. Mech.* – 1973. – **9**, N 4. – P. 370 – 375.
214. Babich I.Yu., Chekhov V.N. Surface and internal instability in laminated composites // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 1. – P. 21 – 28.
215. Babich I.Yu., Garashchuk I.N., Guz A.N. Stability of a fiber in an elastic matrix with nonuniform subcritical state // *Sov. Appl. Mech.* – 1983. – **19**, N 11. – P. 941 – 947.
216. Babich I.Yu., Guz A.N. Deformation instability of laminated materials // *Sov. Appl. Mech.* – 1969. – **5**, N 5. – P. 488 – 491.
217. Babich I.Yu., Guz A.N. Methods of studying three-dimensional problems of stability in highly-elastic deformations // *Sov. Appl. Mech.* – 1972. – **8**, N 6. – P. 596 – 599.
218. Babich I.Yu., Guz A.N., Chekhov V.N. The Three-dimensional theory of stability of fibrous and laminated materials // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 9. – P. 1103 – 1141.
219. Babich I.Yu., Guz A.N., Kilin V.I. Aspects of the fracture and stability of laminated structures with elastic strains // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 7. – P. 601 – 605.
220. Babich I.Yu., Guz A.N., Shul'ga N.A. Investigation of the dynamics and stability of composite materials in a three-dimensional formulation (survey) // *Sov. Appl. Mech.* – 1982. – **18**, N 1. – P. 1 – 21.
221. Babich V.M., Guz A.N., Nazarenko V.M. Disk-shaped normal-rupture crack near the surface of a semiinfinite body with initial stresses // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 7. – P. 637 – 643.
222. Biot M.A. *Mechanics of incremental deformations.* – New York: Willey, 1965. – 504 p.
223. Biot M.A. Surface instability in finite anisotropic elasticity under initial stress // *Proc. Roy. Soc.* – 1963. – **273**, N 1354.
224. Biot M.A. Interface instability in finite elasticity under initial stress // *Proc. Roy. Soc.* – 1963. – **273**, N 1354.
225. Bogdanov V.L. On a circular shear crack in a semi-infinite composite with initial stresses // *Material Science.* – 2007. – **43**, N 2. – P. 321 – 330.
226. Bogdanov V.L. Effect of residual stresses on fracture of semi-infinite composite with cracks // *J. Mech. Advanced Materials and Struct.* – 2008. – **15**, N 6. – P. 453 – 460.
227. Bogdanov V.L. Influence of initial stresses on fracture of composite materials containing interacting cracks // *J. Mathematical Sciences.* – 2010. – **165**, N 3. – P. 371 – 384.
228. Bogdanov V.L. Nonaxisymmetric problem of the stress-strain state of an elastic half-space with a near-surface circular crack under action of loads along it // *J. Mathematical Sciences.* – 2011. – **174**, N 3. – P. 341 – 366.

229. *Bogdanov V.L.* Influence of initial stresses on the stressed state of a composite with a periodic system of parallel coaxial normal tensile cracks // *J. Mathematical Sciences.* – 2012. – **186**, N 1. – P. 1 – 13.
230. *Bogdanov V.L.* On the interaction of a periodic system of parallel coaxial radial-shear cracks in a prestressed composite // *J. Mathematical Sciences.* – 2012. – **187**, N 5. – P. 606 – 618.
231. *Bohdanov V.L.* Mutual influence of two parallel coaxial cracks in a composite material with initial stresses // *Material Science.* – 2008. – **44**, N 4. – P. 530 – 540.
232. *Bohdanov V.L.* Influence of initial stresses on the fracture of a composite material weakened by a subsurface mode III crack // *J. Mathematical Sciences.* – 2015. – **205**, N 5. – P. 621 – 634.
233. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture of semiinfinite material with a circular surface crack in compression along the crack plane // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 11. – P. 687 – 704.
234. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Nonaxisymmetric compressive failure of a circular crack parallel to a surface of halfspace // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 1995. – **22**. – P. 239 – 247.
235. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture of a body with a periodic set of coaxial cracks under forces directed along them: an axisymmetric problem // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 2. – P. 111 – 124.
236. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Stress-strain state of a material under forces acting along a periodic set of coaxial mode II penny-shaped cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 12. – P. 1339 – 1350.
237. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Nonclassical problems in the fracture mechanics of composites with interacting cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 1. – P. 64 – 84.
238. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Spatial problems of the fracture of materials loaded along cracks (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 5. – P. 489 – 560.
239. *Bogdanov V.L., Nazarenko V.M.* Study of the compressive failure of a semi-infinite elastic material with a harmonic potential // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, N 10. – P. 760 – 765.
240. *Budiansky H.* Micromechanics // *Composites and Structures.* – 1983. – **16**, N 1. – P. 3 – 13.
241. *Chekhov V.N.* Folding of rocks with periodic structure // *Sov. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 3. – P. 216 – 221.
242. *Chekhov V.N.* Effect of the hereditary properties of a medium on the surface instability of a layered half-space // *Sov. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 7. – P. 613 – 618.
243. *Chekhov V.N.* Surface instability of a layered medium connected to a uniform half-space // *Sov. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 11. – P. 1018 – 1024.
244. *Chekhov V.N.* Influence of a surface load on stability of laminar bodies // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 9. – P. 839 – 845.
245. *Chekhov V.N.* On the formation of linear folds in regularly layered rock masses under biaxial loading // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 12. – P. 1350 – 1356.
246. *Cherevko M.A.* Stability of a biperiodic system of circular fibers in an elastoplastic matrix // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 4. – P. 316 – 321.
247. *Comprehensive Composite Materials.* Vol. 1 – 6. (Editor-in-Chief: A. Kelly, C. Zweden). – Elsevier. – 2006.
- Vol. 1. Fiber reinforcements and general theory of composites. (Ed.: Tsu-Wei Chou). – 802 p.
- Vol. 2. Polymer matrix composites. (Eds.: R. Talreja, J.-A.E. Månson). – 669 p.
- Vol. 3. Metal matrix composites. (Ed.: T.W. Clyne). – 669 p.
- Vol. 4. Carbon/Carbon, Cement and Ceramic Composites (Ed.: R. Warren). – 697 p.
- Vol. 5. Test methods, non-destructive evaluation and smart materials. (Eds.: L. Carlsson, R.L. Crane, K. Uchino). – 632 p.
- Vol. 6. Design and applications. (Eds.: W.G. Bader, K. Kedsvard, Y. Sawada). – 809 p.
248. *Comprehensive Structural Integrity.* Vol. 1 – 10. (Int. Advisory Board: Ian Milne, R.O. Ritchie, B. Karihaloo). – Elsevier. – 2006.
- Vol. 1. Structural integrity assessment – examples and case studies. (Eds.: Ian Milne, R.O. Ritchie, B. Karihaloo).
- Vol. 2. Fundamental theories and mechanisms of failure. (Eds.: B. Karihaloo, W.G. Knauss).
- Vol. 3. Numerical and computational methods. (Eds.: R. de Borst, H.A. Mang).
- Vol. 4. Cyclic loading and fatigue. (Eds.: R.O. Ritchie, Y. Marakami).
- Vol. 5. Creep and high-temperature failure. (Ed.: A. Saxena).

- Vol. 6. Environmentally-assisted fracture. (Eds.: J. Petit, Peter Scott).
- Vol. 7. Practical failure assessment methods. (Eds.: R.A. Ainsworth, K.-H. Schwable).
- Vol. 8. Interfacial and nanoscale failure. (Eds.: W. Gerberich, Wei Yang).
- Vol. 9. Bioengineering. (Eds.: Yin-Wing Mai, Swee-Hin Tech).
- Vol. 10. Indexes.
249. Craggs I.W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle materials // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1960. – **8**, N 1. – P. 66 – 75.
250. *Cristescu N.D., Craciun E.M., Soos E.* Mechanics of Elastic Composites. – CRC Press, 2003. – 696 p.
251. *Dal' Yu.M., Litvinenkova Z.N.* Hypercritical deformation of a plate with a crack // *Sov. Appl. Mech.* – 1975. – **11**, N 3. – P. 278 – 284.
252. *Dekret V.A.* Two-dimensional buckling problem for a composite reinforced with a periodical row of collinear short fibers // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 6. – P. 684 – 691.
253. *Dekret V.A.* Plane stability problem for a composite reinforced with a periodical row of parallel fibers // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 5. – P. 498 – 504.
254. *Dekret V.A.* Near-surface instability of composites weakly reinforced with short fibers // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 6. – P. 619 – 625.
255. *Dyshel' M.Sh.* Failure in thin plate with a slit // *Sov. Appl. Mech.* – 1978. – **14**, N 9. – P. 1010 – 1012.
256. *Dyshel' M.Sh.* Stability under tension of thin plates with cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1978. – **14**, N 11. – P. 1169 – 1172.
257. *Dyshel' M.Sh.* Fracture of plates with cracks under tension after loss of stability // *Sov. Appl. Mech.* – 1981. – **17**, N 4. – P. 371 – 375.
258. *Dyshel' M.Sh.* Stability of thin plates with cracks under biaxial tension // *Sov. Appl. Mech.* – 1982. – **18**, N 10. – P. 924 – 928.
259. *Dyshel' M.Sh.* Tension of a cylindrical shell with a slit // *Sov. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 10. – P. 941 – 944.
260. *Dyshel' M.Sh.* Stability of a cracked cylindrical shell in tension // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 6. – P. 542 – 547.
261. *Dyshel' M.Sh.* Stress-intensity coefficient taking account of local buckling of plates with cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 1. – P. 87 – 90.
262. *Dyshel' M.Sh.* Local stability loss and failure of cracked plates during the plastic deformation of materials // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, N 1. – P. 44 – 47.
263. *Dyshel' M.Sh.* Tensile stability and failure of two-layer plates with cracks // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 3. – P. 282 – 286.
264. *Dyshel' M.Sh.* Local buckling of extended plates containing cracks and cracklike defects, subject to the influence of geometrical parameters of the plates and defects // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 12. – P. 1272 – 1276.
265. *Dyshel' M.Sh.* Influence of buckling of a tension plate with edge crack on fracture characteristics // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 5. – P. 589 – 592.
266. *Dyshel' M.Sh.* Stability and fracture of plates with two edge cracks under tension // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 11. – P. 1303 – 1306.
267. *Dyshel' M.Sh., Mekhtiev M.A.* Deformation of tensioned plates with cracks with allowance for local buckling // *Sov. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 6. – P. 586 – 589.
268. *Dyshel' M.Sh., Mekhtiev M.A.* Failure of tensioned plates weakened by circular hole with radial cracks emanating from its contour // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 5. – P. 490 – 493.
269. *Dyshel' M.Sh., Milovanova O.B.* Method of experimentally analyzing the instability of plates with slits // *Sov. Appl. Mech.* – 1977. – **13**, N 5. – P. 491 – 494.
270. *Dyshel' M.Sh., Milovanova O.B.* Determination of the critical stresses in the case of tension of plates with a cut // *Sov. Appl. Mech.* – 1978. – **14**, N 12. – P. 1330 – 1332.
271. *Dow N.F., Gruntfest I.J.* Deformation of most needed potentially possible improvements in materials for ballistic and space vehicles // General Electric Co., Space Sci. Lab., TIRS 60 SD 389, June 1960.
272. *Eshelby I.D.* The force on the elastic singularity // *Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A.* – 1951. – **244**. – P. 87.
273. *FRACTURE. A Topical Encyclopedia of Current Knowledge* (Edited by G.P. Cherepanov). Krieger Publishing Company, Malabar, Florida. 1998. – 870 p.

274. *Flek N.A.* Compressive failure of fiber composites. In: «Advances in Applied Mechanics, vol. 33. – New-York: Academic Press, 1997». – P. 43 – 119.
275. *Green A.E., Rivlin R.S., Shield R.T.* General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations // Proc. Roy. Soc., Ser. A. – 1952. – **211**, N 1104. – P. 128 – 154.
276. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A. – 1920. – **211**, N 2. – P. 163 – 198.
277. *Guz A.N.* Investigation the stability of elastic systems by means of linearized equations of elasticity theory // Sov. Appl. Mech. – 1967. – **3**, N 2. – P. 13 – 18.
278. *Guz A.N.* The stability of orthotropic bodies // Sov. Appl. Mech. – 1967. – **3**, N 5. – P. 17 – 22.
279. *Guz A.N.* Theory of cracks in elastic bodies with initial stresses. Formulation of problems, tear cracks // Sov. Appl. Mech. – 1980. – **16**, N 12. – P. 1015 – 1023.
280. *Guz A.N.* Theory of cracks in prestressed elastic bodies. Shear cracks and limiting cases // Sov. Appl. Mech. – 1981. – **17**, N 1. – P. 1 – 8.
281. *Guz A.N.* Theory of cracks in prestressed highly elastic materials // Sov. Appl. Mech. – 1981. – **17**, N 2. – P. 11 – 21.
282. *Guz A.N.* Theory of cracks in elastic bodies with initial stresses (stiff materials) // Sov. Appl. Mech. – 1981. – **17**, N 4. – P. 311 – 315.
283. *Guz A.N.* Theory of cracks in elastic bodies with initial stresses (cleavage problem) // Sov. Appl. Mech. – 1981. – **17**, N 5. – P. 405 – 411.
284. *Guz A.N.* Theory of cracks in elastic bodies with initial stresses (three-dimensional static problems) // Sov. Appl. Mech. – 1981. – **17**, N 6. – P. 499 – 513.
285. *Guz A.N.* Three-dimensional problem for a disk-shaped crack in an elastic body with initial stress // Sov. Appl. Mech. – 1981. – **17**, N 11. – P. 963 – 970.
286. *Guz A.N.* General three-dimensional static problem for cracks in an elastic body with initial stress // Sov. Appl. Mech. – 1981. – **17**, N 12. – P. 1043 – 1050.
287. *Guz A.N.* Fracture mechanics of solids in compression along cracks // Sov. Appl. Mech. – 1982. – **18**, N 3. – P. 213 – 224.
288. *Guz A.N.* Mechanics of fracture of solids in compression along cracks (three-dimensional problem) // Sov. Appl. Mech. – 1982. – **18**, N 4. – P. 283 – 293.
289. *Guz A.N.* Fracture mechanics of composites in compression along cracks // Sov. Appl. Mech. – 1982. – **18**, N 6. – P. 489 – 493.
290. *Guz A.N.* Mechanics of composite material failure under axial compression (brittle failure) // Sov. Appl. Mech. – 1982. – **18**, N 10. – P. 863 – 872.
291. *Guz A.N.* Mechanics of composite material failure under axial compression (plastic failure) // Sov. Appl. Mech. – 1982. – **18**, N 11. – P. 970 – 976.
292. *Guz A.N.* Continuum theory of fracture in the compression of composite materials with metallic matrix // Sov. Appl. Mech. – 1982. – **18**, N 12. – P. 1045 – 1052.
293. *Guz A.N.* Fracture of unidirectional composite materials under the axial compression. In: «Fracture of composite materials – Nijhoff, 1982». – P. 173 – 182.
294. *Guz A.N.* Mechanics of the brittle failure of materials with initial stress // Sov. Appl. Mech. – 1983. – **19**, N 4. – P. 293 – 307.
295. *Guz A.N.* Mechanics of composite materials with a small-scale structural flexure // Sov. Appl. Mech. – 1983. – **19**, N 5. – P. 383 – 392.
296. *Guz A.N.* Quasiuniform states in composites with small-scale curvatures in the structure // Sov. Appl. Mech. – 1983. – **19**, N 6. – P. 479 – 489.
297. *Guz A.N.* Three-dimensional theory of stability of elastic-viscous-plastic bodies // Sov. Appl. Mech. – 1984. – **20**, N 6. – P. 512 – 516.
298. *Guz A.N.* Foundations of mechanics of brittle fracture of materials with initial stresses // In: «Proc. of 6th ICF6», India, 1984. – P. 1223 – 1230.
299. *Guz A.N.* Three-dimensional stability theory of deformed bodies. Internal instability // Sov. Appl. Mech. – 1985. – **21**, N 11. – P. 1023 – 1034.
300. *Guz A.N.* Three-dimensional stability theory of deformable bodies. Surface instability // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **22**, N 1. – P. 17 – 26.
301. *Guz A.N.* Three-dimensional stability theory of deformable bodies. Stability of construction elements // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **22**, N 2. – P. 97 – 107.
302. *Guz A.N.* Continuous theory of failure of composite materials under compression in the case of a complex stresses state // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **22**, N 4. – P. 301 – 315.

303. *Guz A.N.* Criterion of brittle fracture near stress raisers in composites in compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 12. – P. 1148 – 1154.
304. *Guz A.N.* Continuous theory of failure of composite materials with buckling at the ends (Brittle fracture) // *Sov. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 1. – P. 52 – 60.
305. *Guz A.N.* Continuous theory of failure of composite materials with buckling at the ends (Plastic failure) // *Sov. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 5. – P. 411 – 417.
306. *Guz A.N.* Theory of delayed fracture of composite in compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 5. – P. 431 – 438.
307. *Guz A.N.* Construction of a theory of failure of composites in triaxial and biaxial compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 1. – P. 29 – 33.
308. *Guz A.N.* General case of the plane problem of the mechanics of fracture of solids in compression along cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 6. – P. 548 – 552.
309. *Guz A.N.* On construction of mechanics of fracture of materials in compression along the cracks // In: «ICF7. Advance in Fracture Research», Vol. 6. – Pergamon Press, 1990. – P. 3881 – 3892.
310. *Guz A.N.* Principles of the continual theory of plastic fracture of unidirectional fiber composite materials with metallic matrix under compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 1. – P. 1 – 8.
311. *Guz A.N.* Plastic failure of unidirectional fibrous composite material with metal matrix in compression. In: «Mechanical identification of composite». – Elsevier, London and New-York. 1991. – P. 278 – 286.
312. *Guz A.N.* Continual theory of fracture of composite materials at bearing strain of end faces in compression. In: «Fracture of Engineering Materials and Structures». Proc. of Conference. Singapore. – Elsevier, 1991. – P. 838 – 843.
313. *Guz A.N.* Construction of a theory of the local instability of unidirectional fiber composites // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 1. – P. 18 – 24.
314. *Guz A.N.* Fracture of fibrous composites at bearing strain in end faces in compression. In: «2-nd Int. Symposium on composite materials and structures, Proceedings». – Beijing, China, 1992. – P. 232 – 236.
315. *Guz A.N.* Construction of fracture mechanics for materials subjected to compression along cracks // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 10. – P. 633 – 639.
316. *Guz A.N.* Fracture of fibrous composites at bearing strain in end faces in compression. In: Proc. of ICCM/9 «Composites and Applications», Vol. VI. Madrid. 12 – 16 July, 1993. – P. 613 – 618.
317. *Guz A.N.* Continual theory of fracture of composite materials at bearing strain in end faces in compression. In: «Mechanisms and Mechanics of Composites Fracture», ASM Inter., Material Park, 1993. – P. 201 – 207.
318. *Guz A.N.* The study and analysis of non-classical problems of fracture and failure mechanics // Book of abstracts «IUTAM Symposium of nonlinear analysis of fracture» Cambridge, 3 – 7 Sept., 1995. – P. 19 – 19.
319. *Guz A.N.* Stability theory for unidirectional fiber reinforced composites // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 8. – P. 577 – 586.
320. *Guz A.N.* On failure propagation in composite materials in compression (Three-dimensional continual theory). In: «Proc. of ECF 11, Sept. 3 – 6, 1996». Vol. III, Poitiers – Futuroscope, France. – P. 1769 – 1774.
321. *Guz A.N.* Non-classical problems of composite failure. In: «Proc. of ICCST/1, 18 – 20 June, 1996», Durban, South. Africa. – P. 161 – 166.
322. *Guz A.N.* On the development of brittle-fracture mechanics of materials with initial stresses // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 4. – P. 316 – 323.
323. *Guz A.N.* Non-classical problems of composite failure // In: Proc. of ICF9 «Advance in Fracture Research», Vol. 4, Sydney, Australia, 1997. – P. 1911 – 1921.
324. *Guz A.N.* The fracture theory of composite at bearing strain in end faces. In: Conference report «Composite Construction and Innovation», Sept. 16 – 18, 1997, Innsbruck. Austria. – P. 783 – 788.
325. *Guz A.N.* Some modern problems of physical mechanics of fracture. In: «FRACTURE. A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. (Edited by Gennady P. Cherepanov). – Malabar, Florida: Krieger Publ. Company, 1998. – 892 p.» – P. 709 – 720.
326. *Guz A.N.* Conditions of hyperbolicity and mechanics of failure of composites in compression // *ZAMM.* – 1998. – **78**, Sup. 1. – P. 427 – 428.

327. *Guz A.N.* On the singularities in problems of brittle fracture mechanics in case of initial (residual) stresses along the cracks // In: «3rd Int. Conf. on nonlinear mechanics. Proceedings». – Shanghai, China, 1998. – P. 219 – 223.
328. *Guz A.N.* Order of singularity in problems of the mechanics of brittle fracture of materials with initial stresses // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 2. – P. 103 – 107.
329. *Guz A.N.* Study and Analysis of Non-classical Problems of Fracture and Failure Mechanics and Corresponding Mechanisms // Institute of Mechanics, Lecture, HANOI, 1998. – 35 p.
330. *Guz A.N.* Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 1. Problem statement and general relationships // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 12. – P. 1175– 1186.
331. *Guz A.N.* Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 2. Cracks of normal separation (Mode I) // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 1. – P. 1– 12.
332. *Guz A.N.* Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 3. Transverse-shear (Mode II) and longitudinal-shear (Mode III) cracks // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 2. – P. 109– 119.
333. *Guz A.N.* Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 4. Wedge problems // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 3. – P. 225– 232.
334. *Guz A.N.* Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin – Hiedelberg – New-York: Springer, 1999. – 555 p.
335. *Guz A.N.* On the plastic failure of unidirectional fibrous composite materials with metal matrix in compression. Continuum approximation. In: «ICCE/6, Proceedings», June 27 – July 3, 1999. Orlando, Florida, USA, 1999. – P. 279 – 280.
336. *Guz A.N.* Description and study of some nonclassical problems of fracture mechanics and related mechanisms // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 12. – P. 1537 – 1564.
337. *Guz A.N.* Construction of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 1. – P. 1 – 37.
338. *Guz A.N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 1. – P. 23 – 59.
339. *Guz A.N.* Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 1. Problem formulation and basic relations // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 4. – P. 423 – 431.
340. *Guz A.N.* Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 2. Exact solution. The case of unequal roots // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 5. – P. 548 – 555.
341. *Guz A.N.* Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 3. Exact solution. The case of equal roots // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 6. – P. 693 – 700.
342. *Guz A.N.* Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 4. Exact solution. The combined case of unequal and equal roots // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 7. – P. 806 – 814.
343. *Guz A.N.* Comments on «Effects of prestress on crack-tip fields in elastic incompressible solids» // *Int. J. Solids and Structures.* – 2003. – **40**, N 5. – P. 1333 – 1334.
344. *Guz A.N.* Establishing the fundamentals of the theory of stability of mine working // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 1. – P. 20 – 48.
345. *Guz A.N.* On one two-level model in the mesomechanics of compression fracture of cracked composites // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 3. – P. 274 – 285.
346. *Guz A.N.* On some nonclassical problems of fracture mechanics taking into account the stresses along cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 8. – P. 937 – 942.
347. *Guz A.N.* On study of nonclassical problems of fracture and failure mechanics and related mechanisms // *ANNALS of the European Academy of Sciences.* – 2006 – 2007. – P. 35 – 68.
348. *Guz A.N.* Three-dimensional theory of stability of a carbon nanotube in a matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 1. – P. 19 – 31.
349. *Guz A.N.* Pascal Medals Lecture (written presentation) // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 1. – P. 6 – 11.
350. *Guz A.N.* On study of nonclassical problems of fracture and failure mechanics and related mechanisms // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 1. – P. 1 – 31.

351. *Guz A.N.* On physical incorrect results in fracture mechanics // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 10. – P. 1041 – 1051.
352. *Guz A.N.* On the activity of the S.P.Timoshenko Institute of Mechanics in 1991 – 2011 // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 607 – 626.
353. *Guz A.N.* Stability of elastic bodies under omnidirectional compression. Review // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 3. – P. 241 – 293.
354. *Guz A.N., Babich I.Yu.* Three-dimensional stability problems of composite materials and composite construction components // *Rozpr. Inz.* – 1979. – **27**, N 4. – S. 613 – 631.
355. *Guz A.N., Chekhov V.N.* Linearized theory of folding in the interior of the earth's crust // *Sov. Appl. Mech.* – 1975. – **11**, N 1. – P. 1 – 10.
356. *Guz A.N., Chekhov V.N.* Variational method of investigating the stability of laminar semiinfinite media // *Sov. Appl. Mech.* – 1985. – **21**, N 7. – P. 639 – 646.
357. *Guz A.N., Chekhov V.N.* Investigation of surface instability of stratified bodies in three-dimensional formulation // *Sov. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 2. – P. 107 – 125.
358. *Guz A.N., Chekhov V.N.* Problems of folding in the earth's stratified crust // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 2. – P. 127 – 159.
359. *Guz A.N., Chekhov V.N., Stukotilov V.S.* Effect of anisotropy in the physicommechanical properties of a material on the surface instability of layered semiinfinite media // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, N 2. – P. 87 – 92.
360. *Guz A.N., Cherevko M.A.* Fracture mechanics of unidirectional fibrous composites with metal matrix under compression // *Theor. and Appl. Frac. Mechanics.* – 1985. – **3**, N 2. – P. 151 – 155.
361. *Guz A.N., Cherevko M.A.* Stability of a biperiodic system of fibers in a matrix with finite deformations // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 6. – P. 514 – 518.
362. *Guz A.N., Dekret V.A.* Interaction of two parallel short fibers in the matrix at loss of stability // *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* – 2006. – **13**, N 3. – P. 165 – 170.
363. *Guz A.N., Dekret V.A.* On two models in the three-dimensional theory of stability of composites // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 8. – P. 839 – 854.
364. *Guz A.N., Dekret V.A.* Stability loss in nanotube reinforced composites // *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* – 2009. – **49**, N 1. – P. 69 – 80.
365. *Guz A.N., Dekret V.A.* Stability problem of composite material reinforced by periodic row of short fibers // *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* – 2009. – **42**, N 3. – P. 179 – 186.
366. *Guz A.N., Dekret V.A., Kokhanenko Yu.V.* Solution of plane problems of the three-dimensional stability of a ribbon-reinforced composite // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 10. – P. 1317 – 1328.
367. *Guz A.N., Dekret V.A., Kokhanenko Yu.V.* Two-dimensional stability problem for interacting short fibers in a composite: in-line arrangement // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 9. – P. 994 – 1001.
368. *Guz A.N., Dekret V.A., Kokhanenko Yu.V.* Planar stability problem of composite weakly reinforced by short fibers // *Mechanics of Adv. Materials and Structures.* – 2005. – N 12. – P. 313 – 317.
369. *Guz A.N., Dovzhik M.V. and Nazarenko V.M.* Fracture of a material compressed along a crack located at a short distance from the free surface // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 627 – 635.
370. *Guz A.N., Dyshel' M.Sh.* Fracture of cylindrical shells with cracks in tension // *Theor. and Appl. Fracture Mechanics.* – 1985. – N 4. – P. 123 – 126.
371. *Guz A.N., Dyshel' M.Sh.* Fracture and stability of notched thin-walled bodies in tension (Survey) // *Sov. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 11. – P. 1023 – 1040.
372. *Guz A.N., Dyshel' M.Sh., Kuliev G.G., Milovanova O.B.* Fracture and local instability of thin-walled bodies with notches // *Sov. Appl. Mech.* – 1981. – **17**, N 8. – P. 707 – 721.
373. *Guz A.N., Dyshel' M.Sh., Nazarenko V.M.* Fracture and stability of materials and structural members with cracks: approaches and results // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 12. – P. 1323 – 1359.
374. *Guz A.N., Guz I.A.* Substantiation of a continuum theory of the fracture of laminated composite in compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 7. – P. 648 – 657.
375. *Guz A.N., Guz I.A.* Foundation for the continual theory of fracture during compression of laminar composites with a metal matrix // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 11. – P. 1041 – 1047.
376. *Guz A.N., Guz I.A.* On the theory of stability of laminated composites // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 4. – P. 323 – 329.
377. *Guz A.N., Guz I.A.* Analytical solution of stability problem for two composite half-plane compressed along interfacial cracks // *Composites. Part B.* – 2000. – **31**, N 5. – P. 405 – 418.

378. *Guz A.N., Guz I.A.* The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 1. Exact solution for the case of unequal roots // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 4. – P. 482 – 491.
379. *Guz A.N., Guz I.A.* The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 1. Exact solution for the case of equal roots // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 5. – P. 615 – 622.
380. *Guz A.N., Guz I.A.* The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 3. Exact solution for the case of equal and unequal roots // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 6. – P. 759 – 768.
381. *Guz A.N., Guz I.A.* On publications on the brittle fracture mechanics of prestressed materials // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 7. – P. 797 – 801.
382. *Guz A.N., Guz I.A.* Mixed plane problems of linearized solids mechanics. Exact solutions // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 1. – P. 1 – 29.
383. *Guz A.N., Guz I.A.* On models in the theory of stability of multi-walled carbon nanotubes // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 6. – P. 617 – 628.
384. *Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A.* Penny-shaped crack at the interface between elastic half-space under the action of a shear wave // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 5. – P. 534 – 539.
385. *Guz A.N., Khoma Yu. I.* Stability of an infinite solid with a circular cylindrical crack under compression using the Treloar potential // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 2002. – **39**, N 3. – P. 276 – 280.
386. *Guz A.N., Khoma Yu. I.* Integral formulation for a circular cylindrical cavity in infinite solid and finite length coaxial cylindrical crack compressed axially // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 2006. – **45**, N 2. – P. 204 – 211.
387. *Guz A.N., Khoma Yu. I. and Nazarenko V.M.* On fracture of an infinite elastic body in compression along a cylindrical defect // In: Proc. of ICF 9 «Advance in Fracture Research», Vol. 4, Sydney, Australia, 1997. – P. 2047 – 2054.
388. *Guz A.N., Klyuchnikov Yu.V.* Three-dimensional static problem for an elliptical crack in an elastic body with initial stress // *Sov. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 10. – P. 898 – 907.
389. *Guz A.N., Knyukh V.L., Nazarenko V.M.* Three-dimensional axisymmetric problem of fracture in material with two discoidal cracks under compression along latter // *Sov. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 11. – P. 1003 – 1012.
390. *Guz A.N., Knyukh V.L., Nazarenko V.M.* Cleavage of composite materials in compression along internal and surface macrocracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 11. – P. 1047 – 1051.
391. *Guz A.N., Knyukh V.L., Nazarenko V.M.* Fracture of ductile materials in compression along two parallel disk-shaped cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 2. – P. 112 – 117.
392. *Guz A.N., Knyukh V.L., Nazarenko V.M.* Compressive failure of material with two parallel cracks: small and large deformation // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 1989. – **11**, N 3. – P. 213 – 223.
393. *Guz A.N., Korzh V.P., Chekhov V.N.* Instability of layered bodies during compression taking into account the action of disturbed surface loads // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 5. – P. 435 – 442.
394. *Guz A.N., Korzh V.P., Chekhov V.N.* Surface instability of a laminar medium connected with a homogeneous half-space under multilateral compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 3. – P. 215 – 222.
395. *Guz A.N., Korzh V.P., Chekhov V.N.* Stability of a laminar half-plane of regular structure under uniform compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 8. – P. 744 – 749.
396. *Guz A.N., Kritsuk A.A., Emel'yanov R.F.* Character of the failure of unidirectional glass-reinforced plastic in compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1969. – **5**, N 9. – P. 997 – 999.
397. *Guz A.N., Kuliev G.G., Tsurpal I.A.* Theory of the rupture of thin bodies with cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1975. – **11**, N 5. – P. 485 – 487.
398. *Guz A.N., Kuliev G.G., Tsurpal I.A.* On failure of brittle materials because of gripping near cracks // Abstracts the 14-th IUTAM Congress, Delft. – 1976. – p. 90.
399. *Guz A.N., Kuliev G.G., Tsurpal I.A.* On fracture of brittle materials from loss of stability near crack // *Eng. Fracture Mech.* – 1978. – **10**, N 2. – P. 401 – 408.
400. *Guz A.N., Lapusta Yu.N.* Stability of a fiber near a free surface // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 8. – P. 711 – 718.
401. *Guz A.N., Lapusta Yu.N.* Stability of a fiber near a free cylindrical surface // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 10. – P. 939 – 944.
402. *Guz A.N., Lapusta Yu.N.* Three-dimensional problem on the stability of a row of fibers perpendicular to the free boundary of a matrix // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, N 12. – P. 919 – 926.

403. *Guz A.N., Lapusta Yu.N.* Three-dimensional problems of the near-surface instability of fiber composites in compression (Model of a piecewise-uniform medium) (Survey) // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 7. – P. 641 – 670.
404. *Guz A.N., Lapusta Yu.N., Mamzenko Yu.A.* Stability of a two fibers in an elasto-plastic matrix under compression // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 5. – P. 405 – 413.
405. *Guz A.N., Lapusta Yu.N., Samborskaya A.N.* A micromechanics solution of a 3D internal instability problem for a fiber series on an infinite matrix // *Int. Journal of Fracture.* – 2002. – **116**, N 3. – P. L55 – L60.
406. *Guz A.N., Lapusta Yu.N., Samborskaya A.N.* 3D model and estimation of fiber interaction effects during internal instability in non-linear composites // *Int. Journal of Fracture.* – 2005. – **134**, N 3-4. – P. L45 – L51.
407. *Guz A.N., Menshikov A.V., Zozulya V.V.* Surface contact of elliptical crack under normally incident tension-compression wave // *Theor. and Appl. Fracture Mechanics.* – 2003. – **40**, N 3. – P. 285 – 291.
408. *Guz A.N., Menshikov A.V., Zozulya V.V., Guz I.A.* Contact problem for the plane elliptical crack under normally incident shear wave // *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* – 2007. – **17**, N 3. – P. 205 – 214.
409. *Guz A.N., Musaev D.A.* Fracture of a unidirectional ribbon composite with elasto-plastic matrix in compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 5. – P. 425 – 429.
410. *Guz A.N., Musaev D.A., Yusubov Ch.A.* Stability of two noncircular cylinder in an elastic matrix with small subcritical strains // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 11. – P. 1059 – 1064.
411. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Symmetric failure of the halfspace with penny-shaped crack in compression // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 1985. – **3**, N 3. – P. 233 – 245.
412. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture of a material in compression along a periodic system of parallel circular cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 4. – P. 371 – 377.
413. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture mechanics of material in compression along cracks (Review). Highly elastic materials // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 9. – P. 851 – 876.
414. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture mechanics of materials under compression along cracks (survey). Structural materials // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 10. – P. 959 – 972.
415. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 2007. – **48**. – P. 285 – 303.
416. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Combined analysis of fracture under stress acting along cracks // *Archive of Appl. Mech.* – 2013. – **83**, N 9. – P. 1273 – 1293.
417. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Khoma Yu.I.* Failure of an infinite compressible composite containing a finite cylindrical crack in axial compression // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 9. – P. 695 – 703.
418. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Khoma Yu.I.* Fracture of an infinite incompressible hyperelastic material under compression along a cylindrical crack // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 5. – P. 325 – 331.
419. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Nazarenko S.M.* Fracture of composites under compression along periodically placed parallel circular stratifications // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 3. – P. 215 – 121.
420. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Nikonov V.A.* Torsion of a pre-stresses halfspace with a disc-shaped crack at the surface // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 10. – P. 948 – 954.
421. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Starodubtsev I.P.* Planar problem of failure of structural materials in compression along two parallel cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 4. – P. 352 – 360.
422. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Starodubtsev I.P.* On problems of fracture of materials in compression along two internal parallel cracks // *Appl. Math. Mech.* – 1997. – **18**, N 6. – P. 517 – 528.
423. *Guz A.N., Rushchitskii J.J.* Short Introduction to Mechanics of Nanocomposites. – Scientific & Academic Publishing Co., LTD, USA, 2013. – 280 p.
424. *Guz A.N., Rushchitskii J.J., Guz I.A.* Establishing fundamentals of the mechanics of nanocomposites // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 3. – P. 247 – 271.
425. *Guz A.N., Samborskaya A.N.* General stability problem of a series of fibers in an elastic matrix // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 3. – P. 223 – 230.
426. *Guz A.N., Sporykhin A.N.* Three-dimensional theory of inelastic stability (General questions) // *Sov. Appl. Mech.* – 1982. – **18**, N 7. – P. 581 – 596.
427. *Guz A.N., Sporykhin A.N.* Three-dimensional theory of inelastic stability. Specific results // *Sov. Appl. Mech.* – 1982. – **18**, N 8. – P. 671 – 692.
428. *Guz A.N., Tkachenko E.A., Chekhov V.N.* Stability of layered antifriction coating // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 9. – P. 669 – 676.

429. *Guz A.N., Tkachenko E.A., Chekhov V. N., Stukotilov V.S.* Stability of multilayer antifriction coating for small subcritical strains // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 10. – P. 772 – 779.
430. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Contact interaction between crack edges under dynamic load // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 7. – P. 407 – 417.
431. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Problems of dynamic fracture mechanics without contact of the crack faces // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, N 10. – P. 735 – 759.
432. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Problems of dynamic fracture mechanics without allowance for contact of the crack edges // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 1. – P. 1 – 31.
433. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Fracture dynamic with allowance for a crack edges contact interaction // *Int. J. of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation.* – 2001. – **2**, N 3. – P. 173 – 233.
434. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Elastodynamic unilateral contact problem with friction for bodies with cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 8. – P. 895 – 932.
435. *Guz A.N., Zozulya V.V.* Investigation of the effect of frictional contact in III Mode crack under action of SH-wave harmonic load // *Comp. Modeling in Engineering & Sciences.* – 2007. – **22**, N 2. – P. 119 – 128.
436. *Guz A.N., Zozulya V.V.* On dynamical fracture mechanics in the case of polyharmonic loading by P-waves // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 9. – P. 1033 – 1036.
437. *Guz A.N., Zozulya V.V.* On dynamical fracture mechanics in the case of polyharmonic loading by SH-waves // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 1. – P. 113 – 116.
438. *Guz A.N., Zozulya V.V., Menshikov A.V.* Three-dimensional dynamic contact problem for an elliptic crack interacting with normally incident harmonic compression-expansion wave // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 12. – P. 1425 – 1428.
439. *Guz A.N., Zozulya V.V., Menshikov A.V.* General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 2. – P. 156 – 159.
440. *Guz I.A.* Spatial nonaxisymmetric problems of the theory of stability of laminar highly elastic composite materials // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 11. – P. 1080 – 1085.
441. *Guz I.A.* Three-dimensional nonaxisymmetric problems of the theory of stability of composite materials with metallic matrix // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 12. – P. 1196 – 1200.
442. *Guz I.A.* Continuum approximation in three-dimensional nonaxisymmetric problems of the stability theory of laminar compressible materials // *Sov. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 3. – P. 233 – 236.
443. *Guz I.A.* Asymptotic accuracy of the continual theory of the internal instability of laminar composites with an incompressible matrix // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 7. – P. 680 – 684.
444. *Guz I.A.* Estimation of critical loading parameters for composites with imperfect layer contact // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 5. – P. 291 – 295.
445. *Guz I.A.* Investigation of local form of stability loss in laminated composites (three-dimensional problem). In: *Proc. of ICCM/9 «Composites. Properties and Applications»*. Vol. VI. Madrid 12 – 16 July, 1993. – P. 377 – 383.
446. *Guz I.A.* On the local stability loss in laminated composite structures. In: *Proc. of the 6th Eur. Conf. on Comp. Mat. «Development in the Science and Techn. Comp. Materials»*, Sept. 20 – 24, 1993, Bordeaux, France – Woodhead Publ. Ltd., 1993. – P. 263 – 268.
447. *Guz I.A.* Computational schemes in three-dimensional stability theory (the piecewise-homogeneous model of a medium) for composites with cracks between layers // *Int. Appl. Mech.* – 1993. – **29**, N 4. – P. 274 – 280.
448. *Guz I.A.* The strength of a composite formed by longitudinal – transverse stacking of orthotropic layers with a crack at the boundary // *Int. Appl. Mech.* – 1993. – **29**, N 11. – P. 921 – 924.
449. *Guz I.A.* Investigation of the stability of a composite in compression along two parallel structural cracks at the layer interface // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, N 11. – P. 841 – 847.
450. *Guz I.A.* On one mechanism of fracture of composites in compression along interlayer cracks // In: «*Proc. Int. Conf. on Design and Manufacturing Using Composites*», Aug. 10 – 12, 1994, Montreal, Canada, 1994. – P. 404 – 412.
451. *Guz I.A.* Problems of the stability of composite materials in compression along interlaminar cracks: periodic system of parallel macrocracks // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 7. – P. 551 – 557.
452. *Guz I.A.* Stability of composites in compression along cracks // In: «*Proc. of Enercomp 95*», May 8 – 10, 1995, Montreal, Canada. – Technomic Publ. Co., Lancaster – Basel, 1995. – P. 163 – 170.
453. *Guz I.A.* Failure of layered composites with interface cracks // In: «*Proc. of the 18th Int. Conf. «Reinforced Plastics 95»*», Karlovy Vary, 16 – 18.05.1995. – Czech. Rep., 1995. – P. 175 – 182.

454. *Guz I.A.* Stability and failure of layered composites with interface cracks // In: «Proc. of Int. Conf. on Comp. Eng. Sci. «Computational Mechanics 95»», July 30 – Aug. 3, 1995, Hawaii, USA, Vol. 1 – 2. – Springer – Verlag, 1995. – P. 2317 – 2322.
455. *Guz I.A.* Computer aided investigations of composites with various interlaminar cracks // ZAMM. – 1996. – 76, Sup. N 5. – P. 189 – 190.
456. *Guz I.A.* Stability loss of composite materials with cracks between compressible elastic layers // In: «Proc. of ECCM – 7», 14 – 16 May, 1996, London, UK, Vol. 1 – 2. – Woodhead Publ. Ltd., 1996. – Vol. 2. – P. 259 – 264.
457. *Guz I.A.* Composite structures in compression along parallel interfacial cracks // In: «Proc. of the ICCST/1», 18 – 20 June 1996, Durban, South Africa. – 1996. – P. 167 – 172.
458. *Guz I.A.* Analysis of a failure mechanism in compression of composites with various kinds of interface adhesion. In: Proc. of EUROMAT 97, 21 – 23 April, 1997, The Netherlands. Vol. 2, 1997. – P. 375 – 380.
459. *Guz I.A.* Modelling of fracture of composites in compression along layers. In: Proc. of 3rd Int. Conf., 3 – 5 Sept., 1997, Dublin, Ireland. – A.A. Balkema, Rotterdam, 1997. – P. 523 – 530.
460. *Guz I.A.* Metal matrix composites in compression. Substantiation of the bounds. In: Proc. of 5th Int. Conf. on Automated Composites, 4 – 5 Sept., 1997, Glasgow, UK. – Institute of Materials, London. – UK, 1997. – P. 387 – 393.
461. *Guz I.A.* Composites with various interfacial defects. Bounds for critical parameters of instability in compression. In: Proc. of DURACOSYS 97, 15 – 17 Sept., 1997, Blacksburg, USA. – USA, 1997. – P. 7.51 – 7.54.
462. *Guz I.A.* Instability in compression as a failure mechanism for layered composites with parallel interfacial cracks // In: Proc. of ICF 9 «Advances in Fracture Research», Vol. 2, Sydney, Australia, 1997. – P. 1053 – 1060.
463. *Guz I.A.* On one fracture mechanism for composites with parallel interfacial cracks // In: «Proc. of the 4th Int. Conf. on Deformation and Fracture of Composites», 24 – 26 March, 1997, Manchester, UK. – Institute of Materials, London. – 1997. – P. 579 – 588.
464. *Guz I.A.* On calculation of critical strains for periodical array of parallel interfacial cracks in layered materials // In: «Proc. of 6th EPMESC Conf.», 4 – 7 August, 1997, Guang-Zhou, China. – 1997. – P. 375 – 380.
465. *Guz I.A.* On fracture of brittle matrix composites: Compression along parallel interfacial cracks / In: «Proc. of 5th Int. Symp.», 13 – 15 October, 1997, Warsaw, Poland. Woodhead Publ. Ltd. Cambridge, 1997. – P. 391 – 400.
466. *Guz I.A.* Numerical investigation on one mechanism of fracture for rock with parallel interlaminar cracks // In: «Advances in Comp. Eng. Sciences». – Tech. Science Press, Forsyth, USA, 1997. – P. 956 – 961.
467. *Guz I.A.* Composites with interlaminar imperfections: Substantiation on the bounds for failure parameters in compression // Composites. Part B. – 1998. – 29, N 4. – P. 343 – 350.
468. *Guz I.A.* Analysis of stability and failure in compression of composites with various kinds of interfacial defects. In: Proc. of 6th Asia – Pacific Conf. on Struct. Eng. and Construction, Jan. 14 – 16, 1998, Taipei, Taiwan, Vol. 2. – P. 1337 – 1342.
469. *Guz I.A.* On asymptotic accuracy of the theory of plastic fracture in compression for layered materials. In: «Nonlocal Aspects in Solid Mechanics», EUROMECH Coll. 378, 20 – 22 April, 1998, Mulhouse, France, 1998. – P. 118 – 123.
470. *Guz I.A.* Composites with various kinds of interfacial adhesion: Compression along layers. In: Proc. of ECCM – 8, 3 – 6 June, 1998, Naples, Italy, Vol. 1 – 4. – Woodhead Publ. Ltd., 1998. – Vol. 4. – P. 677 – 683.
471. *Guz I.A.* On continuum approximation in compressive fracture theory for metal matrix composites: Asymptotic accuracy. In: Proc. of ICCST/2, 9 – 11 June, 1998, Durban, South Africa. – 1998. – P. 501 – 506.
472. *Guz I.A.* Investigation of accuracy of continuum fracture theory for piecewise-homogeneous medium. In: Proc. of ICNM-III, 17 – 20 Aug., 1998, Shanghai, China. – Shanghai Univ. Press, 1998. – P. 224 – 227.
473. *Guz I.A.* On two approaches to compressive fracture problems. In: Proc. of 12th Eur. Conf. on Fracture, 14 – 16 Sept., 1998, Sheffield, UK. Vol. 1 – 3. – EMAS Publ., Vol. 3, 1998. – P. 1447 – 1452.

474. *Guz I.A.* Asymptotic analysis of fracture theory for layered rocks in compression. In: «Modelling and Simulation Based Engineering». Vol. 1 – 2. – Tech. Science Press, Palmdale, USA, Vol. 1, 1998. – P. 375 – 380.
475. *Guz I.A.* On calculation of accuracy for continuum fracture theory of metal matrix composites in compression. In: Proc. of ICAC 96, 15 – 18 Dec., 1998, Hurghada, Egypt, 1998. – P. 757 – 764.
476. *Guz I.A.* On modelling of a failure mechanism for layered composites with interfacial cracks // ZAMM. – 1998. – **78**, Sup. N 1. – P. S429 – S430.
477. *Guz I.A.* On estimation of critical loads for rocks in compression: 3-D approach. In: Proc. of ARCOM'99, 15 – 17 Dec., 1999, Singapore. Vol. 1 – 2. – Vol. 2, Elsevier, 1999. – P. 847 – 852.
478. *Guz I.A.* Bounds for critical parameters in the stability theory of piecewise-homogeneous media: Laminated rocks. In: Proc. of SASAM 2000, 11 – 13 Jan., 2000, Durban, South Africa, 2000. – P. 479 – 484.
479. *Guz I.A.* Compressive behaviour of metal matrix composites: Accuracy of homogenization // ZAMM. – 2000. – **80**, Sup. N 2. – P. S473 – S474.
480. *Guz I.A.* The effect of the multi-axiality of compressive loading on the accuracy of a continuum model for layered materials // Int. J. Solids and Struct. – 2005. – **42**. – P. 439 – 453.
481. *Guz I.A., Chandler H.W.* Bifurcation problem for ceramics compressed along interlaminar microcracks // In: «Book of Abstracts of the 5th Int. Congr. on Indus. and Appl. Math., ICIAM 2003 (Ed.: R.R. Moore)», Sydney, Australia, 7 – 11 July, 2003. – Univ. of Techn., Sydney, Australia, 2003. – P. 311.
482. *Guz I.A., Guz A.N.* Stability of two different half-planes in compression along interfacial cracks: Analytical solutions // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 7. – P. 906 – 912.
483. *Guz I.A., Herrmann K.P.* On the lower bounds for critical loads under large deformations in non-linear hyperelastic composites with imperfect interlaminar adhesion // Eur. J. of Mechanics. A / Solids. – 2003. – **22**, N 6. – P. 837 – 849.
484. *Guz I.A., Kokhanenko Yu.V.* Stability of laminated composite material in compression along microcrack // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, N 9. – P. 702 – 708.
485. *Guz I.A., Soutis C.* Continuum fracture theory for layered materials: Investigation of accuracy // ZAMM. – 1999. – **35**, N 5. – P. 462 – 468.
486. *Guz I.A., Soutis C.* Critical strains in layered composites with interfacial defects loaded in uniaxial or biaxial compression // Plastics, Rubber and Composites. – 2000. – **29**, N 9. – P. 489 – 495.
487. *Guz I.A., Soutis C.* A 3-D stability theory applied to layered rocks undergoing finite deformations in biaxial compression // Eur. J. of Mechanics. A / Solids. – 2001. – **20**, N 1. – P. 139 – 153.
488. *Guz I.A., Soutis C.* Accuracy of a continuum fracture theory for non-linear composite materials under large deformations in biaxial compression // ZAMM. – 2001. – **81**, Sup. N 4. – P. S849 – S850.
489. *Guz I.A., Soutis C.* Compressive fracture of non-linear composites undergoing large deformations // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – **38**, N 21. – P. 3759 – 3770.
490. *Guz I.A., Soutis C.* Predicting fracture of composites. In: «Multi-scale modelling of composite material systems. The art of predictive damage modelling». – Woodhead Publ. Ltd, Cambridge England. – 2005. – P. 278 – 302.
491. *Guz I.A., Soutis C.* Compressive strength of laminated composites: on application of the continuum fracture theory. In: «Fracture and Damage of Composites». – WIT Press. Cambridge England. – 2006. – P. 1 – 24.
492. *Handbook of Fillers and Reinforcements for Plastics* (Eds Katz H., Milevski I.V.). – New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1978. – 652 p.
493. *Hayashi T.* On the shear instability of structures caused by compressive loads. In: Proc. of 16th Japan Congr. Appl. Mech. – 1966. – P. 149 – 157.
494. *Hayashi T.* On the shear instability of structures caused by compressive loads // AIAA Paper. – 1970. – N 65. – 770. Nov.
495. *Hoff N.J.* Buckling and stability // J. Royal Aeronautical Society. – 1954. – **58**, N 1. – P. 1 – 11.
496. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near end a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. – 1957. – **24**, N 3. – P. 361 – 364.
497. *Irwin G.R.* Fracture. In: «Handbuch der Physik. – Berlin, 1958. – Bd. 6». – P. 551 – 590.
498. *Jochum Ch., Grandidier J.-C.* Microbuckling elastic modeling approach of a single carbon fiber embedded in an epoxy matrix // Composites Science and Technology. – 2004. – **64**. – P. 2441 – 2449.

499. *Kappus R.* Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen // ZAMM. – 1939. – **19**, N 5. – S. 271 – 285.
500. *Kappus R.* Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen // ZAMM. – 1939. – **19**, N 6. – S. 344 – 361.
501. *Kluchnikov Yu.V.* Three-dimensional static problem for an external disk-shaped crack in an elastic body with initial stresses // Sov. Appl. Mech. – 1984. – **20**, N 2. – P. 118 – 122.
502. *Knyukh V.L.* Fracture of a material with two disk-shaped cracks in the case of axisymmetric deformation in compression along the cracks // Sov. Appl. Mech. – 1985. – **21**, N 3. – P. 221 – 225.
503. *Kokhanenko Yu.V.* Numerical solution of problems of the theory of elasticity and the three-dimensional stability of piecewise-homogeneous media // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **22**, N 11. – P. 1052 – 1058.
504. *Kokhanenko Yu.V.* Numerical study of the three-dimensional stability problems for laminated and ribbon-reinforced composites // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 3. – P. 317 – 340.
505. *Korzh V.P., Chekhov V.N.* Surface instability of laminated bodies of regular structure under combination loading // Sov. Appl. Mech. – 1991. – **27**, N 5. – P. 443 – 449.
506. *Korzh V.P., Chekhov V.N.* Combined analysis of internal and surface instability in laminar bodies of regular structure // Sov. Appl. Mech. – 1991. – **27**, N 11. – P. 1058 – 1063.
507. *Korzh V.P., Chekhov V.N.* Surface instability of laminated materials of regular structure under triaxial compression // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 9. – P. 1119 – 1124.
508. *Kuliev G.G.* Theory of stability of bodies with a crack in the case of plane deformation // Sov. Appl. Mech. – 1977. – **13**, N 12. – P. 1235 – 1239.
509. *Kuliev G.G.* Effect of the form of external loads on the loss of stability of the state of equilibrium of half-space near a central vertical crack // Sov. Appl. Mech. – 1979. – **15**, N 10. – P. 1001 – 1002.
510. *Kuliev G.G.* Problems of stability loss of half-space with a crack of infinite depth // Sov. Appl. Mech. – 1978. – **14**, N 8. – P. 815 – 819.
511. *Kurashide M.* Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid // ZAMM. – 1969. – **49**, N 2. – P. 671 – 678.
512. *Lapusta Yu.N.* Fiber stability in a semiinfinite elastic matrix with highly elastic deformation // Sov. Appl. Mech. – 1987. – **23**, N 8. – P. 718 – 721.
513. *Lapusta Yu.N.* Stability of fibers near the free surface of a cavity during finite precritical strains // Sov. Appl. Mech. – 1988. – **24**, N 5. – P. 453 – 457.
514. *Lapusta Yu.N.* Surface instability of two fibers in a matrix // Sov. Appl. Mech. – 1990. – **26**, N 8. – P. 739 – 744.
515. *Lapusta Yu.N.* Stability of a fiber in semi-infinite elastic matrix with sliding contact at the interface // Sov. Appl. Mech. – 1990. – **26**, N 10. – P. 924 – 928.
516. *Lapusta Yu.N.* Stability of a periodic series of fibers in a semi-infinite matrix // Sov. Appl. Mech. – 1991. – **27**, N 2. – P. 124 – 130.
517. *Lapusta Yu.N.* Stability of a row of fibers near the free plane border in matrix in axial compression // 1st European Solid Mechanics Conf., Abstracts, Munich, FRG, Sept. 9 – 13, 1991. – P. 131 – 132.
518. *Lapusta Yu.N.* Stability of a fiber in an elastoplastic matrix near a free cylindrical surface // Int. Appl. Mech. – 1992. – **28**, N 1. – P. 33 – 41.
519. *Lapusta Yu.N.* Near-the-surface fracture of fibrous materials in compression // ICF-8, Abstracts, Part II, Kiev, UKRAINE, 1993. – P. 393 – 394.
520. *Lapusta Yu.N.* On stability loss of fibers in composite materials near the boundaries. In: Proc. of ECF 11, 3 – 6 Sept., 1996, Poitiers, France, Vol. III. – 1996. – P. 1633 – 1638.
521. *Lapusta Yu.N.* Study of near-surface buckling of composite materials in zones of compression (model of a piecewise-uniform medium). In: Proc. of the ICCST/2, 9 – 11 June, 1998, Durban, South Africa. – 1998. – P. 145 – 148.
522. *Lapusta Yu.N.* A general micromechanical approach to the study of the near-surface buckling in fibrous composites. In: Proc. of ECF 12, 13 – 18.09.1998, Sheffield, UK, Vol. 13. – 1998. – P. 1477 – 1482.
523. *Lapusta Yu.N.* Prediction of compressive strength of fiber-reinforced composite based on 3-D microlevel consideration. In: Proc. ARQUIMACOM 98, 7 – 9.10.1998, Bordeaux, France. – 1998. – P. 165 – 169.
524. *Lapusta Yu.N.* A 3-D model for possible micro-instability patterns in a boundary layer of a fibre composite under compression // Composite Sciences and Technology. – 2002. – **62**. – P. 805 – 817.

525. *Lapusta Yu.N., Wagner W.* An estimation on the influence of matrix cavity and damaged fibre-matrix interface on stability of composites // *ZAMM*. – 2001. – **81**. – P. 855 – 856.
526. *Lapusta Yu.N., Wagner W.* On various material and fibre-matrix interface models in the near-surface instability problems for fibrous composites // *Composites Part A: applied science and manufacturing*. – 2001. – **32**. – P. 413 – 423.
527. *Lapusta Yu.N., Wagner W.* A numerical estimation of the effects of a cylindrical hole and imperfect bounding on stability of a fiber in an elastic matrix // *Int. J. for Num. Methods in Eng.* – 2001. – **51**. – P. 631 – 646.
528. *Men'shikov A.V.* Elastodynamics contact problem for two penny-shaped cracks // *Abstr. and Proc. of the XXI ICTAM 04, Warsaw, Poland*. – 2004. – P. 262.
529. *Men'shikov A.V., Guz I.A.* Contact interaction of crack faces under oblique incidence of a harmonic wave // *Int. J. of Fracture*. – 2006. – **139**, N 1. – P. 145 – 152.
530. *Men'shikov A.V., Guz I.A.* Effect of the contact interaction on the stress intensity factors for a crack under harmonic loading // *Appl. Mech. and Materials*. – 2006. – **5–6**. – P. 174 – 180.
531. *Men'shikov A.V., Guz I.A.* Effect of contact interaction of the crack faces for a crack under harmonic loading // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 7. – P. 809 – 815.
532. *Men'shikov A.V., Men'shikova M.V., Wendland W.L.* On use of the Galerkin method to solve the fracture mechanics problem for a linear crack under normal loading // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1324 – 1328.
533. *Men'shikov V.A., Men'shikov A.V., Guz I.A.* Interfacial crack between elastic half-spaces under harmonic loading // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 8. – P. 865 – 873.
534. *Micromechanics of composite materials: Focus on Ukrainian research // Appl. Mech. Reviews (Special Issue, A.N.Guz - Guest Editor)*. – 1992. – **45**, N 2. – P. 13 – 101.
Guz A.N. Introduction. – P. 14 – 15.
 About the authors. – P. 16.
Akbarov S.D., Guz A.N. Statics of laminated and fibrous composites. – P. 17 – 34.
Guz A.N., Shul'ga N.A. Dynamics of laminated and fibrous composites. – P. 35 – 60.
Babich I.Yu., Guz A.N. Stability of fibrous composites. – P. 61 – 80.
Guz A.N., Chekhov Vic.N. Stability of laminated composites. – P. 81 – 101.
535. *Mikhas'kiv V.V., Sladek J., Sladek V., Stepanyuk A.I.* Stress concentration near an elliptic crack in the interface between elastic bodies under steady-state vibration // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 6. – P. 664 – 671.
536. *Milovanova O.B., Dyshel' M.Sh.* Experimental investigation of the buckling form of tensioned plates with a slit // *Sov. Appl. Mech.* – 1978. – **14**, N 1. – P. 101 – 103.
537. *Milovanova O.B., Dyshel' M.Sh.* Stability of thin sheets with an oblique slit in tension // *Sov. Appl. Mech.* – 1980. – **16**, N 4. – P. 333 – 336.
538. *Musaev D.A.* Stability of a noncircular cylinder in an elastic matrix under finite deformations // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **38**, N 6. – P. 566 – 569.
539. *Musaev D.A., Nagiev F.M.* Stability of a row of noncircular cylinders in an elastic matrix with finite strains // *Sov. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 10. – P. 929 – 933.
540. *Nazarenko V.M.* Mutual effect of a circular surface crack and a free boundary in an axisymmetric problem of the fracture of an incompressible half space in compression along the crack plane // *Sov. Appl. Mech.* – 1985. – **21**, N 2. – P. 133 – 137.
541. *Nazarenko V.M.* Plastic rupture of materials during compression along near-surface fractures // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **21**, N 2. – P. 133 – 137.
542. *Nazarenko V.M.* Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 10. – P. 970 – 977.
543. *Nazarenko V.M.* Theory of fracture of materials in compression along near-surface cracks under plane-strain conditions // *Sov. Appl. Mech.* – 1986. – **22**, N 12. – P. 1192 – 1199.
544. *Nazarenko V.M.* Fracture of plastic masses with translational strain-hardening in compression along near-surface cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 1. – P. 61 – 64.
545. *Nazarenko V.M., Bogdanov V.L., Altenbach H.* Influence of initial stress on fracture of a half-space containing a penny-shaped crack under radial shear // *Int. J. Fracture*. – 2000. – **104**. – P. 275 – 289.
546. *Novinski J.L.* On the elastic stability of thick columns // *Acta Mech.* – 1969. – **7**, N 4. – P. 279 – 286.

547. *Obreimoff I.W.* The splitting strength of mica // Proc. Soc. London A. – 1930. – **127A**. – P. 290 – 297.
548. *Pinnel M.R., Lawley F.* Correlation on uniaxial yielding and substructure in aluminium-stainless steel composites // Metall. Trans. – 1970. – **1**, N 5. – P. 929 – 933.
549. *Radi E., Bigoni D., Capuani D.* Effect of pre-stress on crack tip fields in elastic incompressible solids // Int. J. Solids and Struct. – 2002. – **39**. – P. 3971 – 3996.
550. *Rice I.R.* Path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // J. Appl. Mech. – 1968. – **35**, N 4. – P. 340 – 350.
551. *Rosen B.W.* Mechanics of Composite Strengthening. In «Fiber Composite Materials. American Society for Metals, Metals Park, Ohio. – 1965». – P. 37 – 75.
552. *Rzayev O.G. and Akbarov S.D.* Local buckling of the elastic and viscoelastic coating around the penny-shaped interface crack // Int. J. Eng. Sci. – 2002. – **40**. – P. 1435 – 1451.
553. *Sadovsky M.A., Pu S.L., Hussain M.A.* Buckling of microfibers // J. Appl. Mech. – 1967. – **34**, N 4. – P. 295 – 302.
554. *Satish Kumar, Tensuya Uchida, Thuy Dang, Xiefei Zhang, Young-Bin Park.* Polymer / carbon nano fiber composite fibers // SAMPE – 2004 – Long Beach, CA. May 16 – 20, 2004. – P. 1 – 12.
555. *Schapery R.A.* Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analyses // Proc. US Nat. Congr. Appl. ASME. – 1966. – N 4. – P. 1075 – 1085.
556. *Schuerch H.* Prediction of compressive strength in uniaxial boron fiber metal matrix composite material // AIAA Journal. – 1966. – **4**, N1. – P. 102 – 106.
557. *Schultheisz C.R., Waas A.M.* Compressive Failure of Composites, Part 1: Testing and Micromechanical Theories // Prog. Aerospace Sci. – 1996. – **32**. – P. 1 – 42.
558. *Shetty H.R., Chou T.W.* Mechanical properties and failure characteristic of FP-aluminium and W-aluminium composites // Metall. Trans. A. – 1985. – **16**, N 5. – P. 833 – 864.
559. *Skachenko A.V.* Stability of multilayer composite under inelastic deformations // Sov. Appl. Mech. – 1979. – **15**, N 8. – P. 756 – 757.
560. *Soos E.* Resonance and stress concentration in a prestressed elastic solid containing a crack. An apparent paradox // Int. J. Engng. Sci. – 1996. – **34**, N 3. – P. 363 – 374.
561. *Southwell R.V.* On the general theory of elastic stability // Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. – 1913. – **213**. – P. 187 – 244.
562. *Soutis C., Flek N.A., Smith P.A.* Failure prediction technique for compression loaded carbon fibre-epoxy laminate with open hole. // J. Comp. Mat. – 1991. – **25**. – P. 1476 – 1498.
563. *Soutis C., Guz I.A.* On analytical approaches to failure composites caused by internal instability under deformations. In: Proc. of EUROMECH Colloquium 400, 21 – 29 Sept., 1999, London, 1999. – P. 51 – 58.
564. *Soutis C., Guz I.A.* Predicting fracture of layered composites caused by internal instability // Composites Part A: applied science and manufacturing. – 2001. – **39**, N 9. – P. 1243 – 1253.
565. *Starodubtsev I.P.* Fracture of a body in compression along two parallel cracks under plane-strain conditions // Sov. Appl. Mech. – 1988. – **24**, N 6. – P. 604 – 607.
566. *Tkachenko E.A., Chekhov V.N.* Combined effect of temperature and compressive surface loads on the stability of elastic multilayer coating with small subcritical strains // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 8. – P. 729 – 735.
567. *Tkachenko E.A., Chekhov V.N.* The stability of tribotechnical laminated polymeric coatings // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 9. – P. 1198 – 1204.
568. *Tkachenko E.A., Chekhov V.N.* The stability of laminated elastomer coatings under surface loading // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 10. – P. 1355 – 1362.
569. *Tkachenko E.A., Chekhov V.N.* Stability of laminated coating under elastoplastic deformations // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 3. – P. 361 – 368.
570. *Tkachenko E.A., Chekhov V.N.* Stability of an elastic layer stack between two half-space under compressive loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 11. – P. 1381 – 1387.
571. *Tkachenko E.A., Chekhov V.N.* Stability of a lamina between two homogeneous half-space under inelastic deformation // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 5. – P. 481 – 489.
572. *Waas A.M., Schultheisz C.R.* Compressive Failure of Composites, Part 2: Experimental Studies // Prog. Aerospace Sci. – 1996. – **32**. – P. 43 – 78.
573. *Wadee M.A., Hunt C.W., Peletier M.A.* Kink band instability in layered structures // J. Mech. Phys. Solids. – 2004. – **52**. – P. 1071 – 1091.

574. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction on the critical strain in orthotropic heterogeneous material under compressive static loading // In: «Proc. of the 2006 ASME Int. Mech. Eng. Congr. & Exposition (IMECE 2006)», Nov. 5 – 10, 2006, Chicago, USA. – ASME, 2006. – 9 p.
575. *Winiarski B., Guz I.A.* Plane problem for layered composites with periodic array of interfacial cracks under compressive static loading // *Int. J. of Fracture.* – 2007. – **144**, N 2. – P. 113 – 119.
576. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction for transversely isotropic layered material under compressive loading // *Finite Elem. in Analysis and Design.* – 2008. – **44**, N 4. – P. 197 – 213.
577. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of fibre volume fraction on the onset of fracture in laminar materials with an array of coplanar interface cracks // *Composite Sci. and Technology.* – 2008. – **68**, N 12. – P. 2367 – 2375.
578. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction in orthotropic layered materials under compressive loading // *The Phil. Trans. of the Royal Soc. A.* – 2008. – **366**, N 1871. – P. 1835 – 1839.
579. *Wu C.H.* Plane-strain buckling of a crack in harmonic solid subjected to crack-parallel compression // *J. Appl. Mech.* – 1979. – **46**. – P. 597 – 604.
580. *Wu C.H.* Plane strain buckling of a crack in incompressible elastic solids // *J. Elasticity.* – 1980. – **10**, N 2. – P. 161 – 177.
581. *Yoffe E.* The moving Griffith crack // *Phil. Mag.* – 1951. – **4**, N 330. – P. 739 – 750.
582. *Zozulya V.V.* Investigation of the contact of edges of cracks interacting with a plane longitudinal harmonic wave // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 12. – P. 1191 – 1195.
583. *Zozulya V.V.* Contact interaction between the edges of a crack in an infinite plane under a harmonic load // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 1. – P. 61 – 64.
584. *Zozulya V.V.* Investigation of the effect of crack edge contact for loading by a harmonic wave // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 2. – P. 95 – 99.
585. *Zozulya V.V.* Harmonic loading of the edges of two collinear cracks in plane // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 3. – P. 170 – 172.
586. *Zozulya V.V.* Contact problem for a plane crack under normally incident antiplane shear wave // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 5. – P. 586 – 588.
587. *Zozulya V.V.* Stress intensity factor in a contact problem for a plane crack under an antiplane shear wave // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 9. – P. 1043 – 1047.
588. *Zozulya V.V., Fenchenko N.V.* Influence of contact interaction between the sides of crack on characteristics of failure mechanics in action P- and SV waves // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 2. – P. 175 – 180.
589. *Zozulya V.V., Lukin A.N.* Solution of three-dimensional problems of fracture mechanics by the method of integral boundary equations // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 6. – P. 544 – 551.
590. *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* Contact interaction of the faces of a rectangular crack under normally incident tension-compression waves // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 3. – P. 302 – 307.
591. *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* On one contact problem in fracture mechanics for a normally incident tension-compression wave // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 7. – P. 824 – 828.
592. *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* Contact interaction of the faces of a penny-shaped crack under a normally incident shear wave // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 9. – P. 1114 – 1118.
593. *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* Use of the constrained optimization algorithms in some problems of fracture mechanics // *Optimization and Engineering.* – 2003. – **4**, N 4. – P. 365 – 384.
594. *Zozulya V.V., Men'shikova M.V.* Study of interactive algorithms for solution of dynamic contact problems for elastic cracked bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 5. – P. 573 – 578.
595. *Zozulya V.V., Men'shikova M.V.* Dynamic contact problems for a plane with a finite crack // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 12. – P. 1459 – 1463.
596. *Zozulya V.V., Men'shikov V.A.* Contact interaction of the edges of a crack in a plane under harmonic loading // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, N 12. – P. 986 – 989.
597. *Zozulya V.V., Men'shikov V.A.* Solution of three-dimensional problems of the dynamic theory of elasticity for bodies with cracks using hypersingular integrals // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 1. – P. 74 – 81.

Поступила 13.09.2018

Утверждена в печать 05.03.2019