

В. Г. Савченко, М. Е. Бабешко

**МЕТОДИКА УЧЕТА ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ РАЗГРУЗКЕ  
В ЗАДАЧАХ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A technique of numerical study is elaborated for the non-axisymmetric elastoplastic stress-strain state in the solid of revolution during the non-isothermal combined processes of loading with allowance for the repeated plastic strains. This technique is based on the constitutive equations of the theory of small curvature processes and the finite element method. The models of elastic unloading, perfect Bauschinger effect and isotropic hardening are used. An effect of the application of variable models of unloading is illustrated by numerical examples.

**Key words:** thermoplasticity, bodies of revolution, non-axisymmetric stress-strain state, isotropic material, elastic unloading, perfect Bauschinger effect, isotropic hardening, repeated plastic strain.

**Введение.**

Форсированное развитие современного машиностроения и создание конкурентно способной продукции невозможно без принципиально новых разработок, без математического моделирования происходящих в элементах рассматриваемой конструкции процессов и последующего вычислительного эксперимента. При этом исходный объект заменяется его математической моделью с дальнейшим исследованием, экспериментированием с помощью вычислительно-логических алгоритмов. Одним из факторов, способствующих решению указанных проблем, является создание методик, позволяющих в рамках единого подхода выполнить детальный анализ температурных полей и упругопластического напряженно-деформированного состояния (НДС) широкого класса конструкций с максимально полным учетом особенностей их деформирования в рабочих и экстремальных условиях. Именно такой подход позволяет обеспечить нужные технико-экономические показатели изделия и высокую эксплуатационную надежность при ограниченных затратах на сложные и дорогостоящие экспериментальные испытания.

Особенность деформирования элементов конструкций, подверженных интенсивному внешнему нагреву, состоит в том, что с ростом температуры в поверхностных слоях сжимающие напряжения уменьшаются и переходят в растягивающие с возникновением пластических деформаций другого знака. Это вызвано тем, что, несмотря на рост температуры, прогрев элемента в глубину материала уменьшает градиенты температуры в поверхностных слоях.

В настоящее время известен целый ряд разработок [2 – 8, 15 и др.], позволяющих проводить квазистатический анализ неравномерно нагретых элементов конструкций как в упругой, так и в упругопластической постановке, в большинстве из которых классы решаемых задач ограничены введением различных упрощающих допущений, позволяющих описать только частные случаи процесса деформирования рассматриваемого элемента конструкции. В некоторых из этих работ предполагается только упругое поведение материала элемента конструкции во всем диапазоне изменения напря-

жений, в других – связь между напряжениями и деформациями принимается физически нелинейной, однако процесс разгрузки не учитывается. Часто предполагается, что в элементах конструкции реализуются простые процессы деформирования с возникновением только упругой разгрузки, хотя при интенсивном нагреве и силовом нагружении происходит деформирование по траекториям малой кривизны [3, 10, 11, 20, 21] с возникновением вторичных пластических деформаций при разгрузке и др. Во всех этих работах используются модифицированные соотношения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [6, 18] и традиционные соотношения теории простых процессов, в основу которых положены соотношения теории Прандтля – Рейса [16, 17] и теории Генки [14], соответственно.

Работы, в которых рассматриваются процессы деформирования малой кривизны, посвящены, в основном, исследованию НДС оболочек вращения при повторном термосиловом нагружении с учетом вторичных пластических деформаций [9 – 12 и др.]. В развитие этих разработок в данной работе изложена методика численного исследования поведения элементов конструкций в виде тел вращения, учитывающая возникновение и изменение пластических деформаций при разгрузке в процессе неизотермического нагружения. На конкретных примерах проанализированы полученные по изложенной методике результаты в процессе переменного неизотермического нагружения в предположении различного поведения материала при разгрузке (упругая разгрузка, изотропное упрочнение или идеальный эффект Баушингера). Проведена оценка возникающих при этом областей пластического деформирования материала.

### 1. Постановка задачи. Основные разрешающие соотношения.

В цилиндрической системе координат  $z, r, \varphi$  рассматривается составное (слоистое) тело вращения, изготовленное из изотропных и ортотропных материалов при неизотермическом нагружении объемными  $\vec{K}(K_z, K_r, K_\varphi)$  и поверхностными  $\vec{t}_n(t_{nz}, t_{nr}, t_{n\varphi})$  силами с заданными условиями теплового воздействия. Предполагается, что в начальный момент времени  $t_0$  тело находится при начальной температуре  $T_0$ . Под составным телом подразумевается дискретно однородное тело вращения, все составные части которого также являются телами вращения с общей осью вращения. Составные части тела, выполненные из разных материалов, скреплены между собой при температуре  $T_0$  без натяга и на их общей границе выполняются условия идеального силового и теплового контактов. Нагружение тела осуществляется таким образом, что задачу исследования НДС можно рассматривать в квазистатической постановке.

При решении задачи термовязкопластичности процесс нагружения и нагрева тела необходимо разбить на ряд этапов таким образом, чтобы ломаная кривая достаточно точно аппроксимировала траекторию деформирования, а моменты времени, разграничивающие этапы, как можно лучше совпадали с моментами перехода отдельных элементов тела из состояния активного нагружения к разгрузке и наоборот. Для определения термовязкопластического НДС исследуемого тела вращения необходимо на каждом этапе нагружения последовательно решить задачу нестационарной теплопроводности по определению температуры  $T$  при заданных условиях теплообмена с окружающей средой и задачу термовязкопластичности по определению перемещений  $u_i$ , деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = z, r, \varphi$ ) для фиксированных моментов времени при заданных условиях нагружения и закрепления.

Исследование температурного и НДС рассматриваемого составного тела вращения будет осуществляться на основе вариационных уравнений:

вариационного уравнения теплопроводности

$$\int_V \left[ c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \delta T - q_z \delta \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - q_r \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) - q_\varphi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \right] dV + \int_\Sigma \alpha(T - \theta) \delta T d\Sigma = 0 \quad (1)$$

и вариационного уравнения Лагранжа

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - K_i \delta u_i) dV - \int_{\Sigma_i} t_m \delta u_i d\Sigma = 0 \quad (i, j = z, r, \varphi). \quad (2)$$

Здесь  $V$  – объем рассматриваемого тела вращения, ограниченного поверхностью  $\Sigma$ ;  $\Sigma_i$  – часть поверхности  $\Sigma$ , на которой заданы компоненты поверхностной нагрузки  $\vec{t}_n$ ;  $c, \rho$  – коэффициент удельной массовой теплоемкости и плотность материала тела;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи при конвективном теплообмене тела со средой температуры  $\theta$ ;  $t$  – текущее время нагрева и нагружения тела;  $q_z, q_r, q_\varphi$  – приведенные тепловые потоки в соответствующих направлениях:

$$q_z = - \left( \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{z\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right);$$

$$q_r = - \left( \lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{r\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right); \quad q_\varphi = - \left( \lambda_{z\varphi} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_{r\varphi} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right); \quad (3)$$

$\lambda_{ij}$  – компоненты тензора теплопроводности.

Определяющие соотношения представим в виде связи между компонентами тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , коэффициенты которых определяются в зависимости от типа материала, используемых уравнений состояния, способа линеаризации и др. При записи определяющих уравнений используем представление тензора деформаций в виде суммы тензоров упругой и пластической деформаций и деформаций ползучести. На каждом этапе нагружения задачу термовязкопластичности решаем методом последовательных приближений. В этом случае используемые определяющие уравнения можно представить в виде [19]

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn} - \sigma_{ij}^* \quad (m, n = z, r, \varphi) \quad (4)$$

при условии

$$A_{ijmn} = A_{jimm} = A_{ijmm} = A_{mnij}. \quad (5)$$

Коэффициенты  $A_{ijmn}$  (4), (5) для каждого типа материала имеют различный вид в зависимости от используемых теорий пластичности и ползучести. Слагаемые  $\sigma_{ij}^*$  учитывают тепловую деформацию, отклонение материала от упругого, зависимость диаграмм деформирования материала от температуры, вид анизотропии, а также способ линеаризации определяющих уравнений и др. Для линеаризации определяющих уравнений используются методы последовательных линейных приближений, когда в каждом приближении решение исходной нелинейной задачи сводится к решению линейной задачи теории упругости с дополнительными слагаемыми  $\sigma_{ij}^*$ . Эти слагаемые определяются по результатам решения задачи в предыдущем приближении. Выражения  $A_{ijmn}, \sigma_{ij}^*$  (4), (5) для изотропного материала, ортотропного в цилиндрической системе координат или прямолинейно ортотропного материалов приведены в работах [3, 19].

При описании неупругого деформирования изотропных материалов на каждом из выбранных этапов нагружения воспользуемся зависимостями теории процессов малой кривизны между компонентами напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , линеаризованные с помощью метода дополнительных напряжений [4]. В этом случае связь между компонентами напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  в любом элементе тела из изотроп-

ного материала записывается в виде закона Гука с дополнительными слагаемыми, учитывающими тепловую деформацию, отклонение материала от упругого, а также зависимость упругих характеристик от температуры:

$$\sigma_{zz} = (2G_0 + \lambda_0) \varepsilon_{zz} + \lambda_0 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \sigma_{zz}^*; \quad \sigma_{zr} = 2G_0 \varepsilon_{zr} - \sigma_{zr}^* \quad (z, r, \varphi). \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\sigma_{ij}^* = 2G_0 \omega \varepsilon_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}^n + [(K_0 \omega_1 + 2G_0 \omega) \varepsilon_0 + K \varepsilon_T] \delta_{ij}; \quad (7)$$

$$\omega = 1 - \frac{G}{G_0}; \quad \omega_1 = 1 - \frac{K}{K_0}; \quad \lambda_0 = \frac{K_0 - 2G_0}{3}; \quad K = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu};$$

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) / 3; \quad \varepsilon_T = \alpha_T (T - T_0), \quad (8)$$

где  $G_0$ ,  $G$  и  $K_0$ ,  $K$  – соответственно, модули сдвига и объемного расширения материала при начальной и текущей температуре соответственно;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\varepsilon_{ij}^n$  – накопленные к концу  $m$ -го этапа нагружения неупругие составляющие компонентов деформации, равные в силу пластической несжимаемости материала неупругим составляющим компонентов девиатора деформаций  $e_{ij}^n$  и которые определяются соотношениями

$$(e_{ij}^n)_m = \sum_{k=1}^m \Delta_k e_{ij}^n = \sum_{k=1}^m \left\langle \frac{S_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma_n. \quad (9)$$

Приращения  $\Delta_k \Gamma_n$  за  $k$ -й этап нагружения определяются методом последовательных приближений в процессе решения краевой задачи. При этом  $\Delta_k \Gamma_n = \Delta_k \Gamma_p + \Delta_k \Gamma_c$  и предполагается, что вначале  $m$ -го этапа нагружения известны значения мгновенной неупругой деформации  $\Gamma_n^{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta_k \Gamma_n$ , которые были получены в конце предыдущего  $m-1$ -го этапа.

В общем случае интенсивность касательных напряжений  $S = (s_{ij} s_{ij} / 2)^{1/2}$  является функционалом интенсивности деформаций сдвига  $\Gamma = (e_{ij} e_{ij} / 2)^{1/2}$ , интенсивности накопленных за  $m$  этапов неупругих деформаций сдвига  $\Gamma_n^m = \sum_{k=1}^m \Delta_k \Gamma_n$ , температуры  $T$  и времени  $t$  [5]. Для его конкретизации предполагается существование зависимости

$$S = F(\Gamma, \Gamma_n, T, t), \quad (10)$$

которая определяется с использованием диаграмм растяжения и последующего сжатия после достижения фиксированного значения пластической деформации цилиндрических образцов, полученных при различных постоянных значениях температуры и скоростей нагружения. На основе этих экспериментов строится семейство мгновенных термомеханических поверхностей  $S = F^*(\Gamma^*, \Gamma_p^*, T)$  для различных фиксированных значений температуры при первоначальном нагружении и разгрузке, учитывающей уровни достигнутых пластических деформаций. Учет скорости нагружения осуществляется путем построения сопряженных к ним диаграмм ползучести  $\varepsilon_c = \varepsilon_c(\sigma, T, t)$ . Переход от одноосного НДС к интенсивности касательных напряжений  $S$  и интенсивности деформаций сдвига  $\Gamma$  осуществляется по формулам:

$$S = \sigma / \sqrt{3}; \Gamma = \frac{1 + \nu^*}{\sqrt{3}} \varepsilon; \Gamma_p = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_p; \nu^* = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2\nu}{4G(1 + \nu)} \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (11)$$

В дальнейшем будут рассматриваться такие процессы деформирования, в которых отсутствуют деформации ползучести. В этом случае функциональная зависимость (10) превращается в функцию – в семейство мгновенных термомеханических поверхностей  $S = F^*(\Gamma, \Gamma_p, T)$ . Некоторые результаты экспериментального исследования закономерностей поведения материала при повторном деформировании на цилиндрических образцах из стали Х18Н10Т изложены в работе [9], где приведены зависимости модулей упругости и коэффициента Пуассона при разгрузке от величины предварительной пластической деформации. Там же оценен прямой эффект Баушингера в зависимости от пластической деформации и приведены некоторые диаграммы повторного деформирования после предварительного деформирования. Опыты показывают, что в этом случае для конкретизации зависимости  $S - \Gamma - \Gamma_p - T$  достаточно знать диаграммы активного нагружения образцов  $\sigma - \varepsilon$  и значения предела текучести  $\sigma_T^-$  при сжатии после предварительного растяжения в зависимости от достигнутой пластической деформации  $\varepsilon_p$  при различных значениях температуры (или при первоначальном сжатии и последующем растяжении). При этом предел текучести при сжатии для многих материалов оказывается на 10 – 15% процентов ниже, чем при растяжении. Это различие во многом определяется предварительной пластической деформацией.

Процесс деформирования элемента тела можно условно разделить на два этапа: активный процесс деформирования при росте пластических деформаций и процесс разгрузки, когда пластические деформации остаются постоянными (упругая разгрузка), или процесс деформирования, когда пластические деформации уменьшаются.

При активном процессе деформирования из естественного ненапряженного состояния  $\Delta_k \Gamma_p$  определяется с использованием первоначальных диаграмм, которые имеют вид  $S = \Phi(\Gamma, T)$ . Методика определения по этим диаграммам приращения интенсивности неупругих деформаций сдвига подробно описана в работах [3, 19]. При разгрузке элемента тела и нагружении его нагрузкой обратного знака в области изменения пластических деформаций зависимость  $S$  от  $\Gamma, T$  можно представить в виде

$$S = S_T^+ - S_T^- - \Phi \left( \Gamma^* + \frac{S_T^+ - S_T^-}{2G(T)}, T \right), \quad (12)$$

где  $S_T = S_T^+ = \sigma_T^+ / \sqrt{3}$  – интенсивность касательных напряжений, соответствующая пределу текучести материала при одноосном растяжении;  $S_T^- = \sigma_T^- / \sqrt{3}$  – интенсивность касательных напряжений, соответствующая пределу текучести материала при сжатии после предварительного растяжения до значения пластической деформации  $\varepsilon_p^{(1)}$  в момент разгрузки элемента тела  $\Gamma_p^{(1)} = \sqrt{3} \varepsilon_p^{(1)} / 2$ ;  $\Gamma^* = [(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(p)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(p)}) / 2]^{1/2}$  – интенсивность деформаций сдвига, а  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  – значения компонент пластической деформаций в момент начала разгрузки.

Во многих случаях при исследовании напряженного состояния элементов конструкций из конкретных материалов отсутствуют эксперименты о зависимости пределов текучести от пластической деформации. В этом случае для описания разгрузки и процесса нагружения элементов тела нагрузкой противоположного знака используется одно из следующих модельных представлений о поведении материала: упругая разгрузка; изотропное упрочнение; идеальный эффект Баушингера и др.

При упругой разгрузке

$$S = 2G(\Gamma_p^{(1)}, T) (\Gamma - \Gamma_p^{(1)}). \quad (13)$$

В соответствии с моделью изотропного упрочнения при разгрузке и нагружении нагрузкой обратного знака

$$S = S_T - S^{(1)} - \Phi \left( \Gamma^* + \frac{S_T - S^{(1)}}{2G(T)}, T \right), \quad (14)$$

где  $S^{(1)}$  – интенсивность касательных напряжений, соответствующих пластической деформации (9) в момент разгрузки.

В случае, когда материал при разгрузке и нагружении нагрузкой противоположного знака подчиняется идеальному эффекту Баушингера

$$S = S^{(1)} - S_T - \Phi \left( \Gamma^* + \frac{S^{(1)} - S_T}{2G(T)}, T \right). \quad (15)$$

Как показали эксперименты [9], рассмотренные модели поведения материала охватывают диапазон, в котором лежат кривые разгрузки и повторного нагружения большинства материалов. Это позволяет путем серии расчетов дать оценку НДС элементов конструкций, соответствующего реальным кривым с учетом разгрузки и нагружении нагрузкой противоположного знака.

Учитывая форму рассматриваемых тел, при решении трехмерных задач для тел вращения используем полуаналитический метод конечных элементов [3, 6, 13 и др.], в котором решение ищется в виде рядов

$$T(z, r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{T}_m(z, r, t) \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{T}_m^-(z, r, t) \sin m\varphi; \quad (16)$$

$$u_z(z, r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_z^{-(m)}(z, r, t) \cos m\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} u_z^{=(m)}(z, r, t) \sin m\varphi \quad (z, r);$$

$$u_\varphi(z, r, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_\varphi^{-(m)}(z, r, t) \sin m\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_\varphi^{(m)}(z, r, t) \cos m\varphi, \quad (17)$$

коэффициенты которых определяются на основе соответствующих вариационных уравнений (1) – (3) с привлечением конечных элементов в меридиональном сечении тела.

При таком подходе трехмерная задача для тел вращения может быть сведена к решению ряда двумерных вариационных задач относительно неизвестных значений коэффициентов в рядах (16), (17).

Для этого в случае решения задачи теплопроводности необходимо представить входящие в вариационное уравнение (1) коэффициенты теплопроводности  $\lambda_{ij}$  в виде  $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^0 (1 - \omega_{ij}^T)$  и предположить, что в некоторый фиксированный момент времени коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ , температура окружающей среды  $\theta$ , приведенные тепловые потоки  $q_z, q_r, q_\varphi$  в соответствующих направлениях, а также произведение  $c\rho$  являются известными функциями координат и не варьируются. Используя в качестве конечных элементов в меридиональном сечении тела треугольные конечные элементы с линейным законом изменения коэффициентов  $\bar{T}_m, \bar{T}_m^=$  в них, для определения по явной разностной схеме решения задачи теплопроводности коэффициентов  $\bar{T}_m$  в вершинах  $(i, j, k)$  элементов, в которых сторона  $ij$  совпадает с поверхностью тела, получим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{mi}(t + \Delta t) = & \bar{T}_{mi}(t) + \frac{\Delta t}{\sum_{q=1}^M \langle c\rho \rangle_q H_i^{(q)}} \sum_{q=1}^M \left[ A_{ij} \bar{\theta}_{mi}(t + \Delta t) + B_{ij} \bar{\theta}_{mj}(t + \Delta t) - \right. \\
& - (D_{ii} + m^2 N_{ii} + A_{ij}) \bar{T}_{mi}(t) - (D_{ij} + m^2 N_{ij} + B_{ij}) \bar{T}_{mj}(t) - (D_{ik} + m^2 N_{ik}) \bar{T}_{mk}(t) + \\
& \left. + L_i (\bar{q}_z^{*(m)}(t) - \bar{q}_{z\varphi}^{*(m)}(t))_i + P_i (\bar{q}_r^{*(m)}(t) - \bar{q}_{r\varphi}^{*(m)}(t))_i - m R_i \bar{q}_\varphi^{*(m)}(t) \right]_q \quad (i = 1, 2, \dots, N),
\end{aligned} \quad (18)$$

позволяющие вычислить соответствующие значения коэффициентов  $\bar{T}_m$  в момент времени  $t + \Delta t$  через их значения в момент  $t$ , а в случае решения задачи по неявной разностной схеме – систему уравнений

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=1}^M \left[ (D_{ii} + m^2 N_{ii} + \frac{1}{\Delta t} \langle c\rho \rangle H_i + A_{ij}) \bar{T}_{mi}(t + \Delta t) + (D_{ij} + m^2 N_{ij} + B_{ij}) \bar{T}_{mj}(t + \Delta t) + \right. \\
& \left. + (D_{ik} + m^2 N_{ik}) \bar{T}_{mk}(t + \Delta t) \right]_q = \\
& = \sum_{q=1}^M \left[ \frac{1}{\Delta t} \langle c\rho \rangle H_i \bar{T}_{mi}(t) + A_{ij} \bar{\theta}_{mi}(t + \Delta t) + B_{ij} \bar{\theta}_{mj}(t + \Delta t) + \right. \\
& \left. + L_i (\bar{q}_z^{*(m)}(t) - \bar{q}_{z\varphi}^{*(m)}(t))_i + P_i (\bar{q}_r^{*(m)}(t) - \bar{q}_{r\varphi}^{*(m)}(t))_i - m R_i \bar{q}_\varphi^{*(m)}(t) \right]_q \quad (i = 1, 2, \dots, N).
\end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $m$  – номер гармоники;  $N$  – количество узловых точек;  $M$  – количество треугольных элементов в меридиональном сечении тела;  $q$  – номер треугольного элемента;  $\bar{\theta}_{mi}$ ,  $\bar{\theta}_{mj}$ ,  $\bar{q}_i^{*(m)}$ ,  $\bar{q}_{ij}^{*(m)}$  – значения коэффициентов разложения температуры окружающей среды и приведенных тепловых потоков (3) в аналогичные (16) тригонометрические ряды в соответствующих точках рассматриваемого треугольника.

Аналогично, используя подход, подробно описанный в работах [3, 4, 6], для определения коэффициентов  $\bar{u}_\alpha^{(m)}$ ,  $\bar{u}_\alpha^{(m)}$  ( $\alpha = z, r, \varphi$ ) в вершинах ( $i, j, k$ ) треугольных элементов  $q$  меридионального сечения тела в тригонометрических рядах (17) в каждом приближении получаем систему  $3N$  линейных алгебраических уравнений для каждой гармоники в отдельности:

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=1}^M (B_{zp}^{zi(q)} \bar{u}_{zp} + B_{rp}^{zi(q)} \bar{u}_{rp} + B_{\varphi p}^{zi(q)} \bar{u}_{\varphi p}) = D_{zi} ; \\
& \sum_{q=1}^M (B_{zp}^{ri(q)} \bar{u}_{zp} + B_{rp}^{ri(q)} \bar{u}_{rp} + B_{\varphi p}^{ri(q)} \bar{u}_{\varphi p}) = D_{ri} ; \\
& \sum_{q=1}^M (B_{zp}^{\varphi i(q)} \bar{u}_{zp} + B_{rp}^{\varphi i(q)} \bar{u}_{rp} + B_{\varphi p}^{\varphi i(q)} \bar{u}_{\varphi p}) = D_{\varphi i} \quad (p = i, j, k), < i = 1, 2, \dots, N > .
\end{aligned} \quad (20)$$

Таких систем будет столько, сколько членов сохраняется в решении. Элементы матрицы этих систем вычисляются через значения коэффициентов физических уравнений и координаты вершин элементов в меридиональной плоскости, а правая часть системы – через амплитудные значения дополнительных напряжений  $\sigma_{ij}^*$ , а также объемных и поверхностных нагрузок в соответствующих точках меридионального сечения.

Для отдельного треугольного элемента с вершинами  $i, j, k$  выражения для коэффициентов, входящих в (18) – (20), приведены в работах [3, 6, 19 и др.].

Коэффициенты  $\bar{T}_m, \bar{u}_i^{(m)}$  определяются аналогичными выражениями, в которых  $m$  необходимо заменить на  $-m$ , а все величины с чертой на соответствующие им значения с двумя и наоборот.

Зная  $\bar{T}_m, \vec{T}_m$  и  $\bar{u}_i^{(m)}, \vec{u}_i^{(m)}$  во всех точках конечно элементной разбивки меридионального сечения тела, значения температуры и компоненты перемещений в теле определяются путем вычисления тригонометрических рядов (16), (17). Затем вычисляются компоненты деформаций и напряжений в каждом приближении для рассматриваемого момента времени. Количество необходимых приближений определяется из условия, что в двух последовательных решениях относительное изменение НДС оказывалось меньше заданного параметра.

## 2. Числовые результаты расчетов.

Для оценки влияния различных подходов к построению диаграмм поведения материала при разгрузке исследуем НДС толстостенного цилиндра [15], половина меридионального сечения которого показана на рис. 1.

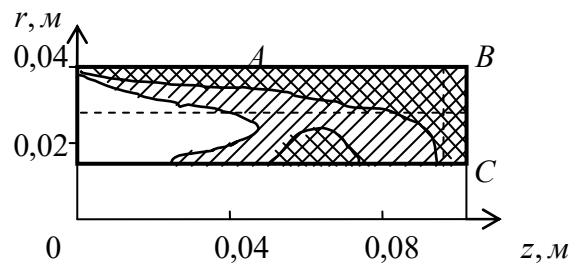


Рис. 1

На торце  $z = 0$  реализуется условие шарнирного опирания:  $t_{nr} = 0, w = 0$  и он является теплоизолированным:  $\partial T / \partial z = 0$ . В начальный момент времени цилиндр находится в ненапряженном состоянии при  $T = 293$  К. Процесс нагружения и нагрева состоит из двух этапов. На первом этапе на части поверхности АВС цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой температуры  $\theta_1$ . Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  изменяется линейно от значения  $\alpha = 1,0$  Вт/(см<sup>2</sup> · К) в точке В до значения  $\alpha = 0$  в точках А и С. Остальная часть цилиндра теплоизолирована. На втором этапе происходит охлаждение цилиндра (температура среды полагается значительно меньше первоначальной при тех же значениях коэффициента теплоотдачи на поверхностях) и на части торцевой поверхности прикладывается нагрузка  $t_{nz} = -5$  МПа.

На рис. 2 приведены графики изменения относительной температуры  $T/\theta_1$  по радиусу цилиндра при  $z = 9,25$  см (рис. 2, а) и по длине цилиндра при  $r = 3,25$  см (рис. 2, б). Анализ этих кривых показывает, что при нагреве цилиндра (кривые 1) возникают большие градиенты температуры как в радиальном, так и в осевом направлениях. Проведенные расчеты НДС цилиндра с использованием идеального эффекта Баушингера при разгрузке показали, что неравномерный нагрев на первом этапе приводит к развитию пластических деформаций в большей части объема цилиндра, отмеченной штриховкой на рис. 1. На втором этапе после прекращения первоначального нагружения и нагрева при охлаждении и приложении на части торца растягивающей осевой нагрузки возникает область, где начинается разгрузка с возникновением вторичных пластических деформаций (на рис. 1 эта область показана двойной штриховкой).



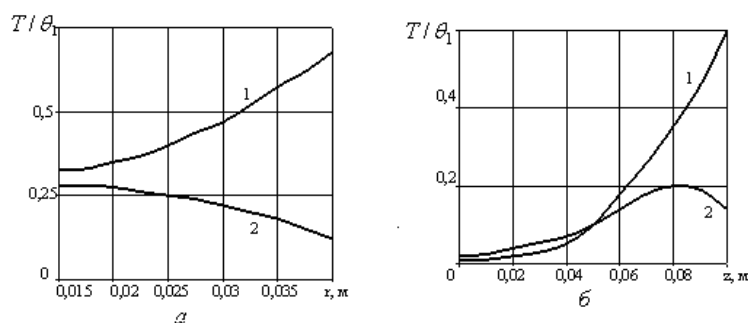


Рис. 2

Напряженное состояние цилиндра при различных предположениях о поведении материала при разгрузке проанализируем в сечении  $z = 9,25\text{см}$ . Результаты расчета, соответствующие концу второго этапа нагружения, показаны на рис. 3 в виде графиков изменения в радиальном направлении осевой  $\sigma_{zz}$  (рис. 3, а) и окружной  $\sigma_{\varphi\varphi}$  (рис. 3, б) компонент напряжений. Кривые 1 на рисунке соответствуют расчету с учетом идеального эффекта Баушингера при разгрузке (15), кривые 2 – модели изотропного упрочнения (14), а кривые 3 – модели упругой разгрузки (13) без учета возникновения вторичных пластических деформаций. Сопоставление этих кривых показывает, что учет вторичных пластических деформаций приводит к существенному перераспределению компонентов напряжений по сравнению с результатами расчета без учета возможного возникновения вторичных пластических деформаций. Это перераспределение напряжений привело к значительному снижению максимальных растягивающих осевых  $\sigma_{zz}$  и окружных  $\sigma_{\varphi\varphi}$  напряжений вблизи внешней поверхности цилиндра.

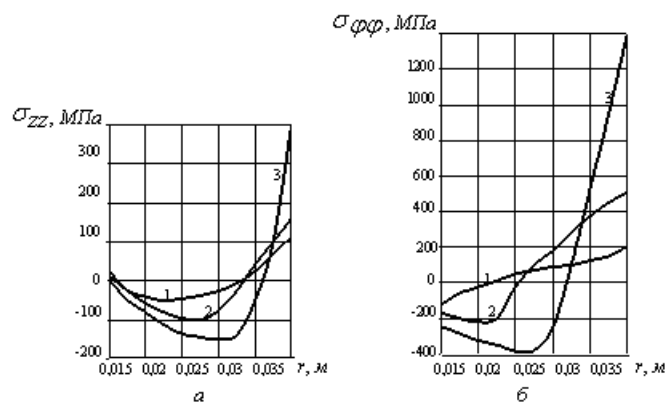


Рис. 3

Из приведенных результатов также следует, что уровень максимальных напряжений падает при переходе от модели разгрузки без учета возникновения вторичных пластических деформаций к модели изотропного упрочнения, а наиболее низкий уровень дает расчет при идеальном эффекте Баушингера. При этом значения вторичных пластических деформаций возрастают в том же порядке. Поскольку [9] истинная диаграмма разгрузки в повторного нагружения лежит между кривыми, соответствующими изотропному упрочнению и идеальному эффекту Баушингера, то расчеты НДС исследуемого элемента конструкции по этим двум моделям определяют тот диапазон, в котором будут находиться значения компонентов напряжений, соответствующие реальным диаграммам.

В качестве примера рассмотрим термонапряженное состояние тела вращения, половина меридионального сечения и схема нагружения которого показана на рис. 4. Тело состоит из двух цилиндров, изготовленных из сплава ЭИ-437, и соединяющей их

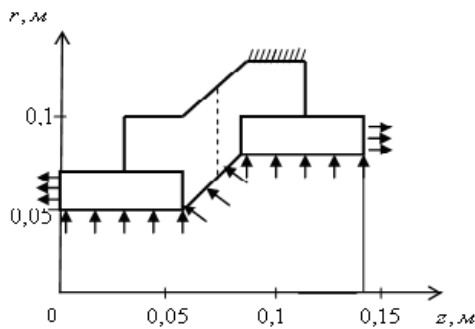


Рис. 4

сти приложено давление  $P=10$  МПа, на торцах приложена распределенная нагрузка  $t_{nz}=-10,42$  МПа и  $t_{nz}=17,78$  МПа, соответственно, слева и справа. В интервале времени от 60 с до 300 с осуществлялось охлаждение ( $\alpha = 293$  К,  $\alpha = 0,3$  Вт/(см<sup>2</sup> К)) при отсутствии силового воздействия. На части внешней поверхности тело закреплено, т.е. компоненты перемещений полагаются равными нулю. Остальные части поверхности свободны от нагрузок и теплообмен с окружающей средой на них отсутствует.

Для построения диаграммы переменного деформирования предполагалось, что материалы рассматриваемого элемента конструкции обладают идеальным эффектом Баушингера. Весь исследуемый процесс разбивался на этапы моментами времени 5 с, 30 с, 45 с, 60 с, 65 с, 90 с, 120 с, 300 с и задача теплопроводности решалась как по явной разностной схеме, так и по неявной. До момента времени  $t = 65$  с при решении использовалась явная разностная схема, далее – неявная схема.

Результаты решения задачи приведены на рис. 5 – 7.

На рис. 5 приведены графики распределения температуры по радиусу в показанном на рис. 4 сечении при  $z = 0,0788$  м в процессе нагрева (кривая 1 – при  $t = 30$  с, кривая 2 – при  $t = 60$  с), а также при охлаждении (кривая 3 – при  $t = 120$  с, а кривая 4 – при  $t = 300$  с). На этих рисунках можно оценить изменение градиента температуры в процессе нагрева и охлаждения.

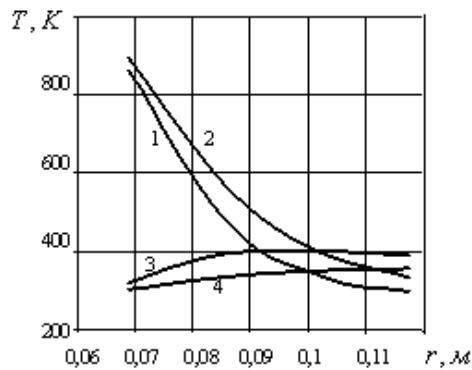


Рис. 5

часть меридионального сечения, где развиваются вторичные пластические деформации при разгрузке, зачернена. Из рисунка видно, что значительная часть объема материала перешла в пластическое состояние. К концу нагрева и нагружения (до 60 с) область пластического деформирования увеличилась, а часть ее перешла в состояние «упругой разгрузки». В процессе охлаждения при снятых нагрузках (до 300 с) возникает область, где развились вторичные пластические деформации и увеличились зоны упругой разгрузки. Следует отметить, что при охлаждении часть области упругой разгрузки переходит в состояние повторного пластического деформирования.

втулки из сплава ЭИ-395. Необходимые для расчета значения теплофизических и механических характеристик материалов можно найти в работах [1, 5].

Этот элемент конструкции подвергается следующему тепловому и силовому воздействию. На протяжении первых 60 с на внутренней поверхности элемента происходит нагрев за счет теплообмена с внешней средой, имеющей температуру  $\theta = 973$  К, с коэффициентом теплообмена  $\alpha = 0,5$  Вт/(см<sup>2</sup> К). На этой же поверхности

Развитие зон неупругого деформирования в процессе нагрева и охлаждения для моментов времени  $t = 30$  с, 60 с, 120 с и 300 с схематически показано на рис. 6. На этих рисунках одинарной штриховкой показана область, где происходит активный процесс нагружения; двойной штриховкой – область, где после первоначального пластического деформирования изменилось направление процесса, но неупругие деформации при этом не изменились, т. е. происходит упругая разгрузка;

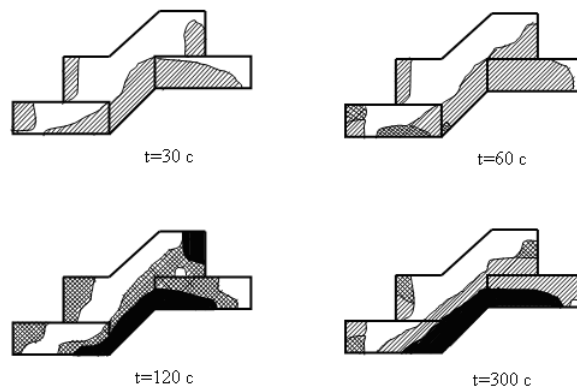


Рис. 6

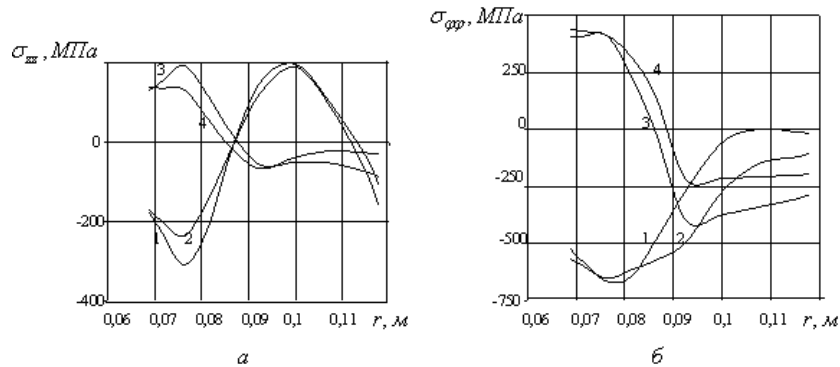


Рис. 7

На рис. 7 показано изменение осевых  $\sigma_{zz}$  (рис.7, а) и окружных  $\sigma_{\phi\phi}$  (рис.7, б) компонентов напряжений по радиусу при  $r = 0,0788$  м для разных моментов времени:  $t = 30$  с (кривая 1),  $t = 60$  с (кривая 2),  $t = 120$  с (кривая 3) и  $t = 300$  с (кривая 4). Из рисунков следует, что к моменту окончания процесса охлаждения в рассматриваемом элементе сохраняется высокий уровень напряжений, хотя силовая нагрузка отсутствует, а градиенты и уровни температуры малы. Это объясняется тем, что к моменту изменения направления процесса деформирования была накоплена существенная пластическая деформация, которая вызывает существенные остаточные напряжения. Это наглядно указывает на необходимость учета истории нагружения при исследовании напряженного состояния в элементах конструкций при переменных процессах нагружения, вызывающих пластические деформации.

#### Заключение.

В работе предложена методика исследования неосесимметричного термонапряженного состояния осесимметричных тел в процессах сложного неизотермического нагружения, позволяющая учесть возникновение пластических деформаций противоположного знака первоначальному. При отсутствии экспериментальных диаграмм нагружения образцов, их разгрузки и повторного нагружения нагрузкой противоположного знака первоначальному напряженное состояние исследуемого элемента тела определяется путем введения некоторых модельных представлений о поведении материала при разгрузке: упругая разгрузка, изотропное упрочнение или идеальный эффект Баушингера. На конкретном примере проиллюстрировано изменение результатов решения задачи в зависимости от используемой модели поведения материала при разгрузке. Расчеты с использованием двух последних моделей определяют тот диапазон, в котором будут находиться истинные значения компонентов напряжений.

РЕЗЮМЕ. Проведено чисельне дослідження неосесиметричного пружнопластичного напружено-деформованого стану тіл обертання при неізотермічних складних процесах навантаження з врахуванням вторинних пластичних деформацій. Це дослідження базується на визначальних рівняннях теорії процесів малої кривизни та методі скінчених елементів. Використано моделі пружного розвантаження, ідеального ефекту Баушінгера і ізотропного зміцнення. Вплив використання різних моделей розвантаження проілюстровано на числових прикладах.

1. *Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И.* и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – М.: Машиностроение, 1965 – 568 с.
2. *Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В.* и др. Термопрочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1975. – 456 с.
3. *Григоренко Я.М., Шевченко Ю.Н.* и др. Механика композитов: В 12-ти т / Под общ. ред. А.Н.Гузя. Т.11. Численные методы. – К.: «А.С.К.», 2002. – 448 с.
4. *Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Савченко В.Г.* Пространственные задачи термопластичности. – К.: Наук. думка, 1980. – 264 с.
5. *Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г.* Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328 с.
6. *Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г.* Термовязкопластичность: Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т. – К.: Наук. думка, 1987. – Т. 2. – 264 с.
7. *Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г., Ищенко Д.А.* Методические рекомендации «Метод и программа расчета на ЭВМ нестационарной теплопроводности и упругопластического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций типа тел вращения при осесимметричных силовых и тепловых нагрузках». – К.: Ин-т механики АН УССР, 1988. – 42 с.
8. *Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г., Ищенко Д.А., Павлычко В.М.* Расчеты и испытания на прочность. Метод и пакет прикладных программ расчета на ЭВМ нестационарной теплопроводности и упругопластического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций типа тел вращения при осесимметричных силовых и тепловых нагрузках: Рекомендации Р 54-284-90. – М.: ВНИИММАШ, 1990. – 58 с.
9. *Babeshko M.E, Savchenko V.G.* Axisymmetric Elastoplastic State of Compound Shells Subject to Thermal and Mechanical Loading and Radiation Exposure // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 4. – P. 368 – 373.
10. *Babeshko M.E, Savchenko V.G.* To Analysis of Processes of Non-Isothermal Loading the Shells of Revolution with Allowance for the Repeated Plastic Strains // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 6. – P. 539 – 646.
11. *Babeshko M.E, Savchenko V.G.* On Allowance for the Third Invariant of Stress Deviator in Analysis of Processes of Deformation of Thin Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – P. 163 – 171.
12. *Babeshko M.E., Stryuk V.K.* Calculating the Stress State of a Solid Cylinder on the Basis of the Theory of Flow with Isotropic Hardening // *Sov. Appl. Mech.* – 1974. – **10**, N 6. – P.587 – 591.
13. *Bazhenov V.A., Vabishchevich M.O., Solodei I.I., Cherupnaya E.A.* Semianalytic Finite-Element Method in Dynamic Problems of Linear Fracture Mechanics // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 5. – P. 519 – 530.
14. *Hencky H.* Zur Theorie der plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen // *ZAMM.* – 1924. – **4**, N 4. – P. 323 – 334.
15. *Ishchenko D.A., Savchenko V.G.* Influence of Taking Account of Secondary Plastic Deformations on the Solution of the Axisymmetric Thermoplasticity Problem // *Sov. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 3. – P. 229 – 233.
16. *Prandtl L.* Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz uber das plastische Gleichgewicht // *ZAMM.* – 1923. – **3**, N 6. – P. 401 – 406.
17. *Reuss A.* Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie // *ZAMM.* – 1930. – **10**, N 3. – P. 266 – 274.
18. *Savchenko V.G., Babeshko M.E.* Thermostressed State of Layered Bodies of Revolution Damaging under Deformation // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 3. – P. 287 – 305.
19. *Shevchenko Yu.N., Savchenko V.G.* Three-Dimensional Problems of Thermoviscoplasticity: Focus on Ukrainian Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 3. – P. 217 – 271.
20. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Pigol' O.V.* Elastoplastic State of an Elliptical Cylindrical Shell with a Circular Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 6. – P. 647 – 654.
21. *Zyczkowski M.* Combined Loadings in the Theory of Plasticity. – PWN – Polish Scientific Publishers, 1981. – 714 p.

Поступила 26.04. 2018

Утверждена в печать 05.03.2019