

И. Ю. Хома¹, Т. М. Прошенко²

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ЗАДАННОЙ РАСЩЕПЛЯЮЩЕЙ СИЛЕ НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: reolog@intech.kiev.ua;

²Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
просп. Академика Глушкова, 4г, 03127, Киев, Украина;
e-mail: t.proshchenko@gmail.com

Abstract. A solution of the stress state problem for an infinite transversely isotropic plate with curved (not circular) hole is obtained. The method of expanding the unknown functions into Fourier series of Legendre polynomials together with the boundary-shape perturbation method is used. On the hole boundary surface, the value of an equilibrated pair of forces tending to split or compress the plate along the median plane is given. The stress state of plate with the square and triangular holes is analyzed.

Key words: transversely isotropic plate, stress state, curved hole, elliptical hole, square hole, triangular hole.

Введение.

Вопросу концентрации напряжений около отверстий, полостей и включений уделяется достаточно внимания [3, 6, 7, 15]. Для решения краевых задач привлекаются разные подходы и способы. Используются численные методы конечноэлементной дискретизации области рассматриваемого тела [8, 11, 16, 17]. Одним из эффективных аналитических методов является метод разложения искомых функций в ряды по ортогональной системе базисных функций [10, 12 – 14]. В работе [5] методом разложения компонент вектора перемещений и тензора напряжений в ряды Фурье по полиномам Лежандра найдено решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пластины с круговым отверстием, на поверхности которой задано значение расщепляющей силы. Под расщепляющей силой подразумевается уравновешенная по толщине пара сил, стремящихся расщепить или сжать пластину по срединной плоскости [1].

В данной работе приведенным в [5] способом совместно с методом возмущения формы границы [2] излагается решение задачи по определению напряженного состояния трансверсально-изотропной пластины, ослабленной криволинейным отверстием. Приводится численный анализ распределения напряжений около квадратного и треугольного с закругленными углами отверстий.

§1. Постановка задачи и метод решения.

Предположим, что трансверсально-изотропная пластина толщиной $2h$ ($h = \text{const}$) отнесена к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$), причем x_1, x_2 принадлежат срединной плоскости S , совпадающей с плоскостью изотропии, а $x_3 \in [-h, h]$. Как трехмерное тело, пластина ослаблена некруговой цилиндрической полостью $L \times [-h, h]$,

кривая L которой незначительно отличается от окружности радиуса R . На поверхности полости $\partial\Omega = L \times [-h, h]$ задано значение уравновешенной пары сил, стремящейся расщепить или сжать пластину по срединной плоскости S (рис. 1).

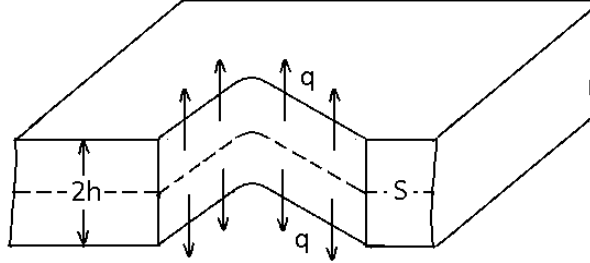


Рис. 1

Для решения задачи воспользуемся методом разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра [9, 12] совместно с методом возмущения формы границы [2]. Представим компоненты вектора перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\xi)$ координаты толщины

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in S$, $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1; 1]$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений, именуемые ниже моментами (номер момента соответствует порядку полинома Лежандра); N – натуральное число, которое примем четным ($n = 0, 1, \dots, < \infty$).

Относительно составляющих данного разложения получаем при симметричном деформировании пластины по отношению к S систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \partial_z (\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)}) + \partial_{\bar{z}} (\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}) - (4k+1)h^{-1} \sum_{s=1}^k \sigma_+^{(2s-1)} &= 0 \quad (k = \overline{0, n}); \\ \partial_z \sigma_+^{(2k-1)} + \partial_{\bar{z}} \bar{\sigma}_+^{(2k-1)} - (4k-1)h^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_{33}^{(2s)} &= 0 \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

и соотношения упругости

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2 \left[(c_{12} + c_{66}) e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} c_{13} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)} \right]; \\ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= 4c_{66} \partial_{\bar{z}} u_+^{(2k)}; \\ \sigma_{33}^{(2k)} &= c_{13} e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} c_{33} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)} \quad (k = \overline{0, n}); \\ \sigma_+^{(2k-1)} &= c_{44} \left[2\partial_{\bar{z}} u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1} \sum_{s=k}^n u_+^{(2s)} \right] \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$; $\sigma_+^{(2k-1)} = \sigma_{13}^{(2k-1)} + i\sigma_{23}^{(2k-1)}$; $u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)}$; $e^{(2k)} = \partial_z u_+^{(2k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k)}$; $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – упругие постоянные.

Подставляя выражения (1.3) в равенство (1.2), получаем систему уравнений

$$c_{66} \Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66}) \partial_{\bar{z}} e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} \sum_{s=1}^n (2\lambda_{2s-1}^{(k)} \partial_z u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} \beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)}) = 0 \quad (k = \overline{0, n});$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1} \sum_{s=0}^n \left(\lambda_{2s}^{(2k)} e^{(2s)} - c_{33} h^{-1} \alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)} \right) = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.4)$$

Здесь $\Delta = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$ – оператор Лапласа;

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \leq s \leq k; \\ c_{13}, & k < s \leq n; \end{cases} \quad \lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 0 \leq s < k; \\ c_{44}, & k \leq s \leq n; \end{cases}$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}, \beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютные константы вида

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k-1), & k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & -1 \leq s \leq k; \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

Общее аналитическое решение системы (1.4) определяется формулами [12]

$$\begin{aligned} c_{66} u_+^{(0)} &= \chi^* \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_l; \\ c_{66} u_+^{(2)} &= \chi_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s; \\ c_{66} u_+^{(2k)} &= h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}); \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$c_{66} u_3^{(1)} = -\chi_1^* h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{l=1}^{2n} c_l^{(1)} V_l; \quad c_{66} u_3^{(2k-1)} = \sum_{l=1}^{2n} c_l^{(2k-1)} V_l \quad (k = \overline{2, n}),$$

где $\varphi(z), \psi(z)$ – произвольные голоморфные функции комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$; V_l и W_s – метатармонические функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta V_l - k_l h^{-2} V_l = 0; \quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0; \quad (1.6)$$

$a_l^{(2k)}, b_s^{(2k)}, c_l^{(2k-1)}$ – безразмерные константы;

$$\chi^* = 1 + \frac{2c_{66}}{c_1 c_{11}}; \quad \chi_1^* = \frac{2c_{13} c_{66}}{c_1 c_{11} c_{33}}; \quad \chi_2^* = \frac{4c_{13} c_{66}}{3c_1 c_{11} c_{33}}; \quad c = 1 - \frac{c_{13}^2}{c_{11} c_{33}}; \quad c_1 = c - \frac{c_{66}}{c_{11}}.$$

Согласно (1.5) соотношения (1.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} &= 4 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(0)} V_l; \quad \sigma_{33}^{(0)} = h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(0)} V_l; \\ \sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} &= -4 \left[z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \right] + 4h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l; \\ \sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}^{(2)} + 2i\sigma_{12}^{(2)} &= 4\chi_2^* h^2 \overline{\varphi'''(z)} + 4h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l + 4ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s; \\ \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(2k)} V_l; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(2k)} V_l \quad (k = \overline{1, n}); \\ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= 4h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l + 4ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \quad (k = \overline{2, n}); \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\sigma_+^{(2k-1)} = 2 \sum_{l=1}^{2n} p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_l + 2i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{1, n}).$$

Из равенств (1.7) получаем выражения для граничных условий при решении внутренней и внешней краевых задач, т. е.

$$\begin{aligned} 2(\sigma_{ll}^{(2k)} + i\sigma_{ls}^{(2k)}) &= \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} - (\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{12}^{(2k)}) \left(\frac{d\bar{z}}{ds} \right)^2 \quad (k = \overline{0, n}); \\ \sigma_{lk}^{(2k-1)} &= -\operatorname{Im} \left(\sigma_+^{(2k-1)} \frac{d\bar{z}}{ds} \right) \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

В самом деле, если на поверхности $\partial\Omega_l = \partial S_l \times [-h, h]$ с внешней нормалью \vec{l} задан вектор напряжений $\vec{P}_l = \sigma_{ll}\vec{l} + \sigma_{ls}\vec{s} + \sigma_{ln}\vec{n}$, где \vec{s} – орт касательной кривой ∂S_l и $\vec{n} = \vec{l} \times \vec{s}$, то по формуле

$$\vec{P}_l^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{h} \int_{-h}^h \vec{P}_l P_k(\xi) dx_3$$

определяем граничные значения всех моментов вектора напряжений \vec{P}_l . Таким образом, согласно (1.1) имеем

$$\vec{P}_l = \sum_{k=0}^N \vec{P}_l^{(k)} P_k(\xi) = \sum_{k=0}^N (\sigma_{ll}^{(k)} \vec{l} + \sigma_{ls}^{(k)} \vec{s} + \sigma_{ln}^{(k)} \vec{n}) P_k(\xi). \quad (1.9)$$

Для приближения $N = 1$ ($n = 0$) коэффициенты разложения в ряд (1.9) имеют определенный физический смысл. Введем при этом такие обозначения:

$$2h(\sigma_{ll}^{(0)}, \sigma_{ls}^{(0)}, \sigma_{ln}^{(0)}) = (T_{ll}, T_{ls}, Q_l); \quad \frac{2h^2}{3}(\sigma_{ll}^{(1)}, \sigma_{ls}^{(1)}, \sigma_{ln}^{(1)}) = (M_{ll}, M_{ls}, S_l), \quad (1.10)$$

где T_{ll} , T_{ls} – нормальные и касательные усилия; Q_l – перерезывающая сила; M_{ll} , M_{ls} – крутящий и изгибающий моменты; величина S_l имеет смысл решающей силы [1].

Согласно (1.9) на поверхности $\partial\Omega_l$ вдоль образующей действует сила

$$h\sigma_{ln} = \frac{1}{2}Q_l + \frac{3}{2h}P_1(\xi)S_l. \quad (1.11)$$

Очевидно, второе слагаемое этой суммы представляет собой кососимметричную нагрузку относительно плоскости S . При $S_l > 0$ эта пара сил стремится расщепить пластину по срединной плоскости. Отмечается [1], что этот термин употребляется и в случае, когда уравновешенная пара сил вызывает поперечное сжатие пластины. Для произвольного приближения $N = 2n$ кососимметричная составляющая внешней нагрузки имеет вид

$$\sigma_{ln} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ln}^{(2k-1)}(x) P_{2k-1}(\xi).$$

В полярной системе координат r , θ моменты напряжений определяем согласно формулам преобразования

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} &= e^{-2i\theta} (\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)}); \\ \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} &= \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}; \quad \sigma_{r3}^{(2k-1)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} = e^{-i\theta} \sigma_+^{(2k-1)}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Отсюда получаем выражения для граничных условий

$$2(\sigma_{rr}^{(2k)} + i\sigma_{r\theta}^{(2k)}) = \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} + e^{-2i\theta} (\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)}); \quad (1.13)$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)} = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \sigma_+^{(2k-1)}).$$

Принимая во внимание равенство $d\bar{z}/ds = -ie^{-i\theta}$, непосредственной проверкой убеждаемся, что из (1.8) следуют условия (1.13).

§2. Трансверсально-изотропная пластина с криволинейным отверстием.

Пусть пластина, как трехмерное тело, ослаблена некруговой цилиндрической полостью $L \times [-h, h]$, контур L которой на плоскости S незначительно отличается от окружности радиуса R и описывается уравнениями [4]

$$x_1 = R(\cos \vartheta + \varepsilon \cos m\vartheta); \quad x_2 = R(\sin \vartheta - \varepsilon \sin m\vartheta), \quad (2.1)$$

где m – целое положительное число; ε – малый параметр. При определенных значениях m и ε получим на S отверстие соответствующей формы: эллиптическое, треугольное и квадратное с закругленными углами. Функция, конформно отображающая внешнюю область единичного круга на бесконечную область, ограниченную кривой (2.1), задается формулой

$$z = x + iy = R^{-1}\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta). \quad (2.2)$$

Здесь $x = x_1/R$; $y = x_2/R$; $z = re^{i\theta}$; $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$; $f(\zeta) = \zeta^{-m}$; x и y – безразмерные декартовы координаты; ρ и ϑ – ортогональные криволинейные координаты.

Так как криволинейная система координат (ρ, ϑ, ξ) повернута на некоторый угол β вокруг общей оси $\xi = h^{-1}x_3$, то имеют место аналогичные (1.12) формулы преобразования

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)} = e^{2i\beta} (\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)});$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} = \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)}; \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k)} = \sigma_{33}^{(2k)} \quad (k=0, n); \quad (2.3)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1)} = e^{i\beta} (\sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1)}) \quad (k=1, n),$$

где

$$\sigma_{i'j'}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)}(\rho, \vartheta) \quad (i', j' = \rho, \vartheta, \xi); \quad \sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)}(r, \theta) \quad (i, j = r, \theta, 3).$$

Согласно (2.2) связь между переменными r, θ и ρ, ϑ устанавливается равенствами

$$r = R^{-1}|\omega(\zeta)|; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \omega(\zeta)}{\operatorname{Re} \omega(\zeta)}, \quad (2.4)$$

а экспонента $e^{i\beta}$ определяется формулой [4]

$$e^{i\beta} = \frac{\zeta \omega'(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}}{|\zeta| |\omega'(\zeta)| |\omega(\zeta)|}.$$

В криволинейной системе координат краевые условия на границе L области S записываются таким же способом, как и для пластины с круговым отверстием. Так, если на поверхности $L \times [-h, h]$ задано значение уравновешенной пары сил

$\sigma_{\rho\xi} = qR^{-1}\phi(\xi)\omega(\zeta)|_{|\zeta|=1}$, где $q = \text{const}$, $\phi(\xi)$ – нечетная функция, то граничные условия на кривой L имеют вид

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k)}(\rho, \vartheta) + i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)}(\rho, \vartheta)|_{\rho=1} = 0; \quad \sigma_{\rho\vartheta}^{(k,1)}(\rho, \vartheta)|_{\rho=1} = 0 \quad (k = \overline{0, n});$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\rho, \vartheta)|_{\rho=1} = \hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\vartheta),$$

где

$$\hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\vartheta) = qR^{-1}\phi^{(2k-1)}\omega(\zeta)|_{|\zeta|=1} \quad \left(\phi^{(2k-1)} = \left(2k - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} \int_{-h}^h \phi(\xi) P_{2k-1}(\xi) dx_3 \right).$$

Пусть $\phi(\xi) = \xi$ – линейная функция. Тогда

$$\hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(1)}(\vartheta) = qR^{-1}\omega(\zeta)|_{|\zeta|=1}; \quad \hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\vartheta) = 0 \quad (k > 1). \quad (2.5)$$

Если же $\phi(\xi) = \xi(1 - \xi^2)$ – полином третьей степени, то

$$\hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(1)}(\vartheta) = \frac{2}{5}qR^{-1}\omega(\zeta)|_{|\zeta|=1}; \quad \hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(3)}(\vartheta) = -\frac{2}{5}qR^{-1}\omega(\zeta)|_{|\zeta|=1}; \quad \hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\vartheta) = 0 \quad (k > 2). \quad (2.6)$$

Основные уравнения (1.6) в переменных ρ , ϑ с учетом равенств (2.4) сложны и найти их точное решение с разделяющимися переменными не представляется возможным. Поэтому, следуя [2, 4], решение задачи будем искать в виде рядов по положительным степеням малого параметра ε , т.е.

$$\sigma_{ij'}^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^\tau \sigma_{ij'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta); \quad u_{j'}^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^\tau u_{j'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta). \quad (2.7)$$

Пользуясь равенствами (2.3), необходимо и правые их части представить в виде рядов по степеням параметра ε . Из формулы (2.5) находим

$$e^{i\beta} = 1 + i\varepsilon q_1(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{\varepsilon^2}{2} [-q_1^2(\zeta, \bar{\zeta}) + 2iq_2(\zeta, \bar{\zeta})] + \dots,$$

где

$$q_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\rho^2} \text{Im} [\zeta \overline{f(\zeta)} + \zeta \bar{\zeta} f'(\zeta)]; \quad q_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\rho^4} \text{Im} [\bar{\zeta} f^2(\zeta) - \zeta^2 \bar{\zeta}^2 f'^2(\zeta)].$$

Согласно [4] произвольная скалярная функция $\Phi^{(k)}(r, \theta)$ (в частности, компоненты вектора напряжений и вектора перемещений) представляется рядом

$$\Phi^{(k)}(r, \theta) = \sum_{(p)} \varepsilon^p \frac{1}{p!} L_p \Phi^{(k)}(r, \theta), \quad (2.8)$$

в котором L_p – операторы вида

$$L_0 = 1; \quad L_1 = f(\zeta) \partial_\zeta + \overline{f(\zeta)} \partial_{\bar{\zeta}}; \quad L_2 = f^2(\zeta) \partial_\zeta^2 + 2f(\zeta) \overline{f(\zeta)} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} + \overline{f^2(\zeta)} \partial_{\bar{\zeta}}^2, \dots$$

Если учесть, что

$$\partial_\zeta = \frac{1}{2} e^{-i\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right); \quad \partial_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{2} e^{i\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)$$

и $f(\zeta) = \zeta^{-m}$, то функции q_1 и q_2 примут вид

$$q_1(\rho, \vartheta) = \frac{m+1}{\rho^{m+1}} \sin(m+1)\vartheta; \quad q_2(\rho, \vartheta) = \frac{m^2-1}{2\rho^{2(m+1)}} \sin 2(m+1)\vartheta,$$

а операторы L_p ($p=1,2$) запишутся таким образом:

$$L_1 = \frac{1}{\rho^m} \left[\cos(m+1)\vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin(m+1)\vartheta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right];$$

$$L_2 = \frac{1}{2\rho^{2m}} \left\{ [1 - \cos 2(m+1)\vartheta] \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \left[\cos 2(m+1)\vartheta \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \sin 2(m+1)\vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right] \right\}.$$

Из формул (2.4) находим разложение радиуса r

$$r = R^{-1} |\omega(\zeta)| = \rho \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{\rho^{m+1}} \cos(m+1)\vartheta + \frac{\varepsilon^2}{4\rho^{2(m+1)}} [1 - \cos 2(m+1)\vartheta] + \dots \right\}. \quad (2.9)$$

Представим, ссылаясь на (2.19), моменты касательных напряжений $\hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1)}$ на контуре отверстия $\rho=1$ в виде

$$\hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^\tau \hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1,\tau)}(\vartheta); \quad (2.10)$$

где

$$\hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1,0)} = q\phi^{(2k-1)}; \quad \hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1,1)} = q\phi^{(2k-1)} \cos(m+1)\vartheta; \quad \hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1,2)} = \frac{1}{4}q\phi^{(2k-1)} [1 - \cos(m+1)\vartheta], \dots$$

Следует отметить, что члены ряда (2.8) определяются действием операторов L_p на соответствующие функции $\Phi^{(k)}(\rho, \vartheta)$, которые получаются из $\Phi^{(k)}(r, \theta)$ формальной заменой переменных r, θ на ρ, ϑ .

Принимая во внимание разложения (2.5) – (2.7), из равенств (2.3) после некоторых преобразований и сравнения выражений при одинаковых степенях ε , получаем соотношения

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k,\tau)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,\tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_1^{(\tau-j)} \left(\sigma_{rr}^{(2k,j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} \right); \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k,\tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_1^{(\tau-j)} \sigma_{33}^{(2k,j)};$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k,\tau)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,\tau)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k,\tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_2^{(\tau-j)} \left(\sigma_{rr}^{(2k,j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} - 2i\sigma_{\rho\theta}^{(2k,j)} \right); \quad (2.11)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1,\tau)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1,\tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_3^{(\tau-j)} \left(\sigma_{r3}^{(2k-1,j)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1,j)} \right),$$

где Λ_p^l – операторы вида

$$\Lambda_p^{(0)} = 1 \quad (p=1, 2, 3); \quad \Lambda_1^{(1)} = L_1; \quad \Lambda_2^{(1)} = L_1 + 2iq_1; \quad \Lambda_3^{(1)} = L_1 + iq_1;$$

$$\Lambda_1^{(2)} = \frac{1}{2}L_2; \quad \Lambda_2^{(2)} = \frac{1}{2}L_2 - 2q_1^2 + 2i(q_1L_1 + q_2); \quad \Lambda_3^{(2)} = \frac{1}{2}(L_2 - q_1^2) + i(q_1L_1 + q_2).$$

Моменты напряжений $\sigma_{lm}^{(k,j)}$, фигурирующие в правых частях равенств (2.11), записываются, согласно (2.8), на основании их аналитических выражений (1.7), (1.12) в переменных z, \bar{z} формальной заменой последних на переменные $\zeta, \bar{\zeta}$ (или равнозначной заменой переменных r, θ соответственно на ρ, ϑ). Следовательно

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(0,j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0,j)} &= 4 \left[\varphi_j'(\zeta) + \overline{\varphi_j'(\zeta)} \right] + 2h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(0)} V_l^{(j)}; \quad \sigma_{33}^{(0,j)} = h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(0)} V_l^{(j)}; \\ \sigma_{rr}^{(0,j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0,j)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0,j)} &= 4 \left[-\zeta \overline{\varphi_j''(\zeta)} - \overline{\psi_j'(\zeta)} + h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(0)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 V_l^{(j)} \right] e^{-2i\vartheta}; \\ \sigma_{rr}^{(2,j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2,j)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2,j)} &= 4he^{-2i\vartheta} \left[\chi_2^* h \overline{\varphi_j'''(\zeta)} + \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 V_l^{(j)} + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 W_s^{(j)} \right]; \\ \sigma_{rr}^{(2k,j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} &= 2h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(2k)} V_l^{(j)}; \quad \sigma_{33}^{(2k,j)} = h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(2k)} V_l^{(j)} \quad (k=\overline{1,n}); \quad (2.12) \\ \sigma_{rr}^{(2k,j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k,j)} &= 4he^{-2i\vartheta} \left[\sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 V_l^{(j)} + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 W_s^{(j)} \right]; \\ \sigma_{r3}^{(2k-1,j)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1,j)} &= 2e^{-2i\vartheta} \left[\sum_{l=1}^{2n} p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{\zeta}} V_l^{(j)} + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{\zeta}} W_s^{(j)} \right] \quad (k=\overline{1,n}).\end{aligned}$$

Здесь $V_l^{(j)}$ и $W_s^{(j)}$ – метагармонические функции, определяемые равенствами

$$\Delta V_l^{(j)} - k_l h^{-2} V_l^{(j)} = 0; \quad \Delta W_s^{(j)} - \lambda_s h^{-2} W_s^{(j)} = 0,$$

в которых Δ – оператор Лапласа вида

$$\Delta = 4\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

Из соотношений (2.11) для каждого приближения находим выражения для граничных условий. Так, в нулевом приближении, сводящемся к решению осесимметричной задачи для пластины с круговым отверстием, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(2k,0)} = \sigma_{rr}^{(2k,0)}(\rho) \Big|_{\rho=1} &= 0 \quad (k=\overline{0,n}); \\ \sigma_{\rho\zeta}^{(2k-1,0)} = \sigma_{r3}^{(2k-1,0)}(\rho) \Big|_{\rho=1} &= \hat{\sigma}_{\rho\zeta}^{(2k-1,0)}; \quad \sigma_{\rho\zeta}^{(k,1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = 0 \quad (k=\overline{1,n}).\end{aligned} \quad (2.13)$$

В первом приближении граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(2k,1)} = \sigma_{rr}^{(2k,1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} &= -g_{rr}^{(2k,1)}(\vartheta); \\ \sigma_{\rho\vartheta}^{(2k,1)} = \sigma_{r\theta}^{(2k,1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} &= -g_{r\theta}^{(2k,1)}(\vartheta) \quad (k=\overline{0,n}); \\ \sigma_{\rho\zeta}^{(2k-1,1)} = \sigma_{r3}^{(2k-1,1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} &= -g_{r3}^{(2k-1,1)}(\vartheta) \quad (k=\overline{1,n}),\end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$g_{rr}^{(2k,1)} = L_1 \sigma_{rr}^{(2k,0)} + 2q_1 \sigma_{r\theta}^{(2k,0)}; \quad g_{r\theta}^{(2k,1)} = L_1 \sigma_{r\theta}^{(2k,0)} - q_1 (\sigma_{rr}^{(2k,0)} - \hat{\sigma}_{\theta\theta}^{(2k,0)});$$

$$g_{r3}^{(2k-1,1)} = L_1 \sigma_3^{(2k-1,0)} + q_1 \sigma_{\theta 3}^{(2k-1,0)} - \hat{\sigma}_{\rho\xi}^{(2k-1,1)}.$$

Аналогичным способом находим выражения для граничных условий в последующих приближениях.

Для бесконечной пластины, свободной от внешней нагрузки, голоморфные функции $\varphi'_j(\zeta)$ и $\psi'_j(\zeta)$ примем в виде

$$\varphi'_j(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} \zeta^{-n}; \quad \psi'_j(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(j)} \zeta^{-n}, \quad (2.15)$$

где $a_n^{(j)}$, $b_n^{(j)}$ – произвольные постоянные. Вид метагармонических функций $V_l^{(j)}$ и $W_s^{(j)}$ зависит от корней характеристических уравнений, которые могут быть действительными и комплексными. Пусть имеется $2n_1$ ($n_1 \leq n$) вещественных положительных и $2(n - n_1)$ комплексно-сопряженных корней. Тогда имеем

$$V_l^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l,j)} K_n(\rho x_l) e^{in\theta}, \quad l \in [1, 2n_1];$$

$$V_{2l+1}^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(2l+1,j)} H_n^{(1)}(\rho x_{2l+1}) e^{in\theta}; \quad (2.16)$$

$$V_{2l+2}^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(2l+1,j)} H_n^{(2)}(\rho x_{2l+2}) e^{in\theta}, \quad l \in [n_1, n-1].$$

Здесь $B_n^{(l,j)}$, $C_n^{(2l+1,j)}$, $D_n^{(2l+1,j)}$ – постоянные, удовлетворяющие равенствам: $B_{-n}^{(l,j)} = \bar{B}_n^{(l,j)}$, $C_{-n}^{(2l+1,j)} = (-1)^n \bar{D}_n^{(2l+1,j)}$, $D_{-n}^{(2l+1,j)} = (-1)^n \bar{C}_n^{(2l+1,j)}$; $K_n(\rho x_l)$, $H_n^{(1)}(\rho x_{2l+1})$, $H_n^{(2)}(\rho x_{2l+2})$ – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода; $x_l = Rh^{-1} \sqrt{k_l}$, $x_{2l+1} = Rh^{-1} \sqrt{-k_{2l+1}}$, $x_{2l+2} = \bar{x}_{2l+1}$. Аналогичный вид имеют метагармонические функции $W_s^{(j)}$.

Подставляя значения функций (2.15), (2.16) в равенства (2.12) и учитывая граничные условия (2.13), (2.14) для нулевого и первого приближений и соответствующие граничные условия для последующих приближений, получим алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных констант. По найденным функциям определяем составляющие компонент напряжений.

§3. Результаты численных исследований.

Проведены исследования напряженного состояния неограниченной трансверсально-изотропной пластины с некруговой цилиндрической полостью, на поверхности которой задана расщепляющая сила (уравновешенная пара касательных усилий). Граничные значения данных напряжений представлены в виде линейной $\sigma_{\rho\xi} = -q\xi$ и нелинейной $\sigma_{\rho\xi} = -q\xi(1 - \xi^2)$ функций поперечной координаты ξ . При положительных значениях константы q эти напряжения стремятся сжать пластину по срединной плоскости, а при отрицательных – расщепить. Рассмотрено три приближения по малому параметру ε и найдены выражения для компонент тензора напряжений. Так, в частности, нормальные поперечные напряжения определяются формулой

$$\frac{1}{q} \sigma_{33} = \sum_{k=0}^n \left\{ t_{33}^{(2k,0)}(\rho) + \varepsilon \tau_{33}^{(2k,1)}(\rho) \cos(m+1)\vartheta + \right.$$

$$+ \varepsilon^2 \left[\tau_{33}^{(2k,0)}(\rho) + \tau_{33}^{(2k,2)}(\rho) \cos 2(m+1)\vartheta \right] P_{2k}(\xi),$$

где $t_{33}^{(2k,0)}(\rho)$, $\tau_{33}^{(2k,i)}(\rho)$ – составляющие, содержащие цилиндрические функции, например,

$$t_{33}^{(2k,0)}(\rho) = \xi_1 D_1^{(2k)} K_0(\rho x_1) + \xi_2 D_2^{(2k)} H_0^{(1)}(\rho x_2) + \xi_3 D_3^{(2k)} H_0^{(2)}(\rho x_3);$$

$$\tau_{33}^{(2k,1)}(\rho) = \eta_1 D_1^{(2k)} K_{m+1}(\rho x_1) + \eta_2 D_2^{(2k)} H_{m+1}^{(1)}(\rho x_2) + \eta_3 D_3^{(2k)} H_{m+1}^{(2)}(\rho x_3);$$

$$\tau_{33}^{(2k,2)}(\rho) = \zeta_1 D_1^{(2k)} K_{2m+2}(\rho x_1) + \zeta_2 D_2^{(2k)} H_{2m+2}^{(1)}(\rho x_2) + \zeta_3 D_3^{(2k)} H_{2m+2}^{(2)}(\rho x_3);$$

ξ_i , η_i , ζ_i – постоянные, определяемые из решения алгебраической системы уравнений при выполнении граничных условий.

Числовые расчеты проведены для пластин с цилиндрической полостью, имеющей в плане форму квадрата или треугольника с закругленными углами. Параметры m , R и ε рассматриваемых отверстий приняты такими, как в работе [4].

Пластина с квадратным отверстием. Для квадратного отверстия $m = 3$, $R = 0,9a$, $\varepsilon = \pm 1/9$, где a – диагональ квадрата. Расчеты выполнены для пластины с коэффициентами Пуассона $\nu = 0,3$, $\nu' = 0,25$ и отношениями модулей упругости $E/E' = 1,5$, $E/G' = 2,5$.

На рис. 2 при линейном способе задания расщепляющей силы представлены кривые изменения окружных $\sigma_{\vartheta\vartheta}/q$ и поперечных σ_{33}/q напряжений в точке $\rho = 1$, $\vartheta = \pi/4$ для трех приближений по параметру ε (кривые 0, 1, 2) в зависимости от изменения относительной толщины пластины a/h . Максимальные значения окружные напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ принимают на граничной плоскости $\xi = 1$, а поперечные напряжения σ_{33} – на срединной плоскости $\xi = 0$. С увеличением параметра a/h напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ уменьшаются, а нормальные поперечные σ_{33} – возрастают.

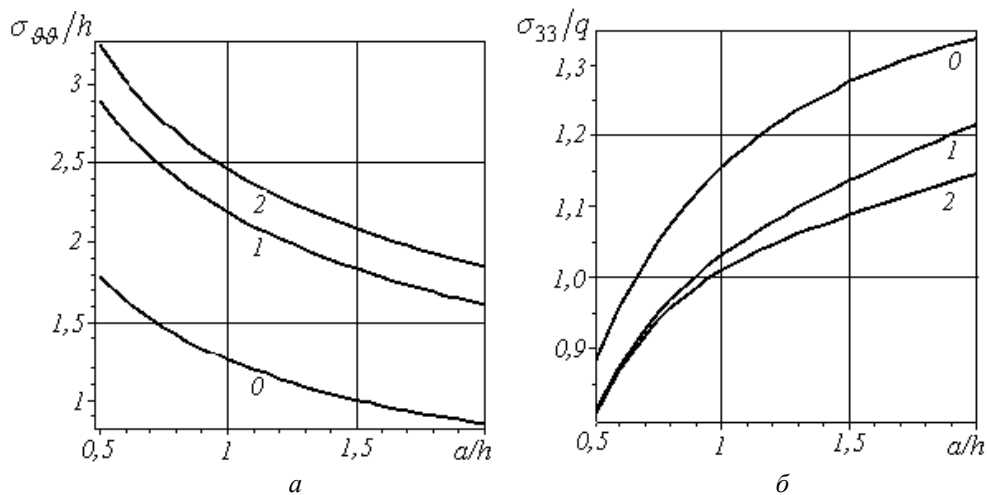


Рис. 2

Кривые на рис. 3 характеризуют изменения напряжений $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ и σ_{33} в зависимости от отношения модулей упругости E/E' . Как видно, при увеличении отношения E/E' окружные напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ возрастают, а поперечные σ_{33} – убывают.

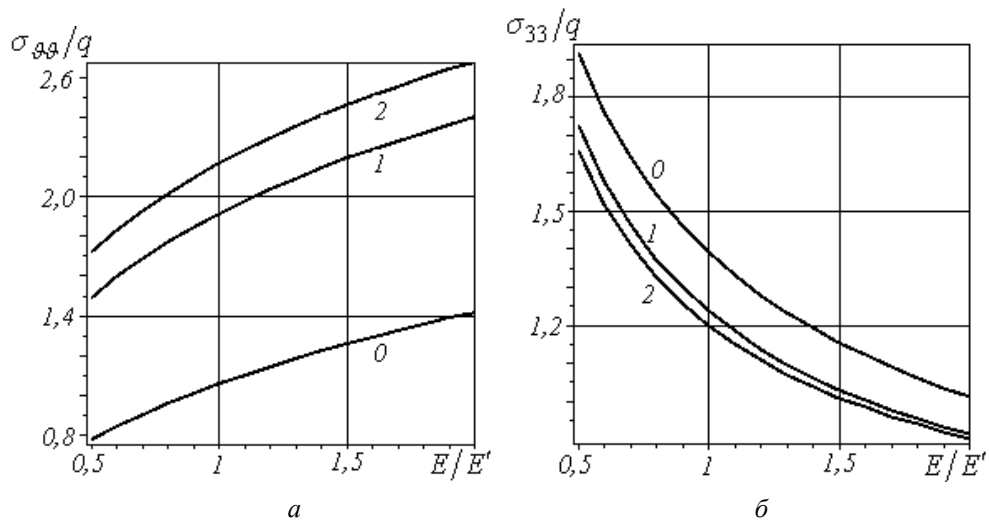


Рис. 3

Характер изменения напряжений σ_{99} и σ_{33} при удалении от поверхности полости проиллюстрирован на рис. 4. Сплошные кривые относятся к срединной плоскости $\xi = 0$, а пунктирные – к граничной плоскости $\xi = 1$.

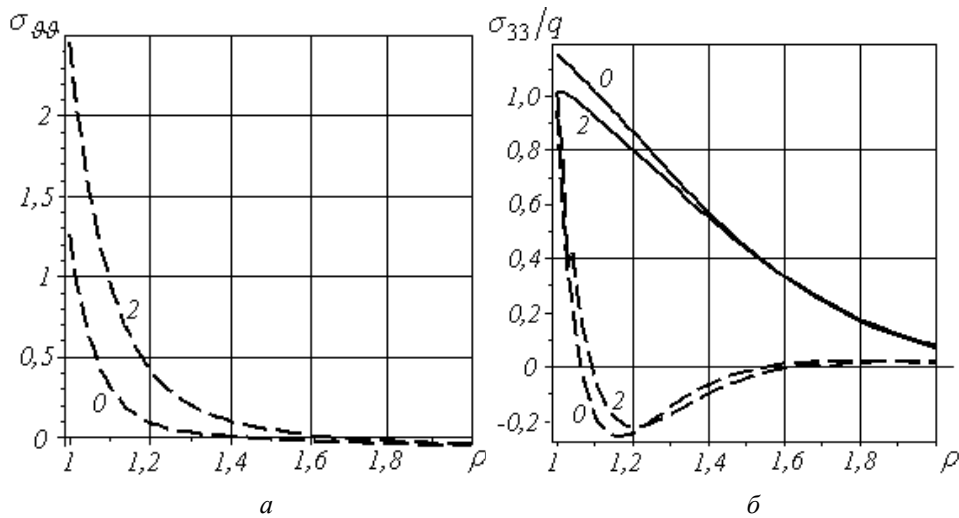


Рис. 4

Для выявления влияния внешней нагрузки на напряженное состояние пластины на рис. 5 приведены аналогичные рис. 4 кривые изменения σ_{99} и σ_{33} в зависимости от радиальной координаты ρ при нелинейном задании расщепляющей силы. С увеличением координаты ρ кольцевые напряжения σ_{99} в обоих случаях монотонно убывают, приближаясь к нулевым значениям, однако по абсолютному значению они существенно отличаются. Поперечные напряжения σ_{33} на граничной плоскости $\xi = 1$ практически равны нулю (рис. 5, б), тогда как при линейном задании расщепляющей силы они принимают в непосредственной близости к поверхности полости некоторые значения (рис. 4, б).

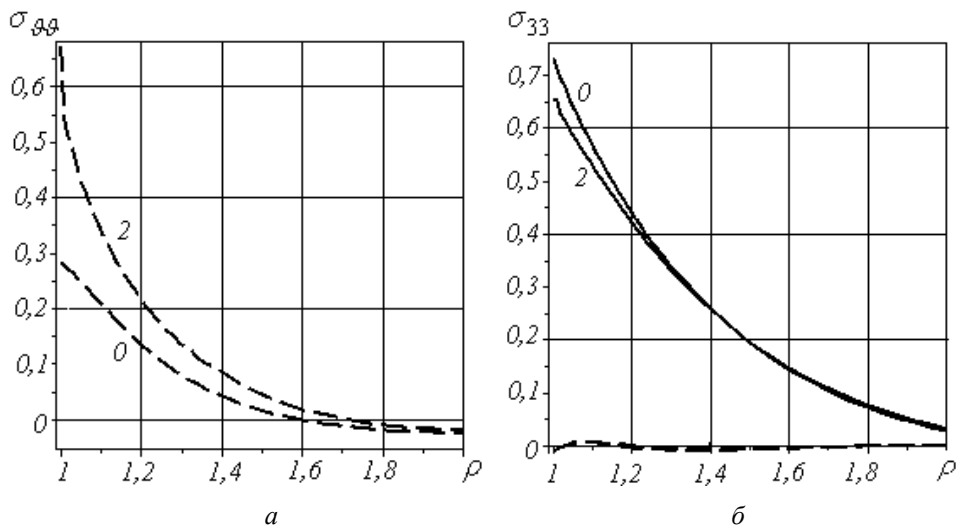


Рис. 5

Изменения σ_{33} по толщине пластины в точке $\rho=1,08$, $\vartheta=\pi/4$ в нулевом и втором приближении по параметру ε представлены на рис. 6.

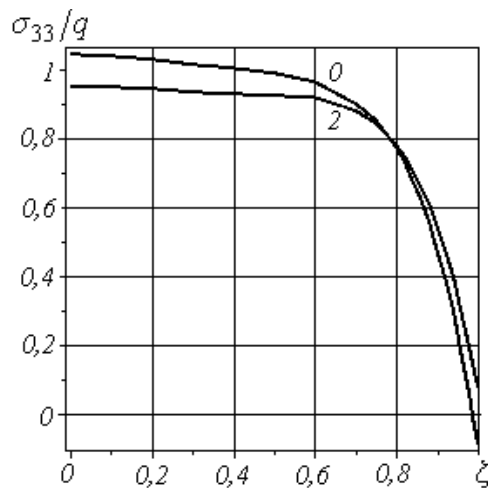


Рис. 6

Пластина с треугольным отверстием. Для треугольного отверстия с закруглёнными углами $m=2$, $R=8h_0/15$, $\varepsilon=1/4$, где h_0 – высота правильного треугольника. Проведены аналогичные вычисления напряжений при тех же значениях упругих постоянных.

На рис. 7 представлены кривые изменения окружных $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ и поперечных σ_{33} напряжений в точке $\rho=1$, $\vartheta=0$ на срединной (сплошные кривые) и граничной (пунктирные кривые) плоскостях пластины в зависимости от относительной толщины h_0/h , а на рис. 8 – в зависимости от отношений модулей упругости E/E' для трех приближений по параметру ε (кривые 0, 1, 2). Расчеты выполнены при условии нелинейного задания касательных напряжений $\sigma_{\rho\xi} = -q\xi(1-\xi^2)$ на поверхности полости.

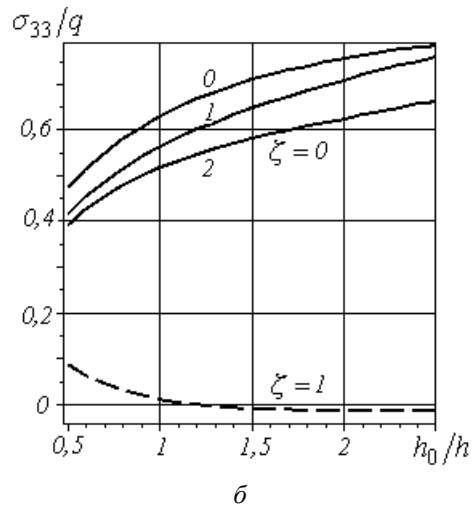
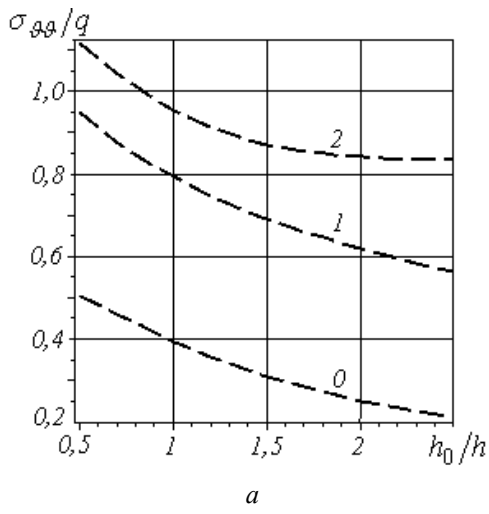


Рис. 7

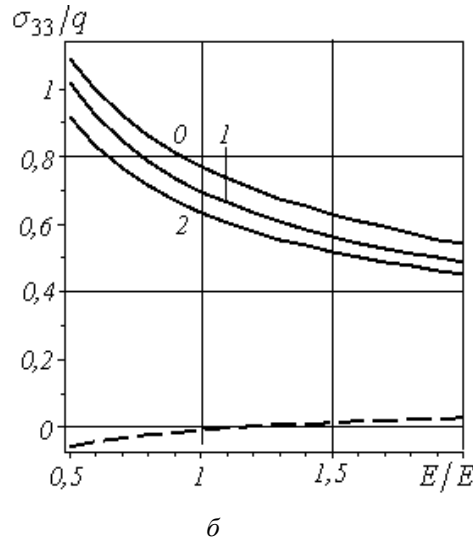
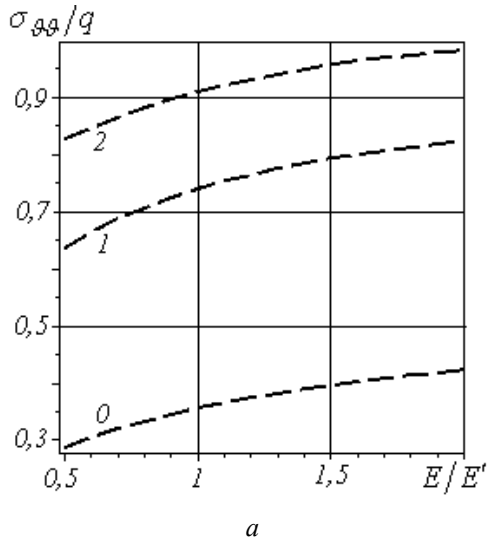


Рис. 8

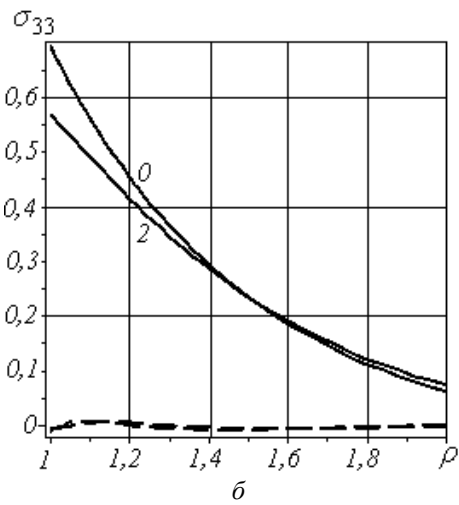
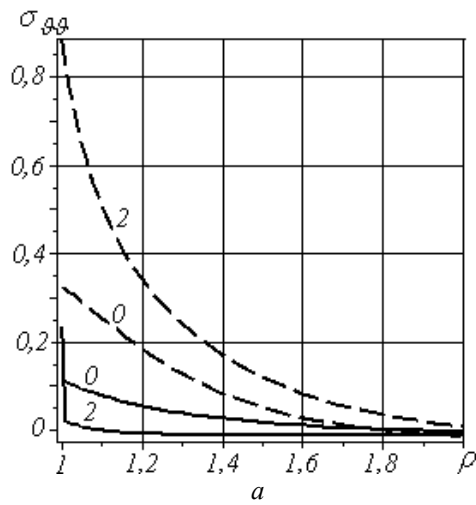


Рис. 9

Изменения напряжений при удалении от поверхности полости вдоль линии $\vartheta = 0$ на срединной и граничной плоскостях пластины представлены на рис. 9. Как видно, имеется аналогичная с квадратным отверстием закономерность распределения напряжений. Окружные напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ принимают максимальные значения на граничной, а нормальные поперечные напряжения σ_{33} – на срединной плоскости пластины.

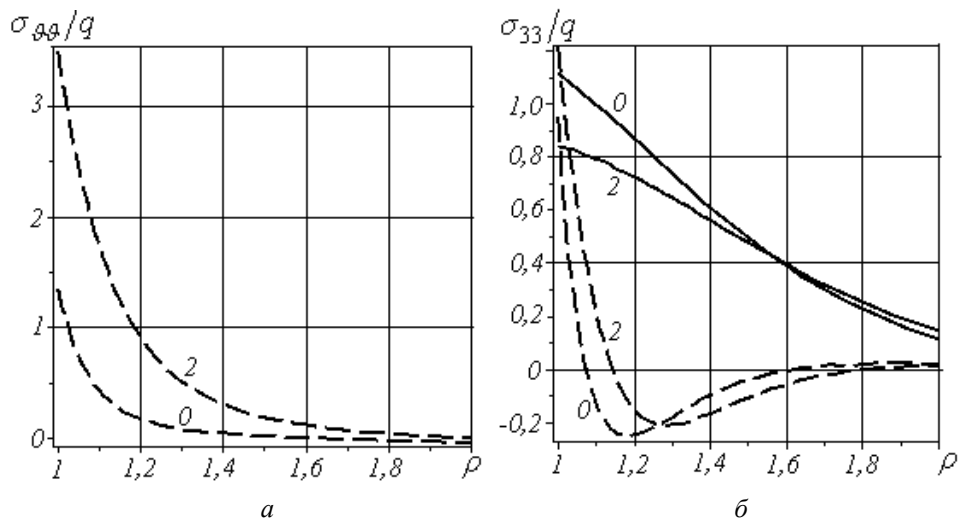


Рис. 10

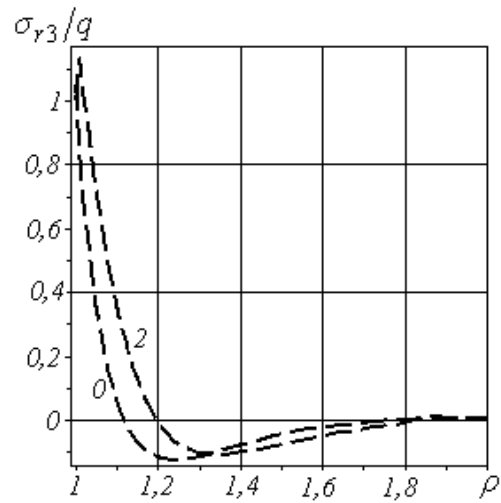


Рис. 11

Исследовано влияние внешней нагрузки на напряженное состояние пластины. На рис. 10 и 11 приведены кривые изменения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, σ_{33} и $\sigma_{r\zeta}$ в зависимости от координаты ρ при линейном задании граничного значения касательных напряжений $\sigma_{r\zeta} = -q\zeta$ на поверхности полости.

Заключення.

Дана постановка и получено решение задачи о напряженном состоянии неограниченной трансверсально-изотропной пластины, ослабленной криволинейным (некруговым) отверстием, на поверхности которого задано значение расщепляющей силы. Под расщепляющей силой подразумевается уравновешенная по толщине пара сил, стремящихся расщепить или сжать пластину по срединной плоскости. Проведен анализ распределения напряжений в окрестности отверстий при линейном и нелинейном способе задания расщепляющей силы.

РЕЗЮМЕ. Методом розкладу шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра разом з методом збурення форми границі розв'язано задачу про напружений стан необмеженої трансверсально-ізотропної пластини з криволінійним (не круговим) отвором, на граничній поверхні якого задано значення розщиплюючої сили (рівноваженої пари сил, що розщиплюють або стискають пластину по срединній площині). Проведено аналіз напруженого стану пластини з квадратним та трикутним отворами.

1. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – Вып. 30. – С. 3 – 103.
2. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках // Прикл. механіка. – 1962. – 8, N 6. – С. 605 – 612.
3. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями – Львів: Дослідно видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 686 с. (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 1).
5. Хома И.Ю., Дашко О.Г., Коваленко И.Г. Напряженное состояние трансверсально-изотропной пластины с круговой цилиндрической полостью при заданной расщепляющей силе // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 8 (54). – С. 3 – 10.
6. Abbas Ibrahim A. Fractional Order GN model on Thermoelastic Interaction in an Infinite Fibre – Reinforced Anisotropic Plate Containing a Circular Hole // J. Comput. and Theor. Nanosci. – 2014. – 11, N 2. – P. 380 – 384.
7. Burniston E.E. On the Extension of an Infinite Elastic Plate Containing an Axisymmetric Hole // J. Appl. Mech. – 1972. – 39, N 2. – P. 507 – 512.
8. Darwish F., Gharaibeh M., Tashtoush G. A Modified Equation for the Stress Concentration Factor in Countersunk Holes // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2012. – 36. – P. 94 – 103.
9. Fellers J.I., Soler A.I. Approximate Solution of the Finite Cylinder Problem Using Legendre Polynomials // AIAA J. – 1970. – 8, N 11. – P. 2037 – 2042.
10. Folias E.S., Wang J.S. On the Three-dimensional Stress Fields around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness // Comput. Mech. – 1990. – 6, N 5. – P. 379 – 391.
11. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Analysis of the Stress – Strain State of Complex-Shaped Plates // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 6. – P. 695 – 701.
12. Khoma I.Yu., Dashko O.G. Solving the Third Homogeneous Boundary-Value Problem of the Deformation of a Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole Under Uniform Tension // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 6. – P. 605 – 615.
13. Khoma I.Yu. Representing the Solutions of the Equilibrium Equations for Functionally Inhomogeneous Transversely Isotropic Plates // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 2. – P. 196 – 208.
14. Khoma I.Yu., Proshchenko T.M. Tension and Shear of a Transversely Isotropic Piezoceramic Plate with a Circular Hole with Mixed Conditions on Flat Sides // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 6. – P. 704 – 715.
15. Markensoff X. Stress Amplification in the Neighborhood of an Eccentric Large Hole in a Strip in Tension // ZAMP. – 2000. – 51, N 4. – P. 550 – 554.
16. Yang Zh. The Stress and Strain Concentrations of an Elliptical Hole in an Elastic Plate of Finite Subjected to Tensile Stress // Int. J. Fract. – 2009. – 155. – P. 43 – 44.
17. Yang Zh., Kim Ch-Boo, Chjo Ch., Beom N.G. The Concentration of Stress and Strain in Finite Thickness Elastic Plate Containing a Circular Hole // Int. J. Solids and Struct. – 2008. – 45. – P. 713 – 731.

Поступила 10.01.2018

Утверждена в печать 05.03.2018