

Я. В. Ткаченко

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ МАНЕВРОВ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО  
ТРАНСПОРТНОГО АППАРАТА В СИЛЬНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ  
ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ;  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: yaroslavvt@ukr.net*

**Abstract.** A method of constructing the optimal trajectories of interorbital flights of the orbital transfer vehicle with a low thrust propulsion system is described. The testing of method confirms its effectiveness for the problem of delivering the maximum payload from the low orbit to the orbit close to the geostationary one.

**Key words:** orbital transfer vehicle, optimal trajectory, low thrust, payload maximum.

**Введение.**

Межорбитальный транспортный аппарат (МТА) – это космический аппарат, предназначенный для доставки полезного груза с заданной начальной орбиты на заданную конечную орбиту. Одной из важнейших задач современной космонавтики является задача о максимальном увеличении доли массы полезной нагрузки в начальной массе МТА, причем таким образом, чтобы перелет между заданными орбитами был выполнимым. Решение задач такого типа приводит к необходимости определения в рамках единой вариационной постановки оптимальных соотношений между масса-ми компонентов МТА, оптимальных управлений и оптимальных траекторий перелета.

Классическая схема электрореактивной двигательной системы (ЭРДС) включает в себя два основных модуля: электрореактивный двигатель (ЭРД), генерирующий тягу, и источник энергии, вырабатывающий электрическую энергию для питания двигателя. ЭРДС относится к классу двигательных систем малой тяги, у которых величина создаваемого реактивного ускорения на несколько порядков меньше, чем величина гравитационного ускорения на низких монтажных орбитах. Поэтому перелеты между геоцентрическими орбитами могут происходить в течение длительного интервала времени и большого количества витков. Однако использование ЭРДС в качестве маршевой двигательной системы позволяет существенно увеличить долю массы полезной нагрузки в начальной массе МТА по сравнению с МТА, который оснащен традиционным жидкостным или твердотопливным ракетным двигателем [11, 18]. К преимуществам ЭРДС также следует отнести малый расход рабочего тела на единицу тяги, возможность регулирования в широких пределах величины тяги и скорости реактивной струи и способность непрерывно функционировать длительное время. Глубокий анализ преимуществ ЭРД приведен в обзоре [17]. Указанные выше возможности ЭРДС позволяют в теоретических исследованиях использовать модель идеально управляемой двигательной системы, которая базируется на отсутствии ограничений на тягу сверху, предположении о пропорциональности масс двигателя и источника их максимальной мощности. Также в модели идеально регулируемой двигательной системы тяга и мощность двигателя являются независимыми управлениями.

Основным преимуществом модели идеально регулируемой двигательной системы является то, что ее использование позволяет исходную задачу об оптимизации межорбитального перелета разделить на две – массовую и траекторную задачи. Решение массовой задачи определяет оптимальные соотношения между массами модулей МТА

и выражается простыми аналитическими формулами. Траекторная задача представляет собой классическую нелинейную задачу оптимального управления с квадратичным критерием оптимальности, где управлениями являются компоненты вектора реактивного ускорения.

Задачи управления движением летательных аппаратов можно условно разделить на задачи построения программных траекторий при детерминированных внешних воздействиях [2, 4, 5, 14], и задачи стабилизации программных траекторий [13, 15, 16]. Данная работа посвящена построению программных оптимальных траекторий в центральном сферическом гравитационном поле.

Для решения траекторных задач чаще всего используют два подхода. Первый, так называемый, прямой подход состоит в дискретизации некоей начальной траектории с последующим сведением задачи оптимального управления к задаче нелинейного, а часто и линейного программирования с довольно большим (до сотен тысяч) количеством неизвестных [7]. Второй подход базируется на использовании принципа максимума Понтрягина, что позволяет получить двухточечную нелинейную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений для которой, ввиду нелинейности, получить численное решение не всегда возможно. В работах [2, 5, 6] указаны методики, позволяющие в некоторых случаях находить решения указанных краевых задач. Однако, для успешного получения результата, как при первом, так и втором подходе, необходимо задание довольно точных начальных приближений.

В работе [4] предложена методика, использующая идеи указанных выше двух подходов с указанием выбора траектории начального приближения (опорной траектории). Методика, предложенная в данной работе, сохраняя алгоритм работы [4], позволяет строить оптимальные траектории межорбитального перелета с учетом заданного ограничения на время перехода.

### §1. Общая постановка задачи.

Движение центра масс МТА моделируем движением материальной точки переменной массы в центральном сферическом гравитационном поле под действием тяги идеально регулируемой двигательной системы. Начальная масса МТА  $M_0$  состоит из массы полезной нагрузки  $M_n$ , массы источника энергии  $M_v$ , массы двигателя  $M_d$  и массы запаса рабочего тела  $M_f$ , необходимого для выполнения требуемого динамического маневра. Массу остальных конструктивных элементов МТА принимаем включенной в массу полезной нагрузки. Как указано выше, в модели идеально регулируемой двигательной системы массы источника энергии и двигателя пропорциональны их максимальной мощности  $N_0$

$$M_v = \alpha N_0; M_d = \gamma N_0, \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  постоянные во времени массово-энергетические характеристики двигательной системы. Отсутствие ограничения на тягу позволяет представить уравнение изменения массы МТА  $M$  в виде [1]

$$\dot{M} = -\frac{M^2 \bar{W}^2}{2N_T}; N_T \in [0; N_0]. \quad (1.2)$$

Здесь  $\bar{W}$  и  $N_T$  – текущие значения вектора реактивного ускорения и мощности двигателя. Как видно из формулы (1.2) текущий расход рабочего тела обратно пропорционален текущей мощности двигателя, поэтому для уменьшения требуемого запаса рабочего тела двигатель и источник энергии должны работать на максимальной мощности на протяжении всего маневра, т.е.

$$N_T = N_0. \quad (1.3)$$

В дальнейшем в данной работе все соотношения записаны в безразмерной форме со следующими характерными величинами: расстоянием  $r_*$ , временем  $T_*$ , массой  $M_*$  и максимальной мощностью двигательной системы  $N_0$ . Время  $T_*$  связано с  $r_*$  и гра-

витационной постоянной центрального тела  $K$  соотношением:  $T_* = K^{-1/2} r_*^{3/2}$ , и представляет собой деленный на  $2\pi$  период обращения по круговой орбите радиусом  $r_*$ . Безразмерные массы, вектор реактивного ускорения и его компоненты обозначены строчными буквами.

Принимая во внимание выбор характерных величин и соотношения (1.1), (1.3), запишем уравнение (1.2) в безразмерной форме

$$\dot{m} = -\frac{\alpha}{m_v} \frac{r_*^2}{T_*^3} \frac{m^2 \bar{w}^2}{2}. \quad (1.4)$$

Тогда, после выполнения произвольного динамического маневра на протяжении интервала времени  $t \in [t_0; t_1]$ , интегрируя уравнение (1.4), находим конечную массу МТА

$$m_1 = m_0 \left( 1 + \frac{m_0}{m_v} \frac{\alpha r_*^2}{2 T_*^3} \int_{t_0}^{t_1} \bar{w}^2 dt \right)^{-1}.$$

Масса полезной нагрузки равна разности конечной массы  $m_1$  и суммы масс двигателя и источника энергии. Обозначив  $\varepsilon = \gamma / \alpha$ , находим

$$m_\pi = m_0 \left( 1 + \frac{m_0}{m_v} \frac{\alpha r_*^2}{2 T_*^3} \int_{t_0}^{t_1} \bar{w}^2 dt \right)^{-1} - (1 + \varepsilon) m_v. \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) позволяет рассматривать массу полезной нагрузки  $m_\pi$  как функцию от массы источника энергии  $m_v$ , исследовав которую на максимум находим оптимальные значения масс составляющих двигательной системы, массы рабочего тела, необходимого для выполнения динамического маневра, и непосредственно массы полезной нагрузки

$$m_v = m_0 \frac{\sqrt{\Phi} - \Phi}{(1 + \varepsilon)}; \quad m_\gamma = m_0 \varepsilon \frac{\sqrt{\Phi} - \Phi}{(1 + \varepsilon)}; \quad m_f = m_0 \sqrt{\Phi}; \quad m_\pi = m_0 (\sqrt{\Phi} - 1)^2, \quad (1.6)$$

где

$$\Phi = \frac{\alpha}{2} \frac{r_*^2}{T_*^3} J; \quad J = (1 + \varepsilon) \int_{t_0}^{t_1} \bar{w}^2 dt. \quad (1.7)$$

Из формул (1.6) и (1.7) следует, что чем меньше значение функционала  $J$ , тем больше масса полезной нагрузки  $m_\pi$ . Таким образом, из множества удовлетворяющих заданному динамическому маневру траекторий необходимо отыскать ту, которая обеспечит минимум функционалу  $J$ .

Положение центра масс МТА в пространстве определим с помощью пяти орбитальных параметров: логарифма углового момента  $\mathcal{G}$ , эксцентриситета  $e$ , углового расстояния перицентра до узла  $\omega$ , угла наклона  $I$ , долготы восходящего узла  $\Omega$ , определяющих текущую орбиту центра масс МТА, и эксцентрической аномалии  $E$ , которая определяет положение центра масс МТА на текущей орбите. Логарифм углового момента  $\mathcal{G}$  связан с большой полуосью орбиты  $a$  и эксцентриситетом  $e$  соотношением  $\mathcal{G} = \ln \sqrt{a(1 - e^2)}$ . Тогда, при движении МТА в центральном сферическом гравитационном поле под действием тяги двигателей, уравнения движения согласно [3] имеют вид

$$\frac{dx_j}{dt} = \exp \mathcal{G} \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_k; \quad \frac{dE}{dt} = F_{60} + \exp \mathcal{G} \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_k, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (1.8)$$

где  $x_j$  – компоненты вектора  $\vec{x} = [\vartheta, e, \omega, I, \Omega]^T$ ;  $w_k$  – компоненты вектора реактивного ускорения, а функции  $F_{ij}$  определяются по формулам

$$\begin{aligned}
F_{11} &= 0; \quad F_{12} = \frac{1 - e \cos E}{1 - e^2}; \quad F_{13} = 0; \quad F_{21} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}; \quad F_{22} = \cos E + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}; \\
F_{23} &= 0; \quad F_{31} = -\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)}; \quad F_{32} = \frac{2 - e^2 - e \cos E}{e\sqrt{1 - e^2}(1 - e \cos E)} \sin E; \\
F_{33} &= -ctg I \left( \frac{\sin \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) + \frac{\cos \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E \right); \\
F_{41} = F_{42} &= 0; \quad F_{43} = \frac{\cos \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) - \frac{\sin \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E; \quad F_{51} = F_{52} = 0; \quad F_{53} = -\frac{1}{\cos I} F_{33}; \\
F_{60} &= \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{\exp(3\vartheta)(1 - e \cos E)}; \quad F_{61} = \left( \frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}; \\
F_{62} &= -\frac{2 - e \cos E}{e(1 - e \cos E)} \sin E; \quad F_{63} = 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Таким образом, задача о максимизации массы полезной нагрузки МТА при перелете с заданной начальной эллиптической орбиты с параметрами  $\vec{x}^i$  на заданную конечную орбиту с параметрами  $\vec{x}^f$  за время  $T$  сводится к задаче оптимального управления

$$\begin{aligned}
J &= (1 + \varepsilon) \int_0^T (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) dt \rightarrow \min; \\
\frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_k; \quad x_j(0) = x_j^i; \quad x_j(T) = x_j^f; \\
\frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{6k} w_k; \quad E(0) = E^i.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Положение на конечной орбите не фиксируем, а при необходимости прибытия в заданную точку на конечной орбите добавляется конечное условие  $E(T) = E^f$ . Применение к задаче (1.10) принципа максимума Понтрягина позволяет свести ее к двухточечной нелинейной краевой задаче. Однако, ввиду нелинейности и того, что принцип максимума представляет собой лишь необходимые условия оптимальности, полученная краевая задача имеет несколько ветвей решения. Этот факт не позволяет получать устойчивое численное решение в общем случае. В работах [2, 5, 6] приведены способы, позволяющие в некоторых случаях улучшить ситуацию. Но и они обладают рядом недостатков. Так, способ на основе метода усреднения [2] позволяет получить приближенное аналитическое решение, но для определенного класса маневров. А методы из работ [5, 6] теряют устойчивость при большом числе витков.

## §2. Метод построения оптимальных траекторий перелета.

В работе [4] изложена идея устойчивого метода построения оптимальных траекторий и получены результаты для перелета с низкой монтажной орбиты на орбиту близкую к геостационарной. Этот метод базируется на фиксации числа витков и отказе от фиксации времени перелета. Главным недостатком такого подхода является значительное увеличение времени перелета, по сравнению с методами работ [2, 3], при незначительном увеличении массы полезной нагрузки. В данной работе показано, как преодолеть этот недостаток.

Полагаем, что перелет происходит на протяжении  $N$  витков. Рассмотрим движение МТА на  $n$ -м витке. Обозначим через  $\bar{x}_{n-1} = [\mathcal{G}_{n-1}, e_{n-1}, \omega_{n-1}, I_{n-1}, \Omega_{n-1}]^T$  и  $E_{n-1}, n = \overline{1, N}$  значения вектора орбитальных параметров и эксцентрисической аномалии на момент начала этого витка. Пусть в течение витка вектор орбитальных параметров получает некое приращение  $\bar{\Delta}_n = [\Delta_n^g, \Delta_n^e, \Delta_n^\omega, \Delta_n^I, \Delta_n^\Omega]^T$ . Тогда конечное положение МТА на этом витке определяется величинами  $\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \bar{\Delta}_n$ ,  $E_n = E_{n-1} + 2\pi$ . Введем новый вектор  $\bar{y}_n = \bar{x} - \bar{x}_{n-1}$ . Малость компонент вектора реактивного ускорения и, соответственно, малость изменения каждого орбитального параметра на протяжении витка ( $\bar{y}_n$  и  $\bar{\Delta}_n$  – малые величины), позволяет нам линеаризовать уравнения движения в окрестности орбиты с параметрами  $\bar{x}_{n-1}$ . В работе [8] показано, что в линейной постановке  $dt = F_{60}^{-1} dE$ . Это дает возможность перейти от независимой переменной  $t$  к независимой переменной  $E$ . Согласно принципу оптимальности Беллмана, любая часть оптимальной траектории также должна быть оптимальной траекторией. Поэтому на каждом витке имеем следующую линейную задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} J_n &= (1 + \varepsilon) \int_{E_{n-1}}^{E_n} \hat{F}_E(E, \bar{x}_{n-1}) (w_{n1}^2 + w_{n2}^2 + w_{n3}^2) dE \rightarrow \min; \\ \frac{dy_j}{dE} &= F_E(E, \bar{x}_{n-1}) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \bar{x}_{n-1}) w_{nk}; \quad \bar{y}_n(E_{n-1}) = 0; \quad \bar{y}_n(E_n) = \bar{\Delta}_n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\hat{F}_E(E, \bar{x}_{n-1}) = 1 / F_{60}(E, \bar{x}_{n-1})$ ,  $F_E(E, \bar{x}_{n-1}) = \exp(\mathcal{G}_{n-1}) \hat{F}_E(E, \bar{x}_{n-1})$ .

Применив к задаче (2.1) принцип максимума Понтрягина, находим оптимальные на  $n$ -м витке оптимальные программы компонент вектора реактивного ускорения  $w_{ni}, i = \overline{1, 3}$

$$\begin{aligned} w_{n1} &= \exp(\mathcal{G}_{n-1}) (\lambda_{n2} F_{21}(E, \bar{x}_{n-1}) + \lambda_{n3} F_{31}(E, \bar{x}_{n-1})) / (2(1 + \varepsilon)); \\ w_{n2} &= \exp(\mathcal{G}_{n-1}) (\lambda_{n1} F_{12}(E, \bar{x}_{n-1}) + \lambda_{n2} F_{22}(E, \bar{x}_{n-1}) + \lambda_{n3} F_{32}(E, \bar{x}_{n-1})) / (2(1 + \varepsilon)); \\ w_{n3} &= \exp(\mathcal{G}_{n-1}) (\lambda_{n3} F_{33}(E, \bar{x}_{n-1}) + \lambda_{n4} F_{43}(E, \bar{x}_{n-1}) + \lambda_{n5} F_{53}(E, \bar{x}_{n-1})) / (2(1 + \varepsilon)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $\bar{\lambda}_n = [\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}, \lambda_{n4}, \lambda_{n5}]^T$  – вектор, состоящий из присоединенных функций  $\lambda_{nj}, j = \overline{1, 5}$ . Учитывая то, что правые части уравнений движения в (2.1) не зависят от фазовых координат,  $\lambda_{nj}, j = \overline{1, 5}$  являются константами. Подставим выражения (2.2) в соотношения (2.1). После интегрирования получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных  $\lambda_{nj}, j = \overline{1, 5}$  и выражение для функционала  $J_n$

$$\Theta_n \bar{\lambda}_n = \bar{\Delta}_n; \quad J_n = (\bar{\lambda}_n \cdot \bar{\Delta}_n) / 2, \quad (2.3)$$

где матрица  $\Theta$  определяется следующим образом:

$$\Theta_n = \int_{E_{n-1}}^{E_n} \frac{\exp(\mathcal{G}_{n-1}) F_E(E, \bar{x}_{n-1}) \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^T}{2(1 + \varepsilon)} dE;$$

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & F_{12}(E, \bar{x}_{n-1}) & 0 & 0 & 0 \\ F_{21}(E, \bar{x}_{n-1}) & F_{22}(E, \bar{x}_{n-1}) & 0 & 0 & 0 \\ F_{31}(E, \bar{x}_{n-1}) & F_{32}(E, \bar{x}_{n-1}) & F_{33}(E, \bar{x}_{n-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{43}(E, \bar{x}_{n-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{53}(E, \bar{x}_{n-1}) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Определим время маневра на  $n$ -м витке  $\Delta T_n$ . Принимая во внимание указанную выше связь между дифференциалами времени и эксцентрисической аномалии, формулы (1.9) и соотношение  $E_n = E_{n-1} + 2\pi$ , находим

$$\Delta T_n = 2\pi \exp(3\mathcal{G}_{n-1}) (1 - e_{n-1}^2)^{-3/2}. \quad (2.5)$$

Таким образом, для маневра, осуществляемого за  $N$  витков, функционал  $J$  и время перелета  $T$  определяются по формулам

$$J = \sum_{n=1}^N J_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\bar{\lambda}_n \cdot \bar{\Delta}_n); \quad T = \sum_{n=1}^N \Delta T_n = 2\pi \sum_{n=1}^N \exp(3\mathcal{G}_{n-1}) (1 - e_{n-1}^2)^{-3/2}. \quad (2.6)$$

Соотношения (2.3) и (2.4) позволяют считать  $J_n$  функцией 5 неизвестных  $\Delta_n^{\mathcal{G}}, \Delta_n^e, \Delta_n^\omega, \Delta_n^I, \Delta_n^\Omega$ , а значит, функционал  $J$  является функцией  $5N$  неизвестных, которую необходимо исследовать на минимум. Очевидно, что для обеспечения граничных условий в задаче (1.10), или, другими словами, для обеспечения перелета на заданную орбиту, поиск минимума  $J$  следует проводить в области, удовлетворяющей векторному равенству

$$\sum_{n=1}^N \bar{\Delta}_n = \bar{x}^f - \bar{x}^i. \quad (2.7)$$

Также, для сохранения малости компонент векторов  $\bar{\Delta}_n$ ,  $n = \overline{1, N}$  необходимо ввести ограничения

$$|\Delta_n^m| = \Delta_{\max}^m, \quad n = \overline{1, N}, \quad m \in \{\mathcal{G}, e, \omega, I, \Omega\}, \quad (2.8)$$

где  $\Delta_{\max}^m$  заданные малые величины, которые для выполнимости маневра должны удовлетворять неравенствам  $|\Delta_{\max}^m| \geq |x_m^f - x_m^i|$ ,  $m \in \{\mathcal{G}, e, \omega, I, \Omega\}$ . Учет ограничений (2.7) и (2.8) позволяет оптимизировать траектории межорбитальных переходов [4]. Однако, при этом нет возможности контролировать время перехода. На практике же, желательно выполнить межорбитальный переход, не превышая заданного времени  $T_{\max}$ . Поэтому к системе ограничений (2.7) и (2.8) следует добавить ограничение

$$T = \sum_{n=1}^N \Delta T_n = 2\pi \sum_{n=1}^N \exp(3\mathcal{G}_{n-1}) (1 - e_{n-1}^2)^{-3/2} \leq T_{\max}. \quad (2.9)$$

Формулы (1.9) имеют смысл для эллиптических орбит, т.е. эксцентриситет находится в пределах  $0 < e < 1$ . Так как минимизация функционала  $J$  осуществляется с помощью численных методов, то для обеспечения устойчивости численного процесса минимизации следует добавить следующую систему ограничений:

$$e_n = e^i + \sum_{k=1}^n \Delta_k^e > \varepsilon_{\min}^e, \quad n = \overline{1, N}; \quad e_n = e^i + \sum_{k=1}^n \Delta_k^e < \varepsilon_{\max}^e, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.10)$$

где  $\varepsilon_{\min}^e$  – положительное число, близкое к нулю, а  $\varepsilon_{\max}^e$  – число, меньше 1, но близкое к 1. Также для исключения переходных траекторий, проходящих слишком близко к

гравитационному центру, следует ограничить снизу текущее значение радиуса перицентра переходной траектории некой величиной  $r_{\pi}^{\min}$ . Как известно [8], радиус перицентра связан с большой полуосью и эксцентриситетом соотношением  $r_{\pi} = a(1 - e)$ . Величина большой полуоси вычисляется через логарифм углового момента  $\mathcal{G}$  и эксцентриситет  $a = \exp(2\mathcal{G}) / (1 - e^2)$ . Следовательно, к ограничениям (2.7) – (2.10) добавится следующая система ограничений:

$$\frac{\exp(2\mathcal{G}_n)}{1 + e_n} > r_{\pi}^{\min}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (2.11)$$

Таким образом, принимая во внимание соотношения (2.3) – (2.6), исходная задача оптимального управления (1.10) сведена к задаче поиска минимума функции  $5N$  переменных

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left( (\Theta^{-1} \bar{\Delta}_n) \cdot \bar{\Delta}_n \right), \quad (2.12)$$

с ограничениями (2.7) – (2.11). Для решения таких задач разработаны эффективные численные методы [9, 10, 19]. Начальное приближение, удовлетворяющее выбранным ограничениям, выбираем следующим образом

$$\bar{\Delta}_n^0 = (\bar{x}^f - \bar{x}^i) / N. \quad (2.13)$$

Отметим, что для многих классов маневров количество переменных, от которых зависит функция (2.12) может быть существенно уменьшено. Приведем несколько примеров. При плоских маневрах положение плоскости орбиты остается неизменным, поэтому можно положить  $\Delta_n^i = \Delta_n^{\Omega} = 0$ ,  $n = \overline{1, N}$ , уменьшив число переменных до  $3N$ . Также до  $3N$  можно уменьшить число переменных в случае, когда у начальной и конечной орбит одинаковые значения параметров  $\omega$  и  $\Omega$ , положив  $\Delta_n^{\omega} = \Delta_n^{\Omega} = 0$ ,  $n = \overline{1, N}$ . В работе [12] показано, что при выполнении оптимального маневра изменения угла наклона орбиты на углы меньше  $36^\circ$  форма и размеры орбиты не меняются. Значит  $\Delta_n^{\vartheta} = \Delta_n^e = \Delta_n^{\omega} = \Delta_n^{\Omega} = 0$ ,  $n = \overline{1, N}$ , соответственно, остается  $N$  неизвестных  $\Delta_n^i$ .

### §3. Перелет с низкой монтажной орбиты на орбиту, близкую к геостационарной.

Одним из наиболее интересных классов космических маневров является доставка полезных грузов с низкой монтажной орбиты на геостационарную орбиту. Используем изложенную выше методику для оптимизации такого маневра. Напомним, что целью оптимизации является максимизация массы полезной нагрузки МТА.

Как видно из формул (1.9) правые части уравнений движения в задаче (2.1) имеют особенности при значении эксцентриситета  $e_{n-1} = 0$  и при значениях угла наклона орбиты  $I_{n-1} = 0$ ,  $I_{n-1} = \pi / 2$ . Поэтому начальную и конечную орбиту примем близкими к круговым с малым значением эксцентриситетов. Также угол наклона конечной орбиты положим равным малой величине.

В качестве характерного расстояния принимаем экваториальный радиус Земли  $r_* = 6378,16$  км. Тогда характерное время  $T_* = 806,7252$  с. Удельную массу источника энергии принимаем равным  $\alpha = 20$  кг / кВт, что соответствует существующим ядерным источникам энергии, а удельную массу двигателя приравняем удельной массе электрореактивного двигателя VASIMR  $\gamma = 1,5$  кг / кВт. Характерную массу  $M_*$  приравняем начальной массе МТА  $M_0$ .

Пусть начальная орбита определяется параметрами:  $a^i = a_0 = 1,031357$ ,  $e^i = e_0 = 0,001$ ,  $I^i = I_0 = 57^\circ$ ,  $\omega^i = \omega_0 = \Omega^i = \Omega_0 = 0$ . Большая полуось начальной орбиты соответствует радиусу круговой орбиты, лежащей в экваториальной плоскости, высотой 200 км. У конечной орбиты большая полуось равна радиусу геоцентрической орбиты  $a^f = a_N = 6,610709$ , эксцентриситет совпадает с эксцентриситетом начальной орбиты  $e^f = e_N = 0,001$ , угол наклона  $I^f = I_N = 2^\circ$ , угловое расстояние перицентра до узла и долгота восходящего узла  $\omega^f = \omega_N = \Omega^f = \Omega_N = 0$ . Начальное и конечное положения МТА на соответствующих орбитах заданы значениями эксцентрических аномалий  $E^i = E_0 = 0^\circ$  и  $E^f = E_N = 2\pi$ . На рис. 1 – 3 приведены графики оптимальных зависимостей  $a(t)$ ,  $e(t)$ ,  $I(t)$  для перелета между указанными орбитами за 153 витка для различных времен перелета (время в сутках). Как было указано выше, для этого перелета можно положить  $\Delta_n^\omega = \Delta_n^\Omega = 0$ ,  $n = \overline{1, 153}$  и проводить минимизацию функционала (2.12) в пространстве 459 неизвестных.

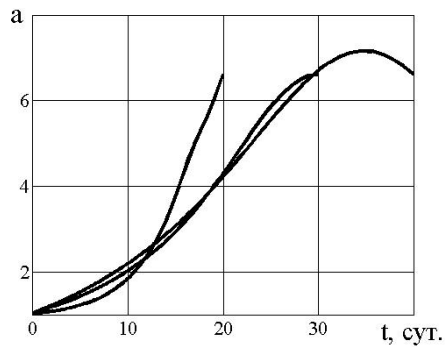


Рис. 1

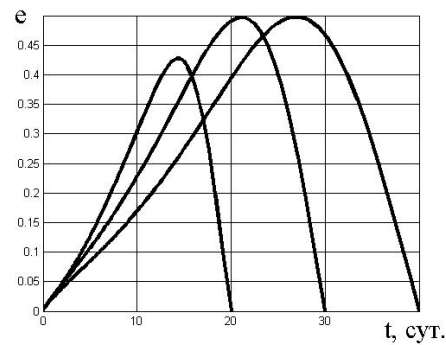


Рис. 2

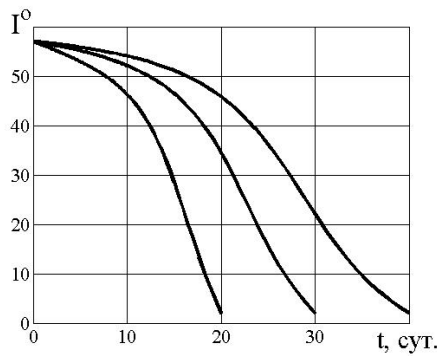


Рис. 3

$T$	20 сут.	25 сут.	30 сут.	35 сут.	40 сут.	45 сут.	50 сут.
$J$	$0,5163 \cdot 10^{-3}$	$0,3639 \cdot 10^{-3}$	$0,5163 \cdot 10^{-3}$	$0,2954 \cdot 10^{-3}$	$0,2398 \cdot 10^{-3}$	$0,2278 \cdot 10^{-3}$	$0,2205 \cdot 10^{-3}$
$m_\pi$	0,1351	0,2199	0,2720	0,3039	0,3237	0,3362	0,3442

В таблице приведены значения функционала  $J$  и массы полезной нагрузки  $m_\pi$  для разных времен перелета. Как видно из таблицы при фиксированном числе витков значение массы полезной нагрузки возрастает с увеличением времени перелета. Однако, начиная с некоторого времени перелета рост массы полезной нагрузки сильно ослабевает, что приводит к нерациональности дальнейшего увеличения времени перелета.



### Заключення.

Разработанный в данной работе метод позволяет строить оптимальные траектории перелетов МТА между произвольными эллиптическими орбитами в сильном ньютоновском гравитационном поле. Целью оптимизации является максимизация массы полезной нагрузки МТА. К преимуществам представленного метода следует отнести его применимость для широкого класса маневров МТА и устойчивость численного процесса решения поставленной задачи.

РЕЗЮМЕ. Описано метод побудови оптимальних траєкторій міжорбітальних перельотів міжорбітального транспортного апарату з рушійною системою малої тяги. Тестування методу на задачі доставки максимального корисного вантажу з низької монтажною орбіти на орбіту, близьку до геостационарної, підтвердило його ефективність.

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. – М.: Наука, 1966. – 679 с.
2. Кифоренко Б. Н., Васильев И. Ю. Численные решения точных уравнений движения космического аппарата в ньютоновском центральном гравитационном поле по многовитковым траекториям, близким к оптимальным // Космические исследования. – 2011. – 49, № 5. – Р. 436 – 452.
3. Кифоренко Б. Н., Пасечник З. В., Васильев И. Ю. Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстрдействию межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле // Пробл. управления и информатики. – 2001. – № 6. – С. 62 – 76.
4. Кифоренко Б. М., Ткаченко Я. В. Метод побудови оптимальних траєкторій перельотів у сильному центральному гравітаційному полі // Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України. – 2015. – 12, № 5. – С. 60 – 72.
5. Петухов В. Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. – 2008. – 46, № 3. – С. 224 – 237.
6. Петухов В. Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. – 2012. – 50, № 3. – Р. 258 – 270.
7. Улыбышев Ю. П. Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями // Космические исследования. – 2008. – 46, № 2. – С. 136 – 147.
8. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1965. – 540 с.
9. Byrd R. H., Gilbert J. C., Nocedal J. A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming // Mathematical Programming. – 2000. – 89, N 1. – Р. 149 – 185.
10. Byrd, R. H., Hribar M. E., Nocedal J. An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming // SIAM J. on Optimization. – 1999. – 9, N 4. – Р. 877 – 900.
11. Choueiri E. Y., Kelly A. J., Jahn R. G. Mass saving domain of plasma propulsion for LEO to GEO transfer // J. Spacecraft and Rockets. – 1993. – 30, N 6. – Р. 749 – 754.
12. Edelbaum T. N. Optimum thrust-limited transfer in strong gravity fields // Lecture Notes in Mathematics. – 1970. – N 132. – Р. 70 – 78.
13. Khoroshun A. S. Stability of the Horizontal Flight of an Aircraft // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 1. – Р. 96 – 103.
14. Kiforenko B. N. Singular Optimal Controls of Rocket Motion (Survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – Р. 237 – 286.
15. Larin V. B., Tunik A. A. On Problem of Synthesis of Control System for Quadrocopter // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – Р. 342 – 348.
16. Larin V. B., Tunik A. A. Improving the Reliability of the Control System of a Quadrocopter // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 4. – Р. 454 – 462.
17. Martinez-Sanchez M., Pollard J. E. Spacecraft Electric Propulsion – An Overview // J. of Propulsion and Power. – 1998. – 14, N 5. – Р. 688 – 699.
18. Porte F., Saint A. P., Buthion C. Benefits of electric propulsion for orbit injection of communication spacecraft // AIAA Pap. – 1992. – N 3202. – Р. 1 – 9.
19. Waltz, R. A., Morales J. L., Nocedal J., Orban J. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps // Mathematical Programming – 2006. – 107, N 3. – Р. 391 – 408.

Поступила 21.05.2018

Утверждена в печать 04.06.2019