

П.З.Луговой<sup>1</sup>, Ю.В.Скосаренко<sup>1</sup>,  
С.П.Орленко<sup>1</sup>, А.П.Шугайло<sup>2</sup>

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С КОНСТРУКТИВНЫМИ И  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

<sup>1</sup> *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057 Киев, Украина; string@inmech.kiev.ua*

<sup>2</sup> *Государственный научно-технический центр ядерной и радиационной безопасности,  
ул. Василия Стуса, 35-37, 03142 Киев, Украина; ap\_shugaylo@sstc.com.ua*

**Abstract.** A technique of calculation of the static stress-strain state and the natural oscillations of the ribbed multilayer orthotropic cylindrical shells with attached masses is proposed on the basis of the spline-collocation method. On the numerical examples, an approximation of the solution is performed and its practical convergence is studied depending on the number of collocation points. An analysis of the stress-strain state of the tubes of steam generator of the atomic reactor, taking into account the conditions of operation, is performed. It is obtained that with increasing the stiffness of the sludge the internal forces, the size of which depends essentially on the carrying capacity of the tube, reach the maximum values in the supporting section. At that, the bending moment and the cutting force exceed significantly the maximum bending moment in the pipe without sludge.

**Key word:** cylindrical shell, stiffening ribs, attached mass, stress – strain state, spline-collocation, spline-approximation.

**Введение.**

Как следует из ряда работ [7, 8, 11 – 16], для решения задач динамики оболочечных конструкций используются различные аналитические и численные методы. В отличие от [2 – 4, 12, 13], где перемещения срединной поверхности оболочки аппроксимируются двойными тригонометрическими рядами, здесь вдоль ее образующей используется сплайн-аппроксимация перемещений и метод сплайн-коллокации [5, 6]. Это позволяет существенно расширить класс решаемых прикладных задач. В некоторых случаях при одинаковом порядке разрешающих систем можно получить более точные численные результаты. Например, используя сплайн-сетку с переменным шагом, можно уменьшать ее шаг только в местах расположения кольцевых ребер и сосредоточенных масс, чего нельзя сделать при использовании тригонометрических рядов. Возможность изменять граничные условия на поперечных кромках оболочки, позволяет оценить их влияние на характеристики напряженно-деформированного состояния и собственных колебаний.

Ранее, например, в работах [5, 9, 10], метод сплайн-коллокации использован для исследования напряженно-деформированного состояния оболочек с характеристиками жесткости и геометрии, медленно изменяющимися вдоль координаты, по которой применяется сплайн-аппроксимация решения. Здесь же при расчете оболочек с кольцевыми ребрами и массами указанные величины могут изменяться существенно.

### §1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Ниже рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния и собственных колебаний замкнутой многослойной ребристой цилиндрической оболочки с локально присоединенными массами, подверженной действию статических внешних усилий, симметричных относительно начала кольцевой координаты. Принято, что системы продольных подкрепляющих ребер и масс регулярны и симметричны относительно начала кольцевой координаты. Поперечное сечение каждого кольцевого ребра постоянно по своей длине, в то же время разные кольцевые ребра могут иметь разные размеры поперечного сечения и механические характеристики.

Для решения задачи принята теория оболочек и стержней, основанная на сдвиговой модели Тимошенко [8, 14, 17] и энергетический метод. Полную потенциальную энергию рассматриваемой упругой системы в отклоненном состоянии и кинетическую энергию представляем в виде

$$U = U_o + U_1 + U_2 + A_o, \quad (1.1)$$

$$V = V_o + V_1 + V_2 + V_m \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} U_o = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left[ C_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + 2\bar{K}_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} + \bar{D}_{11} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ & + C_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + 2\bar{K}_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} + \bar{D}_{22} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} \right)^2 + 2C_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \\ & + 2\bar{K}_{12} \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right] + 2\bar{D}_{12} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} + \\ & + C_{66} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + 2\bar{K}_{66} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \theta} \right) + \bar{D}_{66} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \theta} \right)^2 + \\ & \left. + C_{13} \left( \bar{\psi}_1 - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + C_{23} \left( \bar{\psi}_2 - \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right)^2 \right] d\xi d\theta; \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1 = & \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{k_1} \int_0^{L/r} \left[ \frac{E_{i_1} F_{i_1}}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{E_{i_1} I_{i_1 \theta}}{r^3} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{G_{i_1 k r} I_{i_1 k r}}{r^3} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\lambda_{i_1} G_{i_1} F_{i_1}}{r} \left( \bar{\psi}_1 - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi \Big|_{\theta=\theta_{i_1}}; \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{i_2} = & \frac{1}{2} \sum_{i_2=1}^{k_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{E_{i_2} F_{i_2}}{r^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \bar{h}_{i_2} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} + w \right)^2 + \frac{E_{i_2} I_{i_2 \xi}}{r^4} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{G_{i_2 k r} I_{i_2 k r}}{r^3} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\lambda_{i_2} G_{i_2} F_{i_2}}{r} \left[ (1 + \bar{h}_{i_2}) \bar{\psi}_2 - \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right]^2 \right\} d\theta \Big|_{\xi=\xi_{i_2}}; \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$A_o = \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} (q_1 u + q_2 v + q_3 w) r^2 d\xi d\theta + \int_0^{2\pi} (T_1 u + S v + Q_1 w + M_1 \psi_1) r d\theta \Big|_0^{L/r}; \quad (1.6)$$

$$V_o = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left\{ C_\rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \bar{K}_\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right) + \bar{D}_\rho \left[ \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} r^2 d\xi d\theta; \quad (1.7)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{k_1} \rho_{i_1} \int_0^{L/r} \left\{ r F_{i_1} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{I_{i_1\theta}}{r} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{I_{i_1kr}}{r} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 \right\} \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} d\xi; \quad (1.8)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{i_2=1}^{k_2} \rho_{i_2} \int_0^{2\pi} \left\{ r F_{i_2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{h}_{i_2} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{h}_{i_2} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{I_{i_2kr}}{r} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{I_{i_2\xi}}{r} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 \right\} \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} d\theta; \quad (1.9)$$

$$V_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_m} \mathfrak{M}_j \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{l}_j \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{l}_j \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \Big|_{\xi=\xi_j} \Big|_{\theta=\theta_j}. \quad (1.10)$$

Здесь принято:  $U_o, U_1, U_2$  – потенциальная энергия обшивки, продольных и кольцевых ребер;  $V_o, V_1, V_2, V_m$  – кинетическая энергия обшивки, продольных, кольцевых ребер и присоединенных сосредоточенных масс;  $A_o$  – работа внешних сил, приложенных к оболочке;  $C_{ij}, K_{ij} = r\bar{K}_{ij}, D_{ij} = r^2\bar{D}_{ij}$  – приведенные коэффициенты жесткости слоистой оболочки, определяемые по формулам из [1];  $C_\rho, K_\rho = r\bar{K}_\rho, D_\rho = r^2\bar{D}_\rho$  – приведенные характеристики плотности слоистой оболочки [1];  $u, v, w, \psi_1 = \bar{\psi}_1 / r, \psi_2 = \bar{\psi}_2 / r$  – осевое, окружное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, а также полные углы поворота поперечного сечения вокруг кольцевой и продольной координат, соответственно;  $\xi = x / r, \theta = y / r$  – безразмерные продольная и кольцевая координаты;  $t$  – время;  $r, L$  – радиус и длина оболочки;  $k_1, k_2, k_m$  – число продольных, кольцевых ребер и присоединенных масс;  $E_i, G_{i_1kr}, G_{i_1}, \lambda_{i_1}, \rho_{i_1}, E_{i_2}, G_{i_2kr}, G_{i_2}, \lambda_{i_2}, \rho_{i_2}$  – модули упругости при растяжении, кручении и сдвиге, коэффициент формы поперечного сечения, плотность  $i_1$ -го продольного ребра и  $i_2$ -го кольцевого ребра;  $F_{i_1}, h_{i_1} = r\bar{h}_{i_1}, I_{i_1\theta}, I_{i_1kr}, \theta_{i_1}, F_{i_2}; h_{i_2} = r\bar{h}_{i_2}, I_{i_2\theta}, I_{i_2kr}, \xi_{i_2}$  – площадь поперечного сечения, эксцентриситет, момент инерции поперечного сечения относительно соответствующей координатной линии, момент инерции при кручении, координата линии контакта  $i_1$ -го продольного ребра и  $i_2$ -го кольцевого ребра, соответственно;  $\mathfrak{M}_j, l = r\bar{l}_j, \xi_j, \theta_j$  – величина массы, длина консоли, продольная и кольцевая координаты  $j$ -й присоединенной массы;  $q_1, q_2, q_3, T_1, S, Q_1, M_1$  – компоненты внешней нагрузки, действующие на поверхность и торцы оболочки.

Отметим, что выражения для энергий (1.3) – (1.10) приведены в перемещениях точек срединной поверхности оболочки. При их выводе использованы соотношения связи между перемещениями точек осей ребер, центра тяжести масс и перемещениями точек срединной поверхности, аналогичные формулам, приведенным в [2 – 4, 8].

Уравнения движения рассматриваемой упругой системы получены, исходя из принципа стационарности действия, согласно которому

$$\delta W = 0 \quad (W = \int_{t_1}^{t_2} (V - U) dt \text{ – действие по Гамильтону}). \quad (1.11)$$

Подставив в (1.11) выражения (1.1) – (1.10), для любого фиксированного момента времени получим следующую систему разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left\{ C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} + C_{12} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \bar{K}_{11} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \xi^2} + \bar{K}_{66} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + (\bar{K}_{12} + \bar{K}_{66}) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial \xi \partial \theta} \right\} \delta u d\theta d\xi - \sum_{i_1=1}^{k_1} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{E_{i_1} F}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{E_{i_1} F_i \bar{h}_{i_1}}{r} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \xi^2} \right] \delta u d\xi \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} + \\ & + \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left( r^2 C_\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r K_\rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} \right) \delta u d\xi d\theta + \sum_{i_1=1}^{k_1} \rho_{i_1} F_{i_1} r \int_0^{L/r} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} \right) a_\xi \delta u d\xi \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} + \\ & + \sum_{i_2=1}^{k_2} \rho_{i_2} F_{i_2} r \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{h}_{i_2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} \right) b_\xi \delta u \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} d\theta + \sum_{j=1}^{k_m} \mathfrak{M}_j \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{l}_j \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} \right) \delta u \Big|_{\xi=\xi_j} \Big|_{\theta=\theta_j} = \\ & = - \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} q_1 r^2 \delta u d\xi d\theta; \\ & - \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left[ (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - C_{23} v + (C_{22} + C_{23}) \frac{\partial w}{\partial \theta} + (K_{66} + K_{12}) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi \partial \theta} + \right. \\ & \left. + K_{66} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi^2} + K_{22} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} - C_{23} r \psi_2 \right] \delta v d\theta d\xi - \sum_{i_2=1}^{k_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{E_{i_2} F_{i_2}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{K_{i_2} G_{i_2} F_{i_2}}{r} v + \right. \\ & \left. + \left( \frac{E_{i_2} F_{i_2}}{r} + \frac{K_{i_2} G_{i_2} F_{i_2}}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{E_{i_2} F_{i_2} \bar{h}_{i_2}}{r} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial \theta^2} - \frac{K_{i_2} G_{i_2} F_{i_2}}{r} (1 + \bar{h}_{i_2}) \bar{\psi}_2 \right\} \delta v d\theta \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} + \\ & + \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left( r^2 C_\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + r K_\rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial t^2} \right) \delta v d\xi d\theta + \sum_{i_1=1}^{k_1} \rho_{i_1} F_{i_1} r \int_0^{L/r} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial t^2} \right) \delta v \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} d\xi + \\ & + \sum_{i_2=1}^{k_2} \rho_{i_2} F_{i_2} r \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \bar{h}_{i_2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial t^2} \right) \delta v \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} d\theta + \sum_{j=1}^{k_m} \mathfrak{M}_j \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \bar{l}_j \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial t^2} \right) \delta v \Big|_{\xi=\xi_j} \Big|_{\theta=\theta_j} = \\ & = - \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} q_2 r^2 \delta v d\xi d\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left[ C_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial \theta} + C_{23} \frac{\partial v}{\partial \theta} - C_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - C_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + C_{22} w + (C_{23} + \bar{K}_{22}) \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} \right] \delta w d\theta d\xi - \\
& - \sum_{i_1=1}^{k_1} \int_0^{L/r} \left\{ \frac{K_{i_1} G_{1i_1} F_{i_1}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \left[ \frac{K_{i_1} G_{1i_1} F_{i_1}}{r} \right] \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right\} \delta w d\xi \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} - \sum_{i_2=1}^{k_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \left( -\frac{E_{i_2} F_{i_2}}{r} + \frac{K_{i_2} G_{1i_2} F_{i_2}}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + \frac{K_{i_2} G_{1i_2} F_{i_2}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{E_{i_2} F_{i_2}}{r} w - \left[ \frac{K_{i_2} G_{1i_2} F_{i_2}}{r} (1 + \bar{h}_{i_2}) + \frac{E_{i_2} F_{i_2} \bar{h}_{i_2}}{r} \right] \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} \right\} \delta w d\theta \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} + \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} r^2 C_\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w d\xi d\theta + \sum_{i_1=1}^{k_1} \rho_{i_1} F_{i_1} r \int_0^{L/r} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w d\xi \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} + \\
& + \sum_{i_2=1}^{k_2} \rho_{i_2} F_{i_2} r \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w d\theta \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} + \sum_{j=1}^{k_m} \mathfrak{M}_j \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \Big|_{\xi=\xi_j} \Big|_{\theta=\theta_j} = - \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} q_3 r^2 \delta w d\xi d\theta; \\
& - \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left[ \bar{K}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \bar{K}_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (\bar{K}_{12} + \bar{K}_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} + (C_{13} + \bar{K}_{12}) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \right. \\
& \left. + \bar{D}_{11} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \xi^2} + \bar{D}_{66} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \theta^2} - C_{13} \bar{\psi}_1 + (\bar{D}_{66} + \bar{D}_{12}) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial \xi \partial \theta} \right] \delta \bar{\psi}_1 d\xi d\theta - \quad (1.12) \\
& - \sum_{i_1=1}^{k_1} \int_0^{L/r} \left\{ \frac{E_{i_1} F \bar{h}_{i_1}}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{K_{i_1} G_{1i_1} F_{i_1}}{r} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left( \frac{E_{i_1} F \bar{h}_{i_1}^2}{r} + \frac{E_{i_1} I_{i_1 \theta}}{r^3} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \xi^2} + \left( \frac{E_{i_1} F}{r} \bar{h}_{i_1}^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{K_{i_1} G_{1i_1} F_{i_1}}{r} \bar{\psi}_1 \right\} \delta \bar{\psi}_1 d\xi \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} - \sum_{i_2=1}^{k_2} \int_0^{2\pi} \frac{G_{i_2} I_{i_2 kr}}{r^3} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \theta^2} \delta \bar{\psi}_1 d\theta \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} + \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left( r K_\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D_\rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} \right) \delta \bar{\psi}_1 d\xi d\theta + \sum_{i_1=1}^{k_1} \int_0^{L/r} \left[ r \rho_{i_1} F_{i_1} \bar{h}_{i_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\rho_{i_1}}{r} (F_{i_1} r^2 \bar{h}_{i_1}^2 + \right. \\
& \left. + I_{i_1 \theta}) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} \right] \delta \bar{\psi}_1 \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} d\xi + \sum_{i_2=1}^{k_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \rho_{i_2} b_\xi \left[ F_{i_2} \bar{h}_{i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left( F_{i_2} \bar{h}_{i_2}^2 + \frac{I_{i_2 kr}}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} \right] \delta \bar{\psi}_1 \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} d\theta + \\
& + \sum_{j=1}^{k_m} \mathfrak{M}_j \bar{l}_j \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{l}_j \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} \right) \delta \bar{\psi}_1 \Big|_{\xi=\xi_j} \Big|_{\theta=\theta_j} = 0; \\
& - \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left[ (\bar{K}_{12} + \bar{K}_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \bar{K}_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \bar{K}_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - C_{23} v + \left( \frac{\bar{K}_{22}}{r_{2\xi}} + C_{23} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \xi \partial \theta} + \bar{D}_{22} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial \theta^2} + \bar{D}_{66} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial \xi^2} - C_{23} \bar{\psi}_2 \right] \delta \bar{\psi}_2 d\xi d\theta -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i_1=1}^{k_1} \int_0^{L/r} \frac{G_{i_1 k r} I_{i_1 k r}}{r^3} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial \xi^2} \delta \bar{\psi}_2 \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} d\xi - \sum_{i_2=1}^{k_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{E_{i_2} F_{i_2} \bar{h}_{i_2}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \right. \\
& \left. - \frac{K_{i_2} G_{i_2} F_{i_2}}{r} (1 + \bar{h}_{i_2}) v + \left[ \frac{E_{i_2} F_{i_2} \bar{h}_{i_2}}{r} + \frac{K_{i_2} G_{i_2} F_{i_2}}{r} (1 + \bar{h}_{i_2}) \right] \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + \left( \frac{E_{i_2} F_{i_2} \bar{h}_{i_2}^2}{r} + \frac{E_{i_2} I_{i_2 \xi}}{r^3} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial \theta^2} - \frac{K_{i_2} G_{i_2} F_{i_2}}{r} (1 + \bar{h}_{i_2})^2 \bar{\psi}_2 \right\} \delta \bar{\psi}_2 \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} d\theta + \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^{L/r} \left( r K_\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + D_\rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial t^2} \right) \delta \bar{\psi}_2 d\xi d\theta + \sum_{i_1=1}^{k_1} \int_0^{L/r} \left\{ r \rho_{i_1} F_{i_1} \bar{h}_{i_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\rho_{i_1}}{r} (F_{i_1} r^2 \bar{h}_{i_1}^2 + \right. \\
& \left. + I_{i_1 k r}) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial t^2} \right\} \delta \bar{\psi}_2 \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} d\xi + \sum_{i_2=1}^{k_2} \int_0^{2\pi} r \rho_{i_2} \left[ F_{i_2} \bar{h}_{i_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left( F_{i_2} \bar{h}_{i_2}^2 + \frac{I_{i_2 \xi}}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial t^2} \right] \delta \bar{\psi}_2 \Big|_{\xi=\xi_{i_2}} d\theta + \\
& + \sum_{j=1}^{k_m} \mathfrak{M}_j \bar{I}_j \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \bar{I}_j \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial t^2} \right) \delta \bar{\psi}_2 \Big|_{\xi=\xi_j} \Big|_{\theta=\theta_j} = 0.
\end{aligned}$$

Получены также естественные граничные условия на торцах оболочки:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \left( C_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial \theta} + C_{12} w + \bar{K}_{11} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} + \bar{K}_{12} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} \right) \delta u \Big|_0^{L/r} d\theta + \\
& + \sum_{i_1=1}^{k_1} \frac{E_{i_1} F_{i_1}}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right) \delta u \Big|_0^{L/r} \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} r T_1 \delta u \Big|_0^{L/r} d\theta = 0; \\
& \int_0^{2\pi} \left[ C_{66} \frac{\partial u}{\partial \theta} + C_{66} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{K}_{66} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \theta} + \bar{K}_{66} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \xi} \right] \delta v \Big|_0^{L/r} d\theta + \int_0^{2\pi} r S \delta v \Big|_0^{L/r} d\theta = 0; \\
& \int_0^{2\pi} C_{13} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} - \bar{\psi}_1 \right) w \Big|_0^{L/r} d\theta + \sum_{i_1=1}^{k_1} \frac{K_{i_1} G_{i_1} F_{i_1}}{r} \left[ \frac{\partial w}{\partial \xi} - \bar{\psi}_1 \right] \delta w \Big|_0^{L/r} \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} + \int_0^{2\pi} r Q_1 \delta w d\theta \Big|_0^{L/r} = 0; \\
& \int_0^{2\pi} \left[ \bar{K}_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{K}_{12} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \bar{K}_{12} w + \bar{D}_{11} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} + \bar{D}_{12} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} \right] \delta \bar{\psi}_1 \Big|_0^{L/r} d\theta + \tag{1.13} \\
& + \sum_{i_1=1}^{k_1} \left[ \frac{E_{i_1} F_{i_1} \bar{h}_{i_1}}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right) + \frac{E_{i_1} I_{i_1 \theta}}{r^3} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right] \delta \bar{\psi}_1 \Big|_0^{L/r} \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_1 b_\xi \delta \bar{\psi}_1 d\theta \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} = 0; \\
& \int_0^{2\pi} \left[ \bar{K}_{66} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{K}_{66} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \bar{D}_{66} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \xi} + \bar{D}_{66} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \theta} \right] \delta \bar{\psi}_2 \Big|_0^{L/r} d\theta + \\
& + \sum_{i_1=1}^{k_1} \frac{G_{i_1 k r} I_{i_1 k r}}{r^3} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \xi} \delta \bar{\psi}_2 \Big|_0^{L/r} \Big|_{\theta=\theta_{i_1}} = 0.
\end{aligned}$$

Отметим, если какое-то граничное условие (1.13) не выполняется автоматически, соответствующее уравнение дополняет систему уравнений (1.12).

## §2. Методика решения задач.

Перемещения точек срединной поверхности оболочки представляем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u &= \cos \omega t \sum_{n=0}^N \cos n\theta \sum_{i=-1}^{M+1} u_{1n}^i B_3^i(\xi); & v &= \cos \omega t \sum_{n=1}^N \sin n\theta \sum_{i=-1}^{M+1} u_{2n}^i B_3^i(\xi); \\
 w &= \cos \omega t \sum_{n=0}^N \cos n\theta \sum_{i=-1}^{M+1} u_{3n}^i B_3^i(\xi); \\
 \bar{\psi}_1 &= \cos \omega t \sum_{n=0}^N \cos n\theta \sum_{i=-1}^{M+1} u_{4n}^i B_3^i(\xi); & \bar{\psi}_2 &= \cos \omega t \sum_{n=1}^N \sin n\theta \sum_{i=-1}^{M+1} u_{5n}^i B_3^i(\xi),
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний в задаче о собственных колебаниях (принимается равной нулю при решении задач статики);  $n$  – параметр волнообразования в кольцевом направлении;  $N$  – число членов тригонометрического ряда, удерживаемых в кольцевом направлении;  $M + 3$  – число узлов сплайн-сетки вдоль образующей оболочки (равно числу точек коллокаций  $mk$ , включая две точки на границах);  $u_{1n}^i, u_{2n}^i, \dots, u_{5n}^i$  – неизвестные константы, определяемые из системы алгебраических уравнений, полученной методом коллокации;  $B_3^i$  – бета-сплайн третьей степени.

Подставив (2.1) в (1.12, 1.13), выполним дифференцирование и интегрирование по координате  $\theta$ . В направлении оси  $\xi$  построим сетку с шагом  $\Delta\xi = L/rM$ . Точки коллокации выбираем согласно [5, 6]. Таким образом, задача сведена к системе неоднородных алгебраических уравнений (при решении задачи о напряженно-деформированном состоянии), или к системе однородных алгебраических уравнений (при решении задачи на собственные значения). Далее использованы стандартные программы математического обеспечения.

## §3. Числовые результаты.

Изложенная выше методика исследования задач статики и динамики цилиндрических замкнутых многослойных оболочек с конструктивными и технологическими особенностями (ребра жесткости, присоединенные сосредоточенные массы) при произвольных граничных условиях реализована в виде вычислительной программы.

С помощью разработанного пакета вычислительных программ проведено исследование практической сходимости результатов расчета для двух типов граничных условий и выполнено сравнение полученных данных с результатами других авторов.

На примере оболочки, рассмотренной в [3], ( $\nu = 0,3$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $r = L = 0,25$  м,  $h = 10^{-3}$  м) исследована сходимость решения в зависимости от числа точек коллокации. Оболочка была подкреплена регулярной системой из восьми продольных ребер, обладающих только жесткостью на изгиб  $I_{i\xi} = 82,984 \cdot 10^{-12}$  м<sup>4</sup>.

В таблице приведены значения максимальных величин прогибов и изгибающих моментов, полученных для продольно подкрепленной оболочки в сечении  $\xi = 0,5L/r$  при различных значениях  $mk$ . Внешняя нагрузка, как и ранее в [3], принята в виде  $q_3 = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi r}{L} \xi\right)$ . Расчет параметров напряженно-деформированного состояния оболочки выполнен при удержании в кольцевом направлении в рядах (1.14) членов с  $n = 0,8, \dots, 64$  ( $N=9$ ).

Из табл. видно, что с увеличением числа точек коллокации значения искомых величин стремятся к значениям, близким к полученным в [3] в тригонометрических рядах при  $N = 9$ . Все приведенные величины отличаются от полученных ранее менее чем на 1%, за исключением кольцевого момента  $\bar{M}_2$  на ребре (1,3%), где сходимость

решения наихудшая. Кроме этого, следует отметить, что ранее задача рассматривалась в классической постановке, здесь – на основе сдвиговой теории по модели, предложенной С.П. Тимошенко [17] для балок.

$\theta$	0	$\pi/16$	$\pi/8$	$3\pi/16$	$\pi/4$
$\bar{w}$					
данные [3]	1,310	1,355	1,414	1,444	1,451
$mk = 26$	1,315	1,357	1,412	1,439	1,445
$mk = 58$	1,311	1,355	1,413	1,443	1,450
$mk = 90$	1,310	1,355	1,413	1,443	1,451
$mk = 122$	1,310	1,355	1,414	1,444	1,451
$mk = 154$	1,310	1,355	1,414	1,444	1,451
$\bar{M}_1$					
данные [3]	0,1390	0,2064	0,2334	0,2330	0,2294
$mk = 26$	0,1433	0,2075	0,2322	0,2312	0,2277
$mk = 58$	0,1396	0,2066	0,2331	0,2325	0,2289
$mk = 90$	0,1389	0,2065	0,2333	0,2327	0,2291
$mk = 122$	0,1388	0,2065	0,2333	0,2327	0,2291
$mk = 154$	0,1387	0,2065	0,2333	0,2327	0,2291
$\bar{M}_2$					
данные [3]	-0,1493	0,0544	0,1168	0,1013	0,0861
$mk = 26$	-0,1345	0,0567	0,1137	0,0975	0,0827
$mk = 58$	-0,1449	0,0551	0,1161	0,1002	0,0849
$mk = 90$	-0,1466	0,0549	0,1165	0,1006	0,0852
$mk = 122$	-0,1471	0,0548	0,1167	0,1007	0,0853
$mk = 154$	-0,1473	0,0548	0,1167	0,1007	0,0853

Для различных вариантов подкрепления оболочки, геометрические и физические параметры которой приведены выше, при  $q_3 = 1$  проведено исследование сходимости решения в зависимости от числа точек коллокации. На рис. 1 показано изменение максимальных значений прогиба. Кривая 1 построена для неподкрепленной шарнирно опертой оболочки ( $v = w = T_1 = M_1 = M_2 = 0$  при  $\xi = 0; L/r$ ), кривые 2, 3 – для шарнирно опертой оболочки, подкрепленной продольными ребрами, соответственно, на ребре и посредине между ребрами, кривая 4 – для неподкрепленной оболочки, жестко защемленной на торцах ( $u = v = w = \psi_1 = \psi_2 = 0$  при  $\xi = 0; L/r$ ).

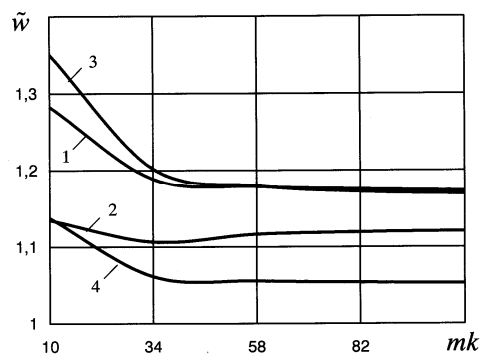


Рис. 1

Как следует из расчетов, различие между значениями, полученными при  $mk = 34$  и  $mk = 106$  составляет 1,2% – 1,6% (кривые 1, 2, 4), 2,8% (кривая 3). При  $mk = 46$  это различие находится в пределах 0,2%.

На примере оболочки с указанными параметрами, подкрепленной как продольными ребрами, так и двумя кольцевыми с жесткостью на изгиб  $I_{i_2\theta} = 163,978 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4$ , выполнена оценка точности вычислений частот и форм собственных колебаний при различном числе точек сплайн-сетки. Расчеты выполнены для нескольких значений  $n$



при  $mk = 130, 154, 226, 424$ . Сравнение собственных значений и коэффициентов форм собственных колебаний, полученных при  $mk = 130$ , с результатами, полученными при  $mk = 424$ , показало, что с погрешностью не более 5% определяется 180 первых значений, при  $mk = 154$  – 420 первых значений, при  $mk = 226$  – 810 значений. Такие оценки могут быть использованы при определении напряженно – деформированного состояния оболочки методом разложения решения по формам собственных колебаний при нестационарном динамическом нагружении.

Далее выполнен расчет трубки парогенератора атомного реактора с учетом шлама (эрозивно-коррозионного отложения), накапливаемого на ней в процессе эксплуатации. Трубка рассматривается как длинная оболочка, находящаяся под действием внутреннего давления. Представляет интерес исследование напряженного состояния, возникающего около опор в процессе накопления на трубке шлама. Параметры трубки, изготовленной из стали, следующие:  $E = 2,02 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $L/2 = 1,5 \text{ м}$  (расстояние от опоры до среднего сечения);  $r = 0,016 \text{ м}$ ; толщина стенки трубки  $h = 0,0015 \text{ м}$ .

Для оценки точности вычислений проведены предварительные расчеты трубки (как однослойной оболочки) при различных значениях шага сплайн-сетки, а именно при  $\Delta\xi = h/r$ ;  $2h/3r$ ;  $h/2r$ . Сравнение максимальных перемещений и усилий, полученных при указанных значениях  $\Delta\xi$ , показало, что отличие между результатами составляет менее 1%. Дальнейшие расчеты выполнены при  $\Delta\xi = 2h/3r$ .

Предполагалось, что шлам, образовавшийся на трубках парогенератора при некоторых величинах его жесткости, приводит к изменению условий закрепления трубки на опорных пластинах. Для оценки влияния данного фактора на напряженное состояние трубок проведены расчеты при изменяющейся величине внешнего опорного момента. На рис. 2 приведены зависимости изгибающего момента  $\tilde{M}_1$  и перерезывающей силы  $\tilde{Q}_1$  на участке длины оболочки, прилегающем к опоре, для случая шарнирного опирания (при отсутствии шлама) – кривые 1, для случая жесткого защемления торцов – кривые б, и при их упругой заделке – кривые 2 – 5. Кривые 2 получены при величине момента упругой заделки, составляющей 0,2 от величины опорного момента при жестком защемлении, кривые 3, 4, 5, соответственно, при 0,4; 0,6; 0,8 от величины того же момента. Из графиков следует, что увеличение жесткости шлама в месте опор трубок может привести к увеличению максимального изгибающего момента  $\tilde{M}_1$  и, соответственно, нормальных осевых напряжений в три раза по сравнению с максимальным изгибающим моментом при отсутствии шлама (сечение  $x = 2h$ ,  $\tilde{M}_1 = 8,86$ ). При этом абсолютная величина перерезывающей силы увеличивается вдвое.

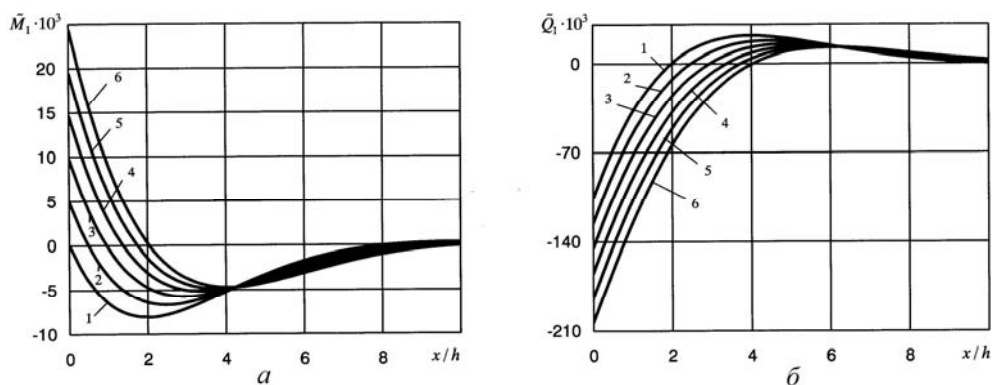


Рис. 2

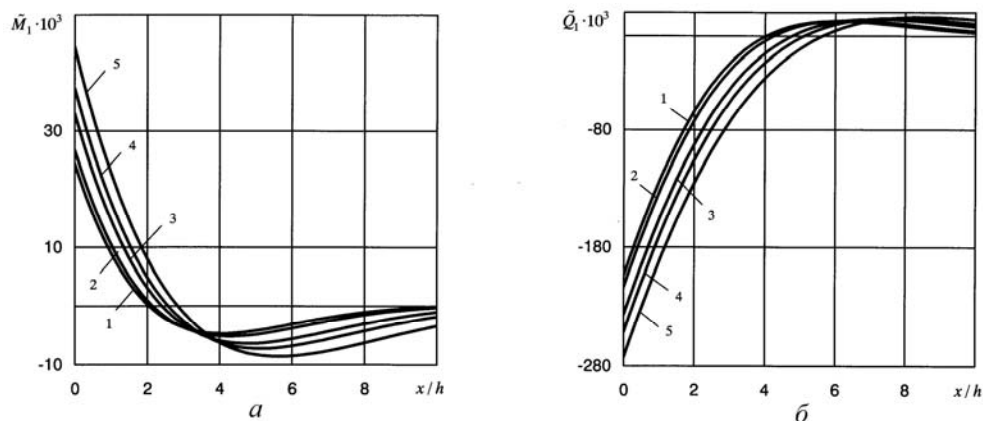


Рис. 3

На рис. 3 приведены зависимости тех же величин для случая двухслойной жестко защемленной оболочки. Толщина наружного слоя, образованного шламом, принята равной толщине оболочки без шлама ( $h = \delta_1 + \delta_2 = 0,003$  м). Модуль упругости этого слоя варьировался в пределах от 0 до  $E = 2,02 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>. Кривые 1 построены при  $E_2/E = 0$ ; кривые 2 – при  $E_2/E = 1/50$ ; кривые 3 – при  $E_2/E = 1/10$ ; кривые 4 – при  $E_2/E = 1/5$ ; кривые 5 – при  $E_2/E = 1$ . Из графиков видно, что с увеличением жесткости шлама изгибающий момент и перерезывающая сила в опорном сечении также возрастают. Таким образом, наличие шлама, препятствующего угловым перемещениям стенок трубки и увеличивающего жесткость опоры, может привести к увеличению опорного изгибающего момента не более чем в 5,5 раза, а перерезывающей силы на опоре – не более, чем в 2,6 раза.

Приведенные результаты могут быть использованы для оценки уровня напряжений в конкретных случаях. Размерная величина перемещения может быть определена с помощью соотношения  $w = qr^2 \tilde{w} / C_{11}$ , размерные величины усилий – умножением безразмерных на  $qr$ , размерные величины моментов – на  $qr^2$ .

#### Заключение.

На примере нескольких оболочек при двух видах граничных условий исследована практическая сходимость максимальных прогибов в зависимости от числа точек коллокации при статическом нагружении. Получено, что при расчете таких оболочек, перемещения точек срединной поверхности могут быть определены с точностью до 3% при числе точек коллокации не менее  $mk = 34$ . Исследована также сходимость решения при определении частот и форм собственных колебаний оболочки с продольным и кольцевым подкреплением.

Выполнен расчет напряженного состояния трубки парогенератора атомного реактора с учетом условий эксплуатации, а именно шлама, накапливаемого на ее стенках. Получено, что с увеличением плотности и жесткости шлама внутренние силы, от величины которых существенно зависит несущая способность трубки, достигают максимальных значений в опорном сечении. При этом изгибающий момент может превысить максимальный изгибающий момент в трубке без шлама не более чем в 5,5 раза, а перерезывающая сила – не более чем в 2,6 раза.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику розрахунку статичного напружено-деформованого стану і власних коливань ребристих багатопарових ортотропних циліндричних оболонок з приєднаними масами на основі методу сплайн – колокації. На числових прикладах виконана апробація розв'язку та досліджена його практична збіжність в залежності від числа точок колокації. Виконано розрахунок напружено-деформованого стану трубок парогенератора атомного реактора з врахуванням умов експлуатації.

платуації. Отримано, що із збільшенням жорсткості шламу внутрішні сили, від величини яких суттєво залежить несуча здатність трубки, досягають максимальних значень в опорному перерізі. При цьому згинний момент і перерізувальна сила суттєво перевищують максимальний згинний момент в трубці без шламу.

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1980. – 368 с. – (Методы расчета оболочек: в 5-ти томах. Т.2).
3. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
4. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Ревуцкий В.Н., Скосаренко Ю.В., Телалов А.И., Фиалко С.Ю. Колебания ребристых оболочек вращения. – К.: Наук. думка, 1988. – 172 с.
5. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.Н. Численные методы. – К.: «А.С.К.», 2002. – 448 с. (Механика композитов: в 12-ти томах. Т.11).
6. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
7. Banerjee J.R., Cheung C.W., Morisima R., Perera M., Njuguna J. Free vibration of a three-layered sandwich beam using the dynamic stiffness method and experiment // Int. J. of Solids and Struct. – 2007. – 44, N 22-23. – P. 7543 – 7563.
8. Golovko K.G., Lugovoi P.Z., Meish V.F. Solution of Axisymmetric Dynamic Problems for Cylindrical Shells on Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 12. – P. 1390 – 1395.
9. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Solution of Stress-Strain Problems for Complex-Shaped Plates in a Refined Formulation // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 326 – 333.
10. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Analysis of the Stress-Strain State of Complex-Shaped Plates // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 6. – P. 695 – 701.
11. Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamics of Inhomogeneous Shell System under Non – Stationary Loading (Surveys) // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 5. – P. 481 – 537.
12. Lugovoi P.Z., Sirenko V.N., Prokopenko N.Ya., Klimenko K.V. Influence of the Parameters of a Non-Constant Disturbing Load on the Transient Process of Vibration of a Ribbed Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 6. – P. 680 – 687.
13. Lugovoi P.Z., Sirenko V.N., Skosarenko Yu.V., Batutina T.Ya. Dynamics of a Discretely Reinforced Shell under a Local Impulsive Load // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 2. – P. 173 – 180.
14. Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk A.V. Dynamics of a Three – Layer Elliptic Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 172 – 179.
15. Qatu M.S. Vibration of Laminated Shells and Plates. – New-York: Academic Press, 2004. – 426 p.
16. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000 – 2010 // Open J. of Composite Materials, 2012. – N 2. – P. 61 – 86.
17. Timoshenko S., Young D.H., Weaver W. Vibration problems in engineering. – New York: Wiley, 1974. – 521 p.

Поступила 21.05.2018

Утверждена в печать 04.06.2019