Ф.А.Алиев[1], В.Б.Ларин[2]

ОБ УПРАВЛЕНИИ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

[1]Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, ул. Халилова, 23, АЗ 1148, Баку, Азербайджан; e-mail: f_aliev@yahoo.com;
[2]Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua

Abstract. A problem of control of the linear system by its output is considered. It is supposed that the system has one input and all phase vector is observable. Further, the problem is also considered for a case when the system has a few inputs. The computing procedures are offered which allow to find the coefficients of feedback chain, when the coefficient of characteristic polynomial of the closed system are given. It is noted that the offered procedures can be realized on the basis of the MATLAB package. As the application of the offered computing procedures, the problem of increase of reliability of the control system by quadrocopter lateral movement is considered.

Key words: control of spectrum, reliability of a control system, four-rotor mini rotorcraft.

Введение.

В инженерной практике значительное место занимает задача управления механическими системами в той или иной постановке (см., например [2, 6, 7]), в частности, задача управления спектром замкнутой системы по выходной переменной. Отметим, что в общем случае эта задача относится к задачам NP-сложности [4]. Однако эта задача при различных упрощающих предположениях привлекала и продолжает привлекать внимание исследователей [1, 4, 10]. Ниже рассматривается эта задача в предположении, что доступен наблюдению весь фазовый вектор и система имеет один вход. Далее рассматривается эта задача в случае, когда система имеет несколько входов. Предлагается вычислительная процедура, позволяющая находить искомые коэффициенты регулятора. Отмечается, что эта процедура допускает реализацию путем использования стандартных процедур пакета MATLAB [5]. В качестве иллюстрации, предложенной вычислительной процедуры, рассматривается задача повышения надежности управления боковым движением квадрокоптера [8].

§1. Общие соотношения.

Рассмотрим линейную систему с полностью наблюдаемым фазовым вектором и одним входом

$$\dot{x} = Ax + Bu\,; \quad y = Ix. \tag{1.1}$$

В (1.1) $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times 1}$. Здесь и далее I – единичная матрица соответствующего размера, т.е. выход $y = x$. Цепь обратной связи определяется регулятором $K \in R^{1\times n}$, т.е. управляющий сигнал u формируется вектором K:

$$u = Kx\,. \tag{1.2}$$

Обозначим $P(Y)$ – характеристический полином матрицы Y. Так, если в (1.2) $K = K_i = \begin{bmatrix} K_{i1}, & K_{i2}, & \ldots, & K_{in} \end{bmatrix}$ – вектор коэффициентов цепи обратной связи, то

$$P(A + BK_i) = \lambda^n + \alpha_{2i}\lambda^{n-1} + \ldots \alpha_{n+1i} \, . \tag{1.3}$$

Как следствие линейности коэффициентов α_{ji} относительно коэффициентов цепи обратной связи, запишем:

$$\alpha_{ji} = a_{j1}K_{i1} + a_{j2}K_{i2} + \cdots + a_{jn}K_{in} + z(j), \quad j = \overline{2, n+1}, \tag{1.4}$$

где слагаемые $z(j)$ являются коэффициентами характеристического полинома матрицы A:

$$P(A) = \lambda^n + z(2)\lambda^{n-1} + \ldots + z(n+1) \, .$$

Таким образом, при заданных коэффициентах характеристического полинома (или спектра) замкнутой системы, задача определения соответствующих коэффициентов цепи обратной связи включает в себя следующие этапы.

I. Формирование системы линейных уравнений, позволяющие определить коэффициенты a_{js}, фигурирующие в (1.4). В свою очередь, эта процедура включает следующие шаги.

1. Выбор n векторов коэффициентов цепи обратной связи $K_i (i = 1, \ldots, n)$ таких, что матрица H:

$$H = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}$$

была бы матрицей полного ранга.

2. Определение коэффициентов $p_i(j)$ характеристических полиномов P_i соответствующих регуляторам K_i, в том числе, и коэффициентов характеристического полинома матрицы A (вектор z).

3. Формирование из этих коэффициентов матрицы b:

$$b = \begin{bmatrix} p_1(2) - z(2) & p_1(3) - z(3) & \ldots & p_1(n+1) - z(n+1) \\ \vdots & & & \\ p_n(2) - z(2) & p_{n1}(3) - z(3) & \ldots & p_n(n+1) - z(n+1) \end{bmatrix}.$$

4. Определение матрицы A_* искомых коэффициентов a_{ji} (см. (1.4)):

$$A_* = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \ldots & a_{n+1n} \end{bmatrix}$$

из системы уравнений:

$$HA_*^T = b \, . \tag{1.5}$$

В (1.5) и далее верхний индекс «T» означает транспонирование.

II. Определение коэффициентов регулятора $\overline{K}$, соответствующих заданным коэффициентам $\overline{\alpha}_j$ характеристического полинома.

Итак, после определения матрицы A_*, считая заданными коэффициенты $\overline{\alpha}_j$ характеристического полинома, искомые коэффициенты регулятора (компоненты вектора $\overline{K}$) определяются следующей системой уравнений:

$$A_*\overline{K}^T = b_*, \quad b_* = \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_2 - z(2) \\ \overline{\alpha}_3 - z(3) \\ \vdots \\ \overline{\alpha}_{n+1} - z(n+1) \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Отметим, что указанные выше вычислительные операции могут быть реализованы стандартными процедурами пакета MATLAB. Так, вычисление характеристического полинома матрицы, как и определение коэффициентов характеристического полинома при заданном спектре осуществляется процедурой poly.m пакета MATLAB.

Решение уравнений (1.5), (1.6) может быть выполнено процедурой "\" пакета MATLAB.

В заключение этого пункта кратко рассмотрим задачу, когда система (1.1) имеет s входов, т.е. матрица $B \in R^{n\times s}$. В этом случае можно использовать описанные выше процедуры, если можно выбрать матрицу $F \in R^{s\times 1}$ такую, что система $A+BF$ (которая имеет один вход) будет управляема.

Проиллюстрируем описанные выше процедуры примерами.

Пример 1. Фигурирующие в (1.1) матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Для определения матрицы A_1 выберем следующие коэффициенты цепи обратной связи:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad K_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Используя процедуру poly.m пакета MATLAB, найдем характеристические полиномы следующих систем:

$$P(A) = z = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -10 \end{bmatrix}; \; P_1(A+BK_1) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -30 \end{bmatrix}; \; P_2(A+BK_2) = \begin{bmatrix} 1 & -15 & -64 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, фигурирующие в (1.5) матрицы b и H имеют вид

$$H = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \; b = \begin{bmatrix} p_1(2)-z(2) & p_1(3)-z(3) \\ p_2(2)-z(2) & p_2(3)-z(3) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 18 & 54 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что число обусловленности матрицы H (cond(H)) равно 14,9. Используя процедуру "\" пакета MATLAB, найдем, что матрица A_1 имеет вид

$$A_* = \left(H \setminus b\right)^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}.$$

Итак, пусть задан коэффициент характеристического полинома (вектор $\overline{\alpha} =$ $= \begin{bmatrix} 1 & \overline{\alpha}(2) & \overline{\alpha}(3) \end{bmatrix}$), т. е

$$P_z\left(A+BK\right) = \lambda^2 + \overline{\alpha}(2)\lambda + \overline{\alpha}(3)\,; \; \overline{\alpha}(2) = \overline{\alpha}(3) = 1\,. \tag{1.7}$$

Как уже отмечалось, если задан спектр замкнутой системы, то значения соответствующих коэффициентов характеристического полинома можно найти, используя процедуру poly.m пакета MATLAB.

Таким образом, фигурирующий в (1.6) вектор b_* имеет вид

$$b_* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_2 - z(2) \\ \bar{\alpha}_3 - z(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Согласно (1.6) получаем:

$$K = \left(A_* \backslash b_* \right)^T = \begin{bmatrix} -1,0833 & 1,3889 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином системы, замкнутой таким регулятором, имеет вид

$$P\left(A + BK \right) = \lambda^2 + \lambda + 1,$$

т.е. совпадает с заданным характеристическим полиномом.

Пример 2. Исходные данные совпадают с принятыми в примере 1, за исключением матрицы $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, т.е. система имеет два входа. Выберем матрицу F в виде

$$F = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Используя описанные выше процедуры в системе $A + BF$, получаем следующее значение коэффициентов обратной связи для такой системы:

$$K_0 = \begin{bmatrix} -0,2857 & -0,4286 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином системы $A + BFK_0$ совпадает с заданным полиномом (1.7). Управляющие сигналы, которые попадают на первый и второй входы определяются следующими соотношениями:

$$K = FK_0 = \begin{bmatrix} -1,4286 & -2,1429 \\ -0,5714 & -0,8571 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что возможно изменение «нагрузки» на один или другой исполнительные механизмы (при фиксированном характеристическом полиноме замкнутой системы) путем изменения матрицы F. Так, например, при $F = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,1254 & -0,5 \end{bmatrix}$; при $F = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ имеем $K = \begin{bmatrix} 2 & -6,3333 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

§2. Повышение надежности системы бокового движения квадрокоптера.

Кратко изложим суть задачи. В [3, 9] приводятся уравнения бокового движения квадрокоптера (см. (4.1) [9]). В этих уравнениях, которые записаны в форме (1.1), матрицы A и B имеют вид

$$\dot{x} = Ax + Bu; \tag{2.1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad g = 9,8; \; x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T.$$

Доступен наблюдению весь вектор, т.е. выход системы $y = x$. В [8] рассматривается эта задача в предположении, что может не наблюдаться координата x_3, т.е. имеет место «отказ» соответствующего датчика. В этой связи в [8] предлагается пополнить систему (2.1) наблюдателем, который позволяет получить оценку этой координаты. Таким образом, в фазовый вектор системы (2.1) добавляется еще координата наблюдателя, изменение которой описывается следующим уравнением (уравнение наблюдателя см. (3.7) [8]):

$$\dot{x}_5 = x_4 + Dx_5, \tag{2.2}$$

где константа D определяет динамические свойства наблюдателя. Таким образом, с учетом (2.2), фигурирующие в (2.1) матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & D \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T. \tag{2.3}$$

В [8] был синтезирован регулятор для системы (2.1) с учетом (2.3) в предположениях, что доступны наблюдению все 5 компонент фазового вектора x:

$$K = -\begin{bmatrix} 0,0548 & 0,2893 & 7,4427 & 7,1334 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Этому значению K соответствуют следующие собственные значения замкнутой системы:

$$-5,9623; \quad -0,6951; \quad -0,238 \pm 0,27i; \quad -D. \tag{2.5}$$

В случае, когда не наблюдается координата x_3 («отказ» соответствующего датчика) уравнение регулятора имеет вид (соотношение (6.11) [8]):

$$K = -\begin{bmatrix} 0,0548 & 0,2893 & 0 & 7,1334 & 7,4427 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

и ему при $D = -0,005$ соответствуют следующие собственные значения замкнутой системы:

$$-5,9610; \quad -0,7122; \quad -0,2301 \pm 0,2712i; \quad -0,005. \tag{2.7}$$

Отметим, что величина D влияет на качество оценки, которую дает наблюдатель (см. (3.4) [8]). Поэтому может возникнуть необходимость увеличивать величину $-D$. Однако, это может привести к потере устойчивости системы. Так, например, при $D = -0,005$ система с регулятором (2.6), согласно (2.7), является устойчивой, но, как отмечено в [8], при $D = -0,5$ эта система теряет устойчивость.

В этой связи возникает задача повышения запаса устойчивости системы с регулятором (2.4), т.е., когда доступны наблюдению все компоненты фазового вектора. Это, в свою очередь, позволяет системе сохранить свойство устойчивости при заданной величине D, в случае, когда «отказал» датчик, измеряющий координату x_3. Для этой цели можно использовать процедуры, описанные выше. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 3. Рассмотрим систему (2.3), предполагая, что регулятор цепи обратной связи определяется выражением (2.4). Спектр системы (2.3), замкнутой таким регулятором, имеет вид (2.5). Таким образом, как следует из структуры спектра (2.5), в этом случае (когда наблюдаются все компоненты фазового вектора) собственные значения определяются как собственные значения системы (2.1), замкнутой цепью обратной связи:

$$K_0 = -\begin{bmatrix} 0,0548 & 0,2893 & 7,4427 & 7,1334 \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

так и константой D, определяющей динамические процессы в наблюдателе. Таким образом, для расширения допустимого диапазона изменения константы D, имеется возможность повышать запас устойчивости всей системы, повышая запас устойчивости ее части, т.е. замкнутой системы (2.1). С этой целью можно задавать спектр замкнутой системы (2.1) и далее, используя описанные выше процедуры, определить коэффициенты соответствующего регулятора. Покажем это. Пусть в (1.1) матрицы A и B определяются (2.1). Для определения матрицы A_* выбираем следующие коэффициенты:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};\ K_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix};\ K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 & 12 \end{bmatrix};\ K_4 = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 17 & 2 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие характеристические полиномы и матрицы b имеют вид

$$P(A) = z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_1(A + BK_1) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & -19,6 & -9,8 \end{bmatrix};$$

$$P_2(A + BK_2) = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -7 & -58,8 & -49 \end{bmatrix};$$

$$P_3(A + BK_3) = \begin{bmatrix} 1 & -12 & -1 & -98 & -9,8 \end{bmatrix};$$

$$P_4(A + BK_4) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -17 & -156,8 & -147 \end{bmatrix};$$

$$b = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -19,6 & -9,8 \\ -8 & -7 & -58,8 & -49 \\ -12 & -1 & -98 & -9,8 \\ -2 & -17 & -156,8 & -147 \end{bmatrix}.$$

Фигурирующая в (1.5) матрица H :

$$H = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}$$

имеет число обусловленности равное 49.

Используя (1.5), получаем

$$A_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -9,8 & 0 & 0 \\ -9,8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученные данные позволяют рассмотреть задачу определения коэффициентов регулятора по заданному спектру замкнутой системы. Итак, повысим запас устойчивости замкнутой системы. Пусть задан спектр замкнутой системы, имеющей запас устойчивости больший, чем спектр (2.5):

$$-5,9623;\quad -0,6951;\quad -0,6 \pm 0,27i\ . \tag{2.9}$$

Спектру (2.9) соответствуют следующие коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 7,8574 & 12,5662 & 7,8553 & 1,7941 \end{bmatrix}.$$

Используя эти данные и соотношения (1.6), найдем коэффициенты цепи обратной связи, обеспечивающие заданный (2.9) спектр замкнутой системы. Согласно (1.6), в этом случае вектор коэффициентов цепи обратной связи $\bar{K}$ имеет вид:

$$\bar{K} = -\begin{bmatrix} 0,1831 & 0,8016 & 12,5662 & 7,8574 \end{bmatrix}.$$

В случае «отказа» датчика, измеряющего координату x_3, имеем

$$K = -\begin{bmatrix} 0,1831 & 0,8016 & 0 & 7,8574 & 12,5662 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Если $D = -0,5$, то система (2.3), замкнутая регулятором (2.10), имеет следующие собственные значения:

$$-5,6557; \quad -2,3506; \quad -0,0816 \pm 0,5937i; \quad -0,1879 .$$

Таким образом, в отличие от регулятора (2.6), регулятор (2.10) обеспечивает устойчивость системы и в случае $D = -0,5$. Следовательно, принятое повышение запаса устойчивости системы (см. (2.9)) оказалось достаточным для стабилизации системы с регулятором (2.10) при $D = -0,5$.

Заключение.

Рассмотрена задача управления замкнутой линейной системы по выходу. Предполагается, что система имеет один вход и доступен наблюдению весь фазовый вектор. Далее задача рассмотрена и в случае, когда система имеет несколько входов. Предложены вычислительные процедуры, позволяющие находить коэффициенты цепи обратной связи при заданных коэффициентах характеристического полинома замкнутой системы. Отмечается, что предложенные процедуры могут быть реализованы на базе пакета MATLAB.

В качестве приложения предложенных вычислительных процедур, рассмотрена задача повышения надежности системы управления боковым движением квадрокоптера [8].

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу управління замкнутою лінійною системою по її виходу. Передбачається, що система має один вхід і весь фазовий вектор доступний спостереженню. Далі задачу розглянуто і у випадку, коли система має кілька входів. Запропоновано обчислювальні процедури, що дозволяють знаходити коефіцієнти ланцюга зворотного зв'язку при заданих коефіцієнтах характеристичного полінома замкнутої системи. Відзначається, що запропоновані процедури можуть бути реалізовані на базі пакета MATLAB. Як ілюстрацію запропонованих обчислювальних процедур, розглянуто задачу підвищення надійності системи керування бічним рухом квадрокоптера.

1. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // Докл. Академии наук. – 2017. – **476**, № 3. – С. 260 – 263.
2. *Aliev F.A., Larin V.B.* Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms. – Amsterdam: Gordon and Breach Science publishers, 1998. – 261 p.
3. *Castillo P., Lozano R., Dzul A.* Stabilization of a Mini Rotorcraft with Four Rotors // IEEE Control Systems Magazine. – 2005. – P. 45 – 55.
4. *Fu M.* Pole placement via static output feedback is NP-hard // IEEE Trans. Autom.Contr. – 2004. – **49**, N 5. – P. 855 – 857.
5. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* LMI Control Toolbox – for Use with Matlab. – The MathWorks Inc. – 1995.
6. *Khoroshun A.S.* Stability of the Horizontal Flight of an Airplane // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 96 – 104.
7. *Khoroshun A.S.* Control of Takagi-Sugeno Fuzzy Fast/Slow Systems // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 4. – P. 443 – 453.
8. *Larin V.B.* Improving the Reliability of the Control Systems of a Quadcopter // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 4. – P. 454 – 462.
9. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Problem of Control System for Quadrocopter // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 342 – 348.
10. *Wang X.A.* On linear solution of the output feedback pole assignment problem // IEEE Trans. Autom. Contr. – 2013. – **58**, N 9. – P. 2354 – 2359.

Поступила 11.09.2018 Утверждена в печать 04.06.2019