

О. Н. Петрищев¹, М. И. Романюк²

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗВИТЫХ ВОЛН ЛЭМБА
СИСТЕМОЙ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК (ЧАСТЬ 1)**

¹ Государственное предприятие

«Киевский научно-исследовательский институт гидроприборов»,
ул. Василия Сурикова, 3, 01035, Киев, Украина; e-mail: petrishchev@ukr.net

² Национальный технический университет Украины

«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»,
просп. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail: romanyuk_rita@ukr.net

Abstract. The principle and method for calculating the electroacoustic transducers in the mode of elastic waves excitation in the isotropic solid bodies is considered. When being solved a homogeneous boundary problem of the dynamic theory of elasticity, the relations are obtained that completely determine the entire set of eigenfunctions (normal waves). The main solutions of the boundary value problem of the dynamic theory of elasticity are considered under the assumption that a source of the spatially developed Lamb waves does not have the axial symmetry. The quantitative estimates of the complex roots of dispersion equation for symmetric and antisymmetric Lamb waves are performed.

Key words: electroacoustic transducer, mathematical modeling, Lamb wave, eigenfunction, eigenvalue, excitation mode.

Введение.

Ультразвуковые колебания и пакеты ультразвуковых волн (ультразвуковые импульсы) давно и успешно используются для решения практических задач неразрушающего контроля различных материалов и технической диагностики элементов технологического оборудования.

Разработка новых приборов неразрушающего ультразвукового контроля и технической диагностики, а также эффективное использование эксплуатируемой аппаратуры существенно осложняется, по сути, полным отсутствием достоверной и практически значимой теории электроакустических преобразователей. Речь идет о пьезоэлектрических преобразователях, т.е. преобразователях контактного типа, и о преобразователях бесконтактного (электромагнитного) типа. Словосочетанием «теория преобразователей» в данном изложении определяется адекватная реальному объекту его математическая модель, которая позволяет рассчитать передаточные характеристики преобразователей в режимах излучения и приема ультразвуковых волн в твердых телах.

В режиме излучения электроакустический преобразователь контактного типа через слой согласующей жидкости создает на участке поверхности твердого тела изменяющееся во времени нормальное напряжение, которое порождает в объеме деформируемого твердого тела смещения материальных частиц.

Электроакустический преобразователь электромагнитного типа в режиме возбуждения ультразвуковых волн в металлах генерирует электромагнитное поле, которое на части поверхности металлоизделия формирует нормальные и касательные напряжения, а в объеме металла силовое поле (силы Лоренца и для металлов ферромагнитной группы силы магнитного взаимодействия полюсов магнитных доменов (магнито-стрикционные силы)). Характер изменения в пространстве силового поля описывается изменяющимся во времени вектором объемной плотности внешних сил.

В общем случае сигнал на механическом выходе электроакустического преобразователя, т.е. вектор смещения материальных частиц $\vec{u}(x_k, t)$ в произвольно выбранной точке объема твердого тела с координатами x_k в момент времени t , определяется в результате решения неоднородной граничной задачи динамической теории упругости. Если поверхностные и распределенные в объеме нагрузки, которые формируются электроакустическим преобразователем на поверхности S и в объеме V деформируемого твердого тела изменяются во времени по гармоническому закону $e^{i\omega t}$ ($i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; ω – круговая частота смены знака компонентов нагрузки), то упомянутая выше граничная задача записывается в следующем виде:

$$(\lambda + 2G)\text{grad div } \vec{u}(x_k) - G \text{rot rot } \vec{u}(x_k) + \rho_0 \omega^2 \vec{u}(x_k) - \vec{f}^*(x_k) = 0 \quad \forall x_k \in V; \quad (1)$$

$$n_j [\sigma_{jm}(x_k) - \sigma_{jm}^*(x_k)] = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (m = 1; 2; 3), \quad (2)$$

где λ, G, ρ_0 – модули упругости и плотность изотропного твердого тела; $\vec{u}(x_k)$ – амплитудное значение изменяющегося во времени по закону $e^{i\omega t}$ вектора смещения материальных частиц деформируемого твердого тела; $\vec{f}^*(x_k)$ и $\sigma_{jm}^*(x_k)$ – амплитудные значения вектора объемной плотности и компонентов поверхностной плотности внешних нагрузок; n_j – j -й компонент вектора внешней единичной нормали к поверхности S в точке с координатами x_k ; $\sigma_{jm}(x_k)$ – амплитудное значение компонентов тензора упругих напряжений, которые изменяются во времени по закону $e^{i\omega t}$, и возникают на поверхности и в объеме твердого тела при его деформировании внешними силами.

Решение граничной задачи (1) – (2), которая по своей сути является задачей об установившихся вынужденных гармонических колебаниях элементарного объема деформируемого твердого тела, позволяет связать силовые факторы $\vec{f}^*(x_k)$ и $\sigma_{jm}^*(x_k)$ с амплитудными значениями компонентов вектора смещения $\vec{u}(x_k)$.

Поскольку объемные и поверхностные плотности внешних нагрузок определяются конструкцией электроакустического преобразователя, постольку можно говорить о том, что решения граничной задачи (1) – (2) позволяют связать геометрические, физико-механические и электрические параметры элементов конструкции преобразователя, на электрическом входе которого существует гармоническое воздействие (разность электрических потенциалов), с его откликом на механическом выходе, т.е. с амплитудными значениями компонентов вектора смещения $\vec{u}(x_k)$ материальных частиц в произвольно выбранной точке объема деформируемого твердого тела.

Говоря иными словами, решение граничной задачи (1) – (2) является теоретической основой расчета (математического моделирования) электроакустических преобразователей в режиме возбуждения в изотропных по упругим свойствам твердых телах.

Первая попытка решения задачи (1) – (2) была предпринята в 1969 г. и зафиксирована в работе [1]. В работах [2, 7] были приведены результаты решения плоской задачи о возбуждении волн Лэмба системой объемных и поверхностных нагрузок. Необходимо отметить, что публикации [1, 2, 7] не были включены в достаточно содержательные обзоры [4, 6]. В работе [10] представлены решения граничной задачи (1) – (2) для случая, когда радиально распространяющиеся волны Лэмба возбуждаются осесимметричными объемными и поверхностными нагрузками. Вместе с тем, достаточно большой перечень конструкций электроакустических преобразователей (например, наклонные пьезоэлектрические преобразователи, преобразователи электромагнитного типа с индуктором в форме прямоугольной рамки и др.) возбуждает неосесимметричные радиально распространяющиеся волны Лэмба. Не обладают осевой симметрией и

волновые поля, которые возникают в результате отражения радиально распространяющихся осесимметричных волн Рэлея и Лэмба от различных неоднородностей в упругом слое. Это обстоятельство предопределило направление и содержание предлагаемой статьи.

Целью настоящей работы является решение граничной задачи (1) – (2) в предположении, что источники, которые порождают пространственно развитые волны Лэмба, не обладают осевой симметрией. Вначале рассмотрим собственные функции граничной задачи (1) – (2), т.е. общие решения этой задачи при $\vec{f}^*(x_k) = 0$ и $\sigma_{jm}^*(x_k) = 0$.

Собственные функции и собственные числа граничной задачи (1) – (2) для изотропного упругого слоя в вакууме

Однородная граничная задача

$$(\lambda + 2G) \text{grad div } \vec{u}^{(0)}(x_k) - G \text{rot rot } \vec{u}^{(0)}(x_k) + \rho_0 \omega^2 \vec{u}^{(0)}(x_k) = 0 \quad \forall x_k \in V; \quad (3)$$

$$n_j \sigma_{jm}(x_k) = 0 \quad \forall x_k \in S \quad (m = 1; 2; 3), \quad (4)$$

где $\vec{u}^{(0)}(x_k)$ – собственная функция, она же нормальная волна или мода, наиболее просто и эффективно решается в терминах скалярного и векторного потенциалов [3] волнового поля смещений материальных частиц изотропного по упругим свойствам деформируемого твердого тела.

Для вектора $\vec{u}^{(0)}(x_k)$ справедливо представление Гельмгольца

$$\vec{u}^{(0)}(x_k) = \text{grad } \Phi(x_k) + \text{rot } \vec{\Psi}(x_k), \quad (5)$$

где $\Phi(x_k)$ и $\vec{\Psi}(x_k)$ – амплитудные значения изменяющихся во времени по закону $e^{i\omega t}$ скалярного и векторного потенциалов поля смещений материальных частиц. На векторную функцию $\vec{\Psi}(x_k)$ в обязательном порядке накладывается условие

$$\text{div } \vec{\Psi}(x_k) = 0. \quad (6)$$

Подставим представление (5) в уравнение (3). Вычисляя дивергенцию от полученного результата, приходим к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Xi_\ell(x_k) = 0,$$

где $\Xi_\ell(x_k) = (\lambda + 2G) \nabla^2 \Phi(x_k) + \rho_0 \omega^2 \Phi(x_k)$.

Так как лапласиан векторной функции $\vec{\Psi}(x_k)$ суть

$$\nabla^2 \vec{\Psi}(x_k) = \text{grad div } \vec{\Psi}(x_k) - \text{rot rot } \vec{\Psi}(x_k) = - \text{rot rot } \vec{\Psi}(x_k),$$

то, после вычисления ротора от результата подстановки представления (5) в уравнение (3), вновь получаем уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \Xi_s(x_k) = 0,$$

где $\Xi_s(x_k) = -G \text{rot rot } \vec{\Psi}(x_k) + \rho_0 \omega^2 \vec{\Psi}(x_k)$.

Известно [5], что общее решение уравнения Лапласа является аналитической функцией. Следовательно, функции $\Xi_\ell(x_k)$ и $\Xi_s(x_k)$ являются аналитическими. В соответствии с принципом максимума модуля аналитической функции [5], модуль аналитической функции достигает своего максимального значения на границе области существования функции. Так как граница области существования волнового поля смещений материальных частиц в упругом слое проходит через бесконечно удаленную

точку, в которой поле смещений реального источника обращается в нуль, то можно утверждать, что $\Xi_\ell(x_k) = 0$ и $\Xi_s(x_k) = 0$. Из последних соотношений следуют уравнения для скалярного и векторного потенциалов:

$$\nabla^2 \Phi(x_k) + k_\ell^2 \Phi(x_k) = 0; \quad (7)$$

$$\nabla^2 \bar{\Psi}(x_k) + k_s^2 \bar{\Psi}(x_k) = 0, \quad (8)$$

где $k_\ell = \omega/v_\ell$ и $k_s = \omega/v_s$ – волновые числа продольных (волн сжатия-растяжения) и сдвиговых волн, которые распространяются в упругой среде со скоростями $v_\ell = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho_0}$ и $v_s = \sqrt{G/\rho_0}$, соответственно.

В цилиндрической системе координат (ρ, ϕ, z) , центр которой совмещен с центром праввинтовой декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) , который, в свою очередь, находится в срединной плоскости упругого слоя (рис. 1), уравнение (7) записывается в следующем виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k_\ell^2 \Phi = 0. \quad (9)$$

Аргументы ρ, ϕ, z скалярной функции $\Phi(\rho, \phi, z)$ опущены для краткости записи уравнения (9). Полагая, что

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\rho, z) \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где n – элемент ряда натуральных чисел, приводим уравнение (9) к следующему виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi_n(\rho, z)}{\partial \rho} \right) - \frac{n^2}{\rho^2} \Phi_n(\rho, z) + k_\ell^2 \Phi_n(\rho, z) + \frac{\partial^2 \Phi_n(\rho, z)}{\partial z^2} \right\} \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix} = 0.$$

Сумма знакопеременного ряда равняется нулю только лишь в том случае, когда каждый коэффициент при знакопеременных тригонометрических функциях равен нулю, т.е.

$$\frac{\partial^2 \Phi_n(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_n(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} [(k_\ell \rho)^2 - n^2] \Phi_n(\rho, z) + \frac{\partial^2 \Phi_n(\rho, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (11)$$

В соответствии с классической схемой разделения переменных, представим n -ый окружной компонент скалярного потенциала в виде произведения двух функций, т.е.

$$\Phi_n(\rho, z) = R_n(\rho) Z_n(z).$$

После этого уравнение (11) легко приводится к следующему виду

$$\frac{1}{R_n(\rho)} \left\{ \frac{\partial^2 R_n(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R_n(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} [(k_\ell \rho)^2 - n^2] R_n(\rho) \right\} = - \frac{1}{Z_n(z)} \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2}. \quad (12)$$

Левая часть уравнения (12) зависит только от радиальной координаты ρ , правая – только лишь от аксиальной координаты z . Равенство (12) при произвольных значениях ρ и z возможно только лишь в том случае, когда левая и правая части уравнения (12) равняются одной и той же константе. Для удобства дальнейших записей обо-

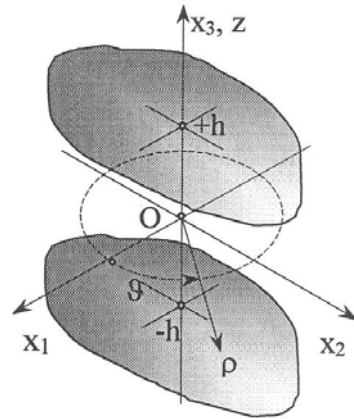


Рис. 1

значим эту константу символом α^2 . Числовые значения константы разделения определяются в процессе решения однородной граничной задачи (3) – (4). Таким образом уравнение (12) распадается на два, самостоятельно решаемых уравнения, которые записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} + \alpha^2 Z_n(z) = 0; \quad (13)$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R_n(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R_n(\rho)}{\partial \rho} + [(\gamma\rho)^2 - n^2] R_n(\rho) = 0, \quad (14)$$

где $\gamma = \sqrt{k_\ell^2 - \alpha^2}$ – постоянная распространения – проекция волнового вектора \vec{k}_ℓ на радиальную ось ρ цилиндрической системы координат.

Решения уравнений (13) и (14) очевидны:

$$Z_n(z) = A_n \cos \alpha z + B_n \sin \alpha z; \quad R_n(\rho) = H_n^{(2)}(\gamma\rho), \quad (15)$$

где A_n и B_n – константы, подлежащие определению в ходе решения граничной задачи (3) – (4); $H_n^{(2)}(\gamma\rho)$ – функция Ханкеля второго рода n -го порядка. Произведение $e^{i\omega t} H_n^{(2)}(\gamma\rho)$ формирует фазовую характеристику уходящей на бесконечность цилиндрической гармонической волны. Поскольку $k_\ell^2 = \gamma^2 + \alpha^2$, константу разделения α , имеющую по определению размерность волнового числа, следует считать проекцией волнового вектора \vec{k}_ℓ на аксиальную ось z цилиндрической системы координат.

Таким образом, выражение для расчета скалярного потенциала $\Phi(\rho, \phi, z)$ неосесимметричного поля смещений материальных частиц изотропного упругого слоя записывается в следующем виде:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos \alpha z + B_n \sin \alpha z] H_n^{(2)}(\gamma\rho) \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Компоненты векторного потенциала $\vec{\Psi}(\rho, \phi, z)$ будем определять в виде

$$\begin{aligned} \Psi_\rho(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}; \quad \Psi_\phi(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}; \\ \Psi_z(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_z^{(n)}(\rho, z) \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

При этом векторное уравнение (8) распадается на следующие три скалярных уравнения:

$$\frac{n}{\rho^2} \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) + \frac{n}{\rho} \frac{\partial \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) + \gamma^2 \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) - \frac{\partial^2 \Psi_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho \partial z} = 0; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} -\frac{n}{\rho} \frac{\partial \Psi_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial z} - \frac{1}{\rho^2} \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \\ + \frac{n}{\rho^2} \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) - \frac{n}{\rho} \frac{\partial \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \gamma^2 \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{\rho} \Psi_{\rho}^{(n)}(\rho, z) - \frac{\partial \Psi_{\rho}^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{n}{\rho} \Psi_{\phi}^{(n)}(\rho, z) \right] + \frac{\partial^2 \Psi_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \Psi_z^{(n)}(\rho, z) + k_s^2 \Psi_z^{(n)}(\rho, z) = 0, \quad (20)$$

где постоянная распространения $\gamma = \sqrt{k_s^2 - \beta^2}$. Квадрат волнового числа β (константы разделения) введен в систему уравнений (18) – (20) как эквивалент операции $\partial^2 / \partial z^2$, т. е. $\partial^2 \Psi_{\lambda}^{(n)}(\rho, z) / \partial z^2 = -\beta^2 \Psi_{\lambda}^{(n)}(\rho, z)$ ($\lambda = \rho; \phi; z$). Говоря иными словами, предполагается, что функция $\Psi_{\lambda}^{(n)}(\rho, z)$ изменяет свои значения вдоль аксиальной оси Oz цилиндрической системы координат пропорционально линейным комбинациям тригонометрических функций $\cos \beta z$ и $\sin \beta z$.

Подставляя разложения (17) в условие (6), получаем следующий результат:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho} \Psi_{\rho}^{(n)}(\rho, z) + \frac{\partial \Psi_{\rho}^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{n}{\rho} \Psi_{\phi}^{(n)}(\rho, z) + \frac{\partial \Psi_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial z} \right\} \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \Psi_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \Psi_{\rho}^{(n)}(\rho, z) - \frac{\partial \Psi_{\rho}^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{n}{\rho} \Psi_{\phi}^{(n)}(\rho, z). \quad (21)$$

Дифференцируя левую и правую части соотношения (21) по переменной z , получаем

$$\frac{\partial^2 \Psi_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial z^2} = -\beta^2 \Psi_z^{(n)}(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{\rho} \Psi_{\rho}^{(n)}(\rho, z) - \frac{\partial \Psi_{\rho}^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{n}{\rho} \Psi_{\phi}^{(n)}(\rho, z) \right]. \quad (22)$$

Исключая с помощью равенства (22) первое слагаемое из уравнения (20), получаем стандартное уравнение Бесселя для определения радиальной составляющей $R_z^{(n)}(\rho)$ аксиального компонента $\Psi_z^{(n)}(\rho, z) = R_z^{(n)}(\rho) Z_z^{(n)}(z)$ векторного потенциала поля смещений материальных частиц упругого слоя

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R_z^{(n)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R_z^{(n)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\gamma\rho)^2 - n^2] R_z^{(n)}(\rho) = 0. \quad (23)$$

Решение уравнения (23) имеет вид $R_z^{(n)}(\rho) = H_n^{(2)}(\gamma\rho)$. При этом аксиальная составляющая $Z_z^{(z)}(z) = C_n \cos \beta z + D_n \sin \beta z$, где C_n и D_n – подлежащие определению константы. Волновое число β является проекцией волнового вектора \vec{k}_s на аксиальную ось Oz цилиндрической системы координат. Следует подчеркнуть, что проекция волнового вектора \vec{k}_s на радиальную ось ρ (направление распространения упругих волн) в точности должна быть равна волновому числу (постоянной распространения) γ . Таким образом, аксиальный компонент $\Psi_z(\rho, \phi, z)$ векторного потенциала $\vec{\Psi}(\rho, \phi, z)$ определяется следующим выражением

$$\Psi_z(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos \beta z + D_n \sin \beta z] H_n^{(2)}(\gamma \rho) \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Из соотношения (21) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho \partial z} &= \frac{1}{\rho^2} \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho^2} - \\ &- \frac{n}{\rho^2} \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) + \frac{n}{\rho} \frac{\partial \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя правую часть соотношения (25) в уравнение (18), а правую часть выражения (21) – в уравнение (19), получаем следующие результаты:

$$\frac{\partial^2 \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} [(\gamma \rho)^2 - (n^2 + 1)] \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) + \frac{2n}{\rho^2} \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} [(\gamma \rho)^2 - (n^2 + 1)] \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) + \frac{2n}{\rho^2} \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) = 0. \quad (27)$$

Сложим элементы правых частей уравнений (26) и (27). После выполнения очевидных алгебраических операций получаем следующий результат

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R_{(+)}^{(n)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R_{(+)}^{(n)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\gamma \rho)^2 - (n-1)^2] R_{(+)}^{(n)}(\rho) = 0, \quad (28)$$

где $R_{(+)}^{(n)}(\rho)$ – радиальная составляющая суммарного потенциала $\Psi_{(+)}^{(n)}(\rho, z) = \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) + \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) = R_{(+)}^{(n)}(\rho) Z_{(+)}^{(n)}(z)$. При этом аксиальная составляющая суммарного потенциала $Z_{(+)}^{(n)}(z) = E_n \cos \beta z + F_n \sin \beta z$, где E_n и F_n – подлежащие определению константы.

Вычитая из элементов правой части уравнения (26) элементы правой части уравнения (27), получаем стандартное уравнение Бесселя для радиальной составляющей $R_{(-)}^{(n)}(\rho)$ разностного потенциала $\Psi_{(-)}^{(n)}(\rho, z) = R_{(-)}^{(n)}(\rho) Z_{(-)}^{(n)}(z) = \Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) - \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z)$:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R_{(-)}^{(n)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R_{(-)}^{(n)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\gamma \rho)^2 - (n+1)^2] R_{(-)}^{(n)}(\rho) = 0. \quad (29)$$

При этом аксиальная составляющая разностного потенциала, т.е. функция $Z_{(-)}^{(n)}(z)$, определяется следующим образом $Z_{(-)}^{(n)}(z) = G_n \cos \beta z + H_n \sin \beta z$, где G_n и H_n – подлежащие определению константы.

Решения уравнений (28) и (29) очевидны:

$$R_{(+)}^{(n)}(\rho) = H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho); \quad R_{(-)}^{(n)}(\rho) = H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho).$$

Таким образом

$$\Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) + \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) = H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) [E_n \cos \beta z + F_n \sin \beta z];$$

$$\Psi_\rho^{(n)}(\rho, z) - \Psi_\phi^{(n)}(\rho, z) = H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho) [G_n \cos \beta z + H_n \sin \beta z].$$

Из последних соотношений следует, что

$$\Psi_{\rho}^{(n)}(\rho, z) = \frac{1}{2} \left\{ \left[E_n H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + G_n H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \cos \beta z + \left[F_n H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + H_n H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \sin \beta z \right\}; \quad (30)$$

$$\Psi_{\phi}^{(n)}(\rho, z) = \frac{1}{2} \left\{ \left[E_n H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - G_n H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \cos \beta z + \left[F_n H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - H_n H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \sin \beta z \right\}. \quad (31)$$

В состав выражений (24), (30) и (31) входят шесть наборов констант C_n , D_n , E_n , G_n , F_n и H_n . Еще два набора констант A_n и B_n в формуле (16) определяют скалярный потенциал $\Phi_n(\rho, z)$. На поверхностях $z = \pm h$ упругого слоя, который находится в вакууме, можно сформулировать только лишь шесть граничных условий $\sigma_{zz}(\rho, \phi, \pm h) = \sigma_{z\rho}(\rho, \phi, \pm h) = \sigma_{z\phi}(\rho, \phi, \pm h) = 0$, где $\sigma_{z\lambda}(\rho, \phi, z)$ ($\lambda = \rho; \phi; z$) – компоненты тензора упругих напряжений, которые определяются обобщенным законом Гука.

Кажущаяся избыточность констант в описание потенциалов поля смещений материальных частиц упругого слоя легко устраняется. Потребуем, чтобы соотношения (24), (30) и (31) обеспечивали выполнение условия $\operatorname{div} \vec{\Psi}(\rho, \phi, z) = 0$ в любой, произвольно выбранной точке в объеме и на поверхности упругого слоя. Подставляя выражения (24), (30) и (31) в условие (6), приходим к выводу, что условие (6) выполняется в любой точке тогда, когда коэффициенты при тригонометрических функциях $\cos \beta z$ и $\sin \beta z$ равны нулю. Из этого следует, что

$$C_n = \frac{\gamma}{2\beta} (H_n - F_n); \quad D_n = \frac{\gamma}{2\beta} (E_n - G_n). \quad (32)$$

С учетом определений (32) окончательная формулировка выражений для расчета компонентов векторного потенциала $\vec{\Psi}(\rho, \phi, z)$ записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{\rho}(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[E_n H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + G_n H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \cos \beta z + \left[F_n H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + H_n H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \sin \beta z \right\} \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}; \\ \Psi_{\phi}(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[E_n H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - G_n H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \cos \beta z + \left[F_n H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - H_n H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \sin \beta z \right\} \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}; \\ \Psi_z(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{\beta} \left[(H_n - F_n) \cos \beta z + (E_n - G_n) \sin \beta z \right] H_n^{(2)}(\gamma\rho) \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя соотношения (33) в определение (5) вектора смещения материальных частиц упругого слоя, получаем следующие выражения для расчета компонентов этого вектора:

$$\begin{aligned}
u_\rho(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\gamma H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - \frac{n}{\rho} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \right] [A_n \cos \alpha z + B_n \sin \alpha z] + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ -F_n \left[\beta H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \frac{n\gamma}{\beta\rho} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \right] + H_n \left[\beta H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) + \frac{n\gamma}{\beta\rho} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \right] \right\} \cos \beta z + \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ E_n \left[\beta H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \frac{n\gamma}{\beta\rho} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \right] - G_n \left[\beta H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) + \frac{n\gamma}{\beta\rho} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \right] \right\} \sin \beta z \left. \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix} \right\}; \\
u_\phi(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [-\alpha A_n \sin \alpha z + \alpha B_n \cos \alpha z] H_n^{(2)}(\gamma\rho) + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ F_n \left[\frac{k_s^2}{\beta} H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - \frac{n\gamma}{\beta\rho} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \right] + \right. \\
&+ H_n \left[\beta H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) - \frac{\gamma^2}{\beta} H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \frac{n\gamma}{\beta\rho} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \right] \left. \right\} \cos \beta z + \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ -E_n \left[\frac{k_s^2}{\beta} H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - \frac{n\gamma}{\beta\rho} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \right] - \right. \\
&- G_n \left[\beta H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) - \frac{\gamma^2}{\beta} H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \frac{n\gamma}{\beta\rho} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \right] \left. \right\} \sin \beta z \left. \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix} \right\}; \\
u_z(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [-\alpha A_n \sin \alpha z + \alpha B_n \cos \alpha z] - \frac{1}{2} \gamma (E_n + G_n) \cos \beta z - \right. \\
&- \frac{1}{2} \gamma (F_n + H_n) \sin \beta z \left. \right\} H_n^{(2)}(\gamma\rho) \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Обобщенный закон Гука $\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}e$, где ε_{ij} – компоненты тензора бесконечно малых деформаций; δ_{ij} – символ Кронекера; $e = \text{div } \vec{u}$ – объемная деформация, позволяет определить упругие напряжения по известным компонентам вектора смещения материальных частиц. В цилиндрической системе координат необходимые для расчета напряжений $\sigma_{zz}(\rho, \phi, z)$, $\sigma_{z\rho}(\rho, \phi, z)$ и $\sigma_{z\phi}(\rho, \phi, z)$ компоненты тензора деформации определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{z\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right); \quad \varepsilon_{z\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \right). \tag{35}$$

Объемная деформация $e = \text{div } \vec{u} = \text{div}(\text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}) = \nabla^2 \Phi$. Из уравнения (7) следует, что $\nabla^2 \Phi = -k_\ell^2 \Phi$, откуда $e = -k_\ell^2 \Phi$.

Подставляя выражения (34) в определения (35), а полученные результаты – в обобщенный закон Гука, получаем следующие соотношения для расчета нормальных и касательных напряжений $\sigma_{z\lambda}(\rho, \phi, z)$ ($\lambda = \rho; \phi; z$):

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}(\rho, \phi, z) &= G \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\gamma^2 - \beta^2) [A_n \cos \alpha z + B_n \sin \alpha z] + \beta \gamma (E_n + G_n) \sin \beta z - \right. \\
&\quad \left. - \beta \gamma (F_n + H_n) \cos \beta z \right\} H_n^{(2)}(\gamma \rho) \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}, \\
\sigma_{z\rho}(\rho, \phi, z) &= \frac{G}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2\gamma \alpha [-A_n \sin \alpha z + B_n \cos \alpha z] [H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ E_n [\beta^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) + \gamma^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] - G_n [\gamma^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) + \beta^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] \right\} \cos \beta z + \right. \\
&\quad \left. + \left\{ F_n [\beta^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) + \gamma^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] - H_n [\gamma^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) + \beta^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] \right\} \sin \beta z \right\} \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}; \\
\sigma_{z\phi}(\rho, \phi, z) &= \frac{G}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -2\gamma \alpha [-A_n \sin \alpha z + B_n \cos \alpha z] [H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] - \right. \\
&\quad \left. - \left\{ E_n [\beta^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) - \gamma^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] + G_n [-\gamma^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) + \beta^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] \right\} \cos \beta z - \right. \\
&\quad \left. - \left\{ F_n [\beta^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) - \gamma^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] + H_n [-\gamma^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) + \beta^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho)] \right\} \sin \beta z \right\} \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}. \quad (36)
\end{aligned}$$

Подставляя в формулы (36) значения $z = \pm h$, приравнявая, как того требует третий закон Ньютона, полученные результаты нулю, получаем однородную систему из шести линейных алгебраических уравнений, в которых содержится шесть наборов констант A_n , B_n , E_n , G_n , F_n и H_n . Нетривиальное решение этой системы уравнений относительно указанных выше констант возможно лишь в том случае, когда определитель Δ_0 этой системы, составленный из сомножителей при искомым константах, равняется нулю. Полученное таким образом уравнение $\Delta_0 = 0$ следует понимать как условие существования на заданной частоте неосесимметричных гармонических волн, радиально распространяющихся в изотропном упругом слое.

Выполняя эквивалентные преобразования элементов в строках определителя шестого порядка Δ_0 , получаем следующий результат:

$$\Delta_0 = 32 \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma \rho) H_{n+1}^{(2)}(\gamma \rho) \right]^2 \Delta_1 \Delta_2 = 0, \quad (37)$$

где Δ_1 и Δ_2 – определители 3×3 , составленные из сомножителей при константах A_n , F_n , H_n и B_n , E_n , G_n соответственно. Если положить $\Delta_1 = 0$ (при этом $\Delta_2 \neq 0$), то это эквивалентно утверждению, что $(A_n, F_n, H_n) \neq 0$, а константы $(B_n, E_n, G_n) = 0$, и напротив, $(A_n, F_n, H_n) = 0$, а $(B_n, E_n, G_n) \neq 0$, когда $\Delta_1 \neq 0$, а $\Delta_2 = 0$.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 \neq 0$.

Определитель Δ_1 задается следующим образом:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (\gamma^2 - \beta^2) \cos \alpha h & -\beta \gamma \cos \beta h & -\beta \gamma \cos \beta h \\ -2\gamma \alpha \sin \alpha h & \beta^2 \sin \beta h & -\gamma^2 \sin \beta h \\ -2\gamma \alpha \sin \alpha h & -\gamma^2 \sin \beta h & \beta^2 \sin \beta h \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель Δ_1 , получаем следующий результат

$$\Delta_1 = -k_s^2 \sin \beta h \left[(\gamma^2 - \beta^2)^2 \cos \alpha h \sin \beta h + 4\gamma^2 \alpha \beta \sin \alpha h \cos \beta h \right] = 0. \quad (38)$$

Определитель Δ_2 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -\beta^2 \cos \beta h & -2\gamma \alpha \cos \alpha h & \gamma^2 \cos \beta h \\ \gamma^2 \cos \beta h & -2\gamma \alpha \cos \alpha h & -\beta^2 \cos \beta h \\ -\beta \lambda \sin \beta h & -(\gamma^2 - \beta^2) \sin \alpha h & -\beta \lambda \sin \beta h \end{vmatrix} = \\ &= k_s^2 \cos \beta h \left[(\gamma^2 - \beta^2)^2 \sin \alpha h \cos \beta h + 4\gamma^2 \alpha \beta \cos \alpha h \sin \beta h \right] = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Очевидно, что удовлетворить условию (38) можно двумя способами.

Первый способ. Будем считать, что $\sin \beta h = 0$, а квадратная скобка – не равна нулю. Это эквивалентно утверждению, что константы $(F_n, H_n) \neq 0$, а набор констант $A_n = 0$. При этом, естественно, константы $(B_n, E_n, G_n) = 0$. Обращаясь к расчетным формулам (36), легко заметить, что при $\sin \beta h = 0$ граничные условия $\sigma_{z\rho}(\rho, \phi, \pm h) = 0$ и $\sigma_{z\phi}(\rho, \phi, \pm h) = 0$ выполняются автоматически, а для выполнения условия $\sigma_{zz}(\rho, \phi, \pm h) = 0$ необходимо и достаточно положить $F_n = -H_n$. При этом из соотношений (34) получаем следующие определения компонентов вектора смещения материальных частиц деформируемого упругого слоя:

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_s^2}{\beta} H_n \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \cos \beta z \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}; \\ u_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_s^2}{\beta} H_n \left[H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) - H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \cos \beta z \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}; \\ u_z(\rho, \phi, z) &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Поскольку в данной ситуации объемная деформация $e = \text{div } \vec{u} = 0$ по определению, постольку определенный соотношениями (40) тип волнового движения можно определить как неосесимметричные, симметричные относительно срединной плоскости упругого слоя, радиально распространяющиеся горизонтально-сдвиговые волны. При этом уравнение

$$\sin \beta h = 0 \quad (41)$$

приобретает смысл условия существования радиально распространяющихся симметричных горизонтально-сдвиговых волн.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $\sin \beta h \neq 0$, и

$$(\gamma^2 - \beta^2)^2 \cos \alpha h \sin \beta h + 4\gamma^2 \alpha \beta \sin \alpha h \cos \beta h = 0. \quad (42)$$

При этом все три набора коэффициентов $(A_n, F_n, H_n) \neq 0$. Из граничных условий $\sigma_{zz}(\rho, \phi, \pm h) = \sigma_{z\rho}(\rho, \phi, \pm h) = \sigma_{z\phi}(\rho, \phi, \pm h) = 0$ следует, что

$$(\gamma^2 - \beta^2) A_n \cos \alpha h - \gamma \beta (F_n + H_n) \cos \beta h = 0; \quad (43)$$

$$\begin{aligned} -2\gamma \alpha A_n \sin \alpha h \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] + \left\{ F_n \left[\beta^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \gamma^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] - \right. \\ \left. - H_n \left[\gamma^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \beta^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \right\} \sin \beta h = 0; \end{aligned} \quad (44)$$

$$2\gamma\alpha A_n \sin \alpha h \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] - \left\{ F_n \left[\beta^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - \gamma^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] + H_n \left[-\gamma^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \beta^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \right\} \sin \beta h = 0. \quad (45)$$

Уравнения (44) и (45) можно записать в следующем виде

$$F_n \left[\beta^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \gamma^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] - H_n \left[\gamma^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \beta^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] = 2\gamma\alpha A_n \frac{\sin \alpha h}{\sin \beta h} \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right]; \quad (46)$$

$$F_n \left[\beta^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - \gamma^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] + H_n \left[-\gamma^2 H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + \beta^2 H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] = 2\gamma\alpha A_n \frac{\sin \alpha h}{\sin \beta h} \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right]. \quad (47)$$

Равенства (46) и (47) будут выполняться только лишь при условии, что

$$F_n = H_n = -A_n \frac{2\gamma\alpha \sin \alpha h}{(\gamma^2 - \beta^2) \sin \beta h}. \quad (48)$$

Подстановка констант F_n и H_n , которые определены через константу A_n выражением (48), в уравнение (43) приводит к следующему результату:

$$\frac{A_n}{(\gamma^2 - \beta^2) \sin \beta h} \left[(\gamma^2 - \beta^2)^2 \cos \alpha h \sin \beta h + 4\gamma^2 \alpha \beta \sin \alpha h \cos \beta h \right] = 0. \quad (49)$$

Уравнение (49) выполняется при любых конечных значениях константы A_n , поскольку волновые числа α , β и γ удовлетворяют условию существования (42).

Принимая во внимание выражение (48), запишем расчетные соотношения для компонентов вектора смещения материальных частиц упругого слоя

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \phi, z) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma A_n \left[\cos \alpha z + \frac{2\alpha\beta \sin \alpha h}{(\gamma^2 - \beta^2) \sin \beta h} \cos \beta z \right] \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}; \\ u_\phi(\rho, \phi, z) &= \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma A_n \left[\cos \alpha z + \frac{2\alpha\beta \sin \alpha h}{(\gamma^2 - \beta^2) \sin \beta h} \cos \beta z \right] \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}; \\ u_z(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma A_n \left[-\frac{\alpha}{\gamma} \sin \alpha z + \frac{2\alpha\gamma \sin \alpha h}{(\gamma^2 - \beta^2) \sin \beta h} \sin \beta z \right] H_n^{(2)}(\gamma\rho) \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

Определенные соотношениями (50) компоненты вектора смещения материальных частиц характеризуют неосесимметричные, радиально распространяющиеся, симметричные относительно срединной плоскости упругого слоя, волны Лэмба. В соответствии с этим, уравнение (42) следует понимать как условие существования радиально распространяющихся симметричных волн Лэмба.

В том случае, когда $\Delta_1 \neq 0$, а $\Delta_2 = 0$, получаем аналитическое описание антисимметричного относительно срединной плоскости упругого слоя радиально распространяющегося волнового поля смещений материальных частиц.

Антисимметричные горизонтально-сдвиговые волны. Условие существования

$$\cos \beta h = 0. \quad (51)$$

Компоненты вектора смещения материальных частиц

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_s^2}{\beta} E_n \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \sin \beta z \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}; \\ u_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_s^2}{\beta} E_n \left[H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) - H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \sin \beta z \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}; \\ u_z(\rho, \phi, z) &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Антисимметричные, радиально распространяющиеся волны Лэмба. Условие существования

$$(\gamma^2 - \beta^2)^2 \sin \alpha h \cos \beta h + 4\gamma^2 \alpha \beta \cos \alpha h \sin \beta h = 0. \quad (53)$$

Компоненты вектора смещения материальных частиц

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma B_n \left[\sin \alpha z + \frac{2\alpha\beta \cos \alpha h}{(\gamma^2 - \beta^2) \cos \beta h} \sin \beta z \right] \times \\ &\quad \times \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}; \\ u_\phi(\rho, \phi, z) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma B_n \left[\sin \alpha z + \frac{2\alpha\beta \cos \alpha h}{(\gamma^2 - \beta^2) \cos \beta h} \sin \beta z \right] \times \\ &\quad \times \left[H_{n-1}^{(2)}(\gamma\rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma\rho) \right] \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}; \\ u_z(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma B_n \left[\frac{\alpha}{\gamma} \cos \alpha z - \frac{2\alpha\gamma \cos \alpha h}{(\gamma^2 - \beta^2) \cos \beta h} \cos \beta z \right] H_n^{(2)}(\gamma\rho) \begin{pmatrix} -\sin n\phi \\ \cos n\phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (54)$$

Естественно, что при произвольном нагружении внешними силами конечной по размерам области упругого слоя, в нем могут одновременно существовать как симметричные, так и антисимметричные нормальные волны.

Соотношения (40), (50), (52) и (54) полностью определяют весь набор, разрешенных вторым и третьим законами Ньютона, решений (собственных функций или нормальных волн) однородной граничной задачи (3) – (4). Следует подчеркнуть, что собственные функции определены с точностью до постоянного, не зависящего от координат точки наблюдения за характеристиками волнового поля, множителя. Этот множитель можно назвать амплитудным множителем нормальной волны. Он определяется в результате решения неоднородной граничной задачи (1) – (2). Волновые числа нормальных волн или собственные числа собственных функций однородной граничной задачи (3) – (4) определяются уравнениями (41), (42), (51) и (53).

Рассмотрим условия существования симметричных и антисимметричных горизонтально-сдвиговых волн. Из условия существования (41) симметричных горизон-

тально-сдвиговых (SH) радиально распространяющихся волн следует, что $\beta h = \pi m = (\pi/2)2m$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ – элемент ряда натуральных чисел. Введем в рассмотрение безразмерную частоту $\Omega = 2k_s h / \pi$ и безразмерную постоянную распространения $\Gamma = 2\gamma h / \pi$. После этого можно записать, что $\Gamma_{SH}^{(m)} = \sqrt{\Omega^2 - 4m^2}$.

Из условия (51) существования антисимметричных горизонтально-сдвиговых (AH) радиально распространяющихся волн следует, что $\beta h = (\pi/2)(1 + 2m)$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, и $\Gamma_{AH}^{(m)} = \sqrt{\Omega^2 - (1 + 2m)^2}$. В аналитическом описании (40) и (52) симметричных и антисимметричных горизонтально-сдвиговых волн нельзя найти формальных оснований, которые бы запрещали существование не распространяющихся горизонтально-сдвиговых волн, у которых постоянная распространения Γ является чисто мнимым числом. Очевидно, что $\text{Re}\Gamma_{SH}^{(m)} = 0$, когда $\Omega < 2m$, и $\text{Re}\Gamma_{AH}^{(m)} = 0$, когда $\Omega < 1 + 2m$.

На рис. 2 показан частотный спектр волновых чисел Γ симметричных (сплошные кривые) и антисимметричных (штриховые кривые) радиально распространяющихся горизонтально-сдвиговых волн. По оси ординат на рис. 2 отсчитываются значения безразмерной частоты Ω , по осям абсцисс – действительные (правая полуплоскость рис. 2) и мнимые (левая полуплоскость рис. 2) значения постоянной распространения Γ горизонтально-сдвиговых волн.

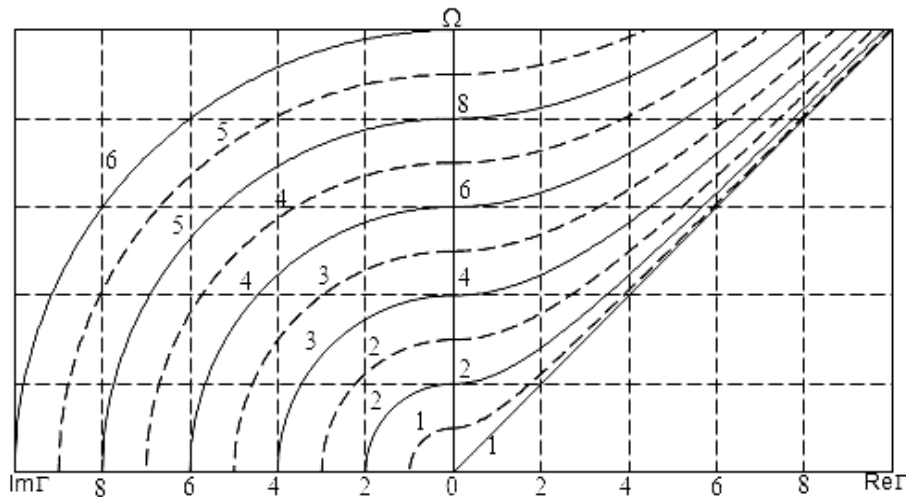


Рис. 2

Отчетливо видно, что на любой фиксированной частоте Ω существует конечное число распространяющихся горизонтально-сдвиговых волн, которые уносят энергию из области существования внешних сил в периферийные участки упругого слоя. На той же частоте Ω существует бесконечное множество не распространяющихся горизонтально-сдвиговых волн, которые не переносят энергию и играют роль реактивной нагрузки для источника внешних сил. Существование бесконечного множества не распространяющихся горизонтально-сдвиговых волн имеет принципиальное значение с точки зрения обеспечения выполнения третьего закона Ньютона в любом цилиндрическом сечении $\rho = \text{const}$ упругого слоя.

Очевидно, что решения однородной граничной задачи (3) – (4) в форме горизонтально-сдвиговых волн обладают полнотой в смысле удовлетворения третьего закона Ньютона в поперечном сечении $\rho = \text{const}$ упругого слоя в области приложения внешних нагрузок. Необходимо добавить, что условиям существования горизонтально-сдвиговых волн удовлетворяют значения $\pm\Gamma$ для распространяющихся и $\pm i\Gamma$ для не распространяющихся волн.

Условия существования симметричных (42) и антисимметричных (53) волн Лэмба в терминах безразмерных чисел Ω и Γ , а также волновых чисел $A = \sqrt{\Omega^2 \xi - \Gamma^2}$ и $B = \sqrt{\Omega^2 - \Gamma^2}$ ($\xi = k_l^2/k_s^2 = (1-2\nu)/[2(1-\nu)]$; ν – коэффициент Пуассона) имеют следующую форму записи:

$$(2\Gamma^2 - \Omega^2)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}A\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}B\right) + 4\Gamma^2 AB \sin\left(\frac{\pi}{2}A\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}B\right) = 0; \quad (55)$$

$$(2\Gamma^2 - \Omega^2)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}A\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}B\right) + 4\Gamma^2 AB \cos\left(\frac{\pi}{2}A\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}B\right) = 0. \quad (56)$$

Очевидно, что соотношения (55) и (56) можно рассматривать как заданные в неявном виде функции $F_{SS}(\Omega, \Gamma)$ и $F_{AS}(\Omega, \Gamma)$ (условие (56)) безразмерных переменных Ω и Γ с параметром ξ .

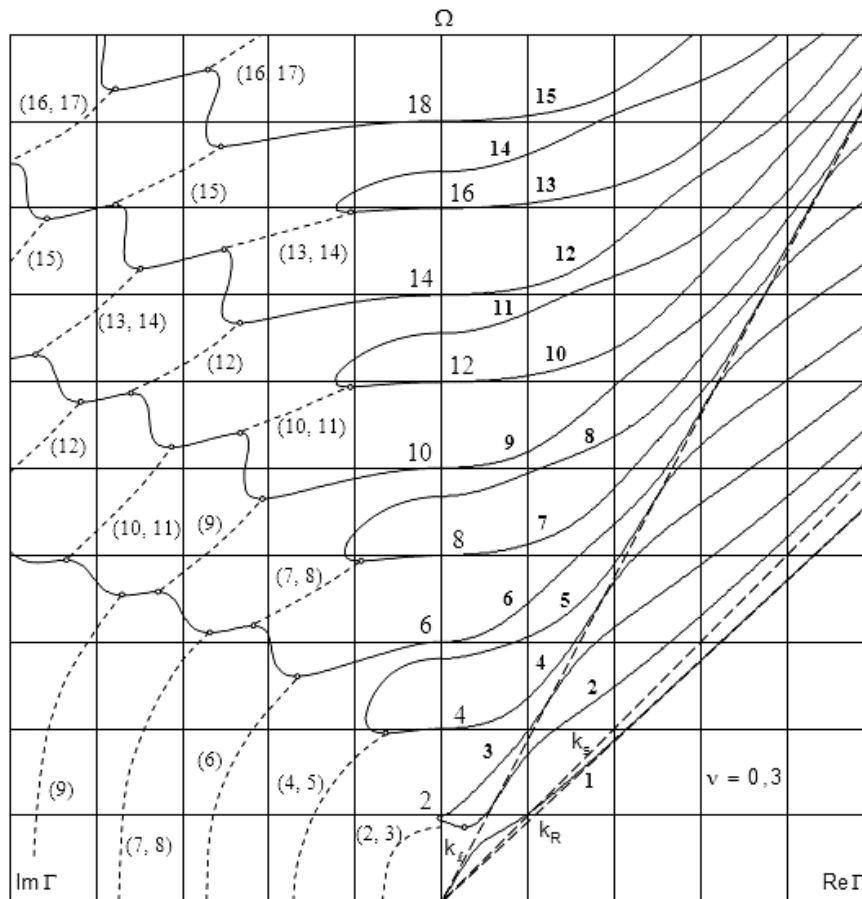


Рис 3

Конструкция функций $F_{SS}(\Omega, \Gamma)$ и $F_{AS}(\Omega, \Gamma)$ такова, что условия (55) и (56) выполняются для любого знака постоянной распространения Γ , т.е. уравнения (55) и (56) подразумевают существование гармонических волн с безразмерными волновыми числами $\pm \Gamma$. Помимо этого, в конструкции этих функций не содержится формального запрета на существование неоднородных симметричных и антисимметричных волн Лэмба с постоянными распространения $\pm i\Gamma$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. При

этом уравнения (55) и (56) записываются в следующем виде:

$$F_{SS}(\Omega, \pm i\Gamma) = (2\Gamma^2 + \Omega^2)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}A\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}B\right) - 4\Gamma^2 AB \sin\left(\frac{\pi}{2}A\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}B\right) = 0; \quad (57)$$

$$F_{AS}(\Omega, \pm i\Gamma) = (2\Gamma^2 + \Omega^2)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}A\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}B\right) - 4\Gamma^2 AB \cos\left(\frac{\pi}{2}A\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}B\right) = 0, \quad (58)$$

где безразмерные волновые числа $A = \sqrt{\Omega^2 \xi + \Gamma^2}$ и $B = \sqrt{\Omega^2 + \Gamma^2}$.

На рис. 3 сплошными кривыми показаны результаты численного решения уравнений (55) и (57) для изотропного упругого слоя с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$.

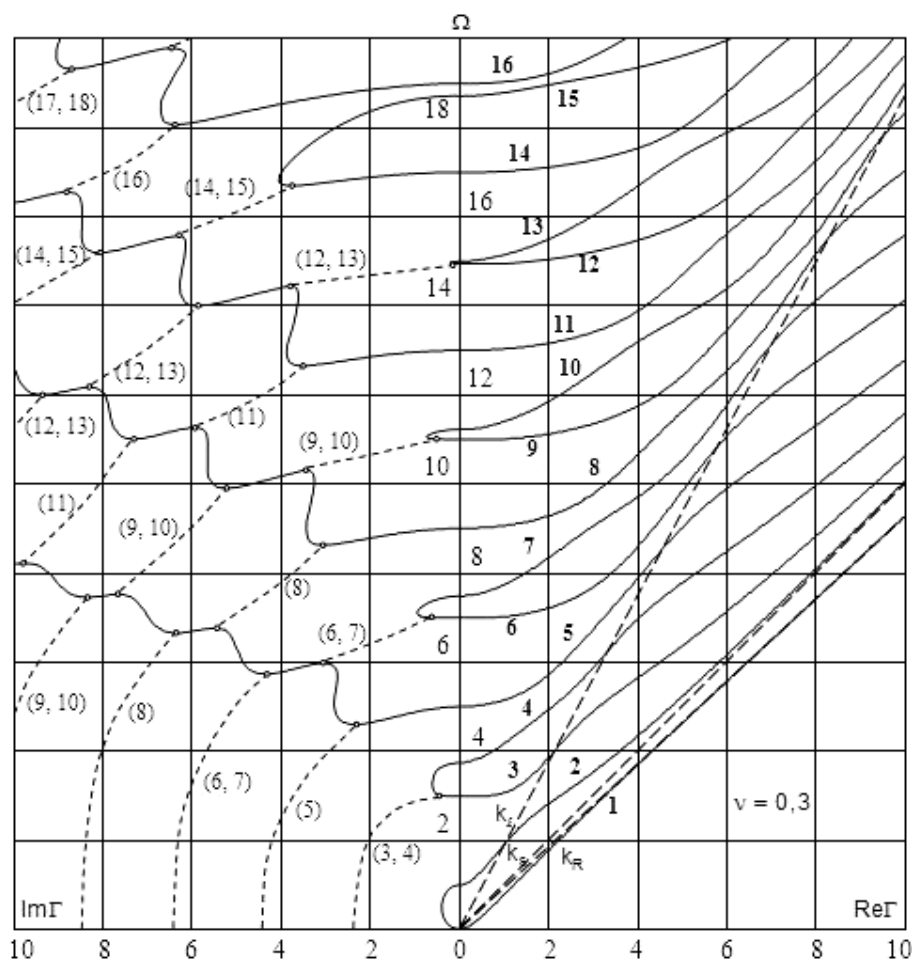


Рис. 4

На рис. 4 приведены результаты решений уравнений (56) и (58). Как и ранее, в левых полуплоскостях рис. 3 и рис. 4 располагаются чисто мнимые ($\pm i\Gamma$) значения постоянной распространения, т.е. корни уравнений (57) и (58), а в правых полуплоскостях – действительные значения волновых чисел $\pm\Gamma$, т.е. корни уравнений (55) и (56), которые соответствуют распространяющимся цилиндрическим волнам Лэмба. По осям ординат отсчитывается безразмерная частота Ω . Цифры возле ветвей действительных корней уравнений (55) и (56) соответствуют номерам нормальных волн Лэмба.

Из приведенных на рис. 3 и рис. 4 построений следует, что на любой частоте Ω существует конечное число распространяющихся и не распространяющихся, с чисто мнимым значением волнового числа, нормальных волн Лэмба. Отсюда следует, что этот конечный набор распространяющихся и не распространяющихся нормальных волн Лэмба не обладает полнотой в смысле удовлетворения третьему закону Ньютона в области приложения внешних сил.

Йозеф Земанек (Zemanek J.) [12], ссылаясь на малодоступный научный отчет (см. пункт 14 библиографии в его статье [12]), утверждает, что впервые на необходимость существования комплексных корней дисперсионного уравнения осесимметричных продольных волн в стержне кругового поперечного сечения указал Кэртис (Curtis C.W.) еще в 1953г. Исследования дисперсионных уравнений продольных волн в пластинах и стержнях, выполненные несколько позже Миндлиным Р.Д. (Mindlin R.D.) и Морио Оное (Оное М.) [8, 9] (более подробную библиографию см. в обзорах [6, 11]) показали, что уравнения (55) и (56) кроме действительных и чисто мнимых корней имеет бесконечное множество комплексных корней $\Gamma = \pm(\eta + i\mu)$.

Определим точки выхода $\Gamma_0 = \pm(\eta_0 + i\mu_0)$ комплексных участков частотного спектра волновых чисел из плоскости $\Omega = 0$.

Если в уравнение (55) подставить значение $\Omega = 0$, то оно немедленно обращается в тождество $0 = 0$, поскольку при $\Omega = 0$ безразмерные волновые числа $A = B = i\Gamma_0$. Это указывает на то, что комплексные числа Γ_0 находятся в плоскости $\Omega = 0$. Естественно, что это общее указание не позволяет получить каких-либо конкретных значений комплексных чисел Γ_0 .

Рассмотрим вспомогательную плоскость $\Omega = \text{const} \neq 0$. Будем полагать, что $\Omega \ll 1$, т.е. вспомогательная плоскость расположена вблизи плоскости $\Omega = 0$. В плоскости $\Omega \neq 0$, которая очень близка к плоскости $\Omega = 0$, комплексные волновые числа Γ практически не отличаются от искомых волновых чисел Γ_0 . Говоря иными словами, при переходе от плоскости $\Omega = 0$ к плоскости $\Omega \neq 0$ можно полагать, что комплексные волновые числа $\Gamma \approx \Gamma_0$ практически не зависят от значения безразмерной частоты Ω . В этом случае дисперсионное уравнение, т.е. функцию $F_{SS}(\Omega, \Gamma)$, можно рассматривать как функцию одного аргумента $z = \Omega^2$ с постоянным параметром Γ_0 . В окрестности точки $z = 0$ функция $F_{SS}(\Omega, \Gamma_0)$ может быть представлена рядом Тейлора следующего вида:

$$F_{SS}(\Omega, \Gamma_0) = F_{SS}(0, \Gamma_0) + z \left. \frac{\partial F_{SS}(\Omega, \Gamma_0)}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{1}{2} z^2 \left. \frac{\partial^2 F_{SS}(\Omega, \Gamma_0)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots,$$

где $z = \Omega^2$. Так как $z \ll 1$, то последнее выражение можно записать как

$$F_{SS}(\Omega, \Gamma_0) = \Omega^2 \left. \frac{\partial F_{SS}(\Omega, \Gamma_0)}{\partial (\Omega^2)} \right|_{\Omega^2=0}.$$

Поскольку Γ_0 при малых Ω является корнем дисперсионного уравнения, т.е. удовлетворяет условию $F_{SS}(\Omega, \Gamma_0) = 0$, постольку из последнего определения следует, что

$$\left. \frac{\partial F_{SS}(\Omega, \Gamma_0)}{\partial (\Omega^2)} \right|_{\Omega^2=0} = 0. \quad (59)$$

Выполняя необходимые вычисления, и учитывая, что при $\Omega \rightarrow 0$ безразмерные волновые числа $A = B = i\Gamma_0$, из условия (59) получаем следующее уравнение:

$$\operatorname{sh} \pi \Gamma_0 + \pi \Gamma_0 = 0. \quad (60)$$

Осуществляя те же действия с уравнением (56), получаем для определения координат Γ_0 точек выхода из плоскости $\Omega = 0$ ветвей комплексных волновых чисел антисимметричных волн Лэмба уравнение следующего вида:

$$\operatorname{sh} \pi \Gamma_0 - \pi \Gamma_0 = 0. \quad (61)$$

Удивительно, но это так, решения уравнений (60) и (61) не зависят от значений коэффициента Пуассона ν . В то время координаты точек Γ_0 выхода для объемных форм волновых движений в изотропных стержнях кругового поперечного сечения зависят от значений коэффициента Пуассона [12].

Трансцендентные уравнения (60) и (61) просты, и можно надеяться на их приближенное аналитическое решение за конечное число итераций.

Рассмотрим уравнение (60). Подставляя в это уравнение развернутую запись комплексного числа $\Gamma_0 = \eta_0 + i\mu_0$, и приравнявая нулю действительную и мнимую части полученного выражения, приходим к выводу, что

$$\operatorname{sh} \pi \eta_0 \cos \pi \mu_0 + \pi \eta_0 = 0; \quad (62)$$

$$\operatorname{ch} \pi \eta_0 \sin \pi \mu_0 + \pi \mu_0 = 0. \quad (63)$$

Так как при $\eta_0 \cong 1$ отношение $(\pi \eta_0 / \operatorname{sh} \pi \eta_0) < 1$, то в качестве нулевого приближения $\mu_0^{(0)}$ к точному значению μ_0 рассмотрим решение уравнения $\cos \pi \mu_0^{(0)} = 0$, которое следует из уравнения (62) при $\eta_0 \rightarrow \infty$. Очевидно, что $\mu_0^{(0)} = 1/2 + k$, где k – элемент ряда натуральных чисел. Подстановка найденной величины $\mu_0^{(0)}$ в уравнение (63) дает следующий результат:

$$(-1)^k \operatorname{ch} \pi \eta_0 = -(1/2 + k)\pi. \quad (64)$$

Поскольку $\operatorname{ch} \pi \eta_0 > 0$ по определению, постольку из уравнения (64) следует, что k должно быть нечетным числом, т.е. $k = 1 + 2m$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. При этом координаты μ_0 и η_0 точки выхода принимают множественные значения μ_m и η_m с нулевым приближением $\mu_m^{(0)} = 3/2 + 2m$. Из уравнения (64) следует, что нулевое приближение к точному значению η_m действительной координаты точки выхода m -ой ветви комплексных волновых чисел симметричных волн Лэмба определяется следующим выражением

$$\eta_m^{(0)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arch} \left[\pi \left(\frac{3}{2} + 2m \right) \right]. \quad (65)$$

Нулевые приближения $\mu_m^{(0)}$ и $\eta_m^{(0)}$ являются асимптотическими решениями системы уравнений (63), (64) при $m \rightarrow \infty$.

Первое приближение $\mu_m^{(1)}$ к точному значению мнимой координаты m -ой точки выхода будем искать в следующем виде

$$\mu_m^{(1)} = \mu_m^{(0)} + \Delta \mu_m^{(1)}, \quad (66)$$

где $\Delta\mu_m^{(1)}$ – поправка первого приближения. Подставляя определения (65) и (66) в уравнение (62) получаем следующий результат:

$$\sin \pi\Delta\mu_m^{(1)} = -\frac{\pi\eta_m^{(0)}}{\operatorname{sh} \pi\eta_m^{(0)}},$$

откуда следует, что

$$\Delta\mu_m^{(1)} = -\frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\pi\eta_m^{(0)}}{\operatorname{sh} \pi\eta_m^{(0)}} \right). \quad (67)$$

Подставляя значения $\mu_m^{(1)}$ в уравнение (63), находим первое приближение $\eta_m^{(1)}$:

$$\eta_m^{(1)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arch} \left(-\frac{\pi\mu_m^{(1)}}{\sin \pi\mu_m^{(1)}} \right). \quad (68)$$

Второе приближение к точному значению мнимых величин μ_m будем искать в аналогичном представлению (66) виде, т.е.

$$\mu_m^{(2)} = \mu_m^{(1)} + \Delta\mu_m^{(2)} = \mu_m^{(0)} + \Delta\mu_m^{(1)} + \Delta\mu_m^{(2)}. \quad (69)$$

При этом, как следует из уравнения (62) второе приближение $\mu_m^{(2)}$ должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\cos \pi\mu_m^{(2)} = -\frac{\pi\eta_m^{(1)}}{\operatorname{sh} \pi\eta_m^{(1)}}. \quad (70)$$

Подставляя разложение (69) в уравнение (70), получаем следующий результат:

$$\Delta\mu_m^{(2)} = -\Delta\mu_m^{(1)} - \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\pi\eta_m^{(1)}}{\operatorname{sh} \pi\eta_m^{(1)}} \right),$$

после чего

$$\mu_m^{(2)} = \mu_m^{(0)} - \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\pi\eta_m^{(1)}}{\operatorname{sh} \pi\eta_m^{(1)}} \right); \quad \eta_m^{(2)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arch} \left(-\frac{\pi\mu_m^{(1)}}{\sin \pi\mu_m^{(1)}} \right).$$

Продолжая аналогичные рассуждения, можно показать, что n -ое приближение к точным значениям действительной η_m и мнимой μ_m частям комплексной координаты точки выхода m -ой ветви комплексных корней уравнения $F_{SS}(0, \Gamma_m) = 0$ из плоскости $\Omega = 0$ определяется следующими формулами:

$$\mu_m^{(n)} = \mu_m^{(0)} - \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\pi\eta_m^{(n-1)}}{\operatorname{sh} \pi\eta_m^{(n-1)}} \right); \quad \eta_m^{(n)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arch} \left(-\frac{\pi\mu_m^{(n-1)}}{\sin \pi\mu_m^{(n-1)}} \right). \quad (71)$$

В табл. 1 представлены результаты вычисления координат η_m и μ_m первых десяти точек выхода. Цифры, помещенные в колонки 2 и 3 этой таблицы, заимствованы из монографии [3 (таблица 5 на стр.130)].

Отчетливо видно, что уже первое приближение доставляет значения $\eta_m^{(1)}$ и $\mu_m^{(1)}$, которые отличаются от приведенных в колонках 2 и 3 цифр в третьем знаке после запятой. Значение $\eta_m = 1,241$ в четвертой строке колонки 2 записано, по всей вероятности, с ошибкой во втором знаке после запятой.

Таблица 1

m	η_m	μ_m	Нулевое приближение		Первое приближение		
			$\eta_m^{(0)}$	$\mu_m^{(0)}$	$\eta_m^{(1)}$	$\mu_m^{(1)}$	$\Delta\mu_m^{(1)}$
	2	3	4	5	6	7	8
0	0,716	1,341	0,710432	1,5	0,717037	1,338943	$-1,610573^{-1}$
1	0,988	3,409	0,983121	3,5	0,987948	3,408982	$-9,101794^{-2}$
2	1,129	5,433	1,127386	5,5	1,130413	5,434175	$-6,582457^{-2}$
3	1,241	7,448	1,226235	7,5	1,228328	7,447675	$-5,232523^{-2}$
4	1,303	9,457	1,301534	9,5	1,303084	9,456228	$-4,377185^{-2}$
5	–	–	1,362377	11,5	1,363580	11,462187	$-3,781268^{-2}$
6	–	–	1,413432	13,5	1,414399	13,466603	$-3,339713^{-2}$
7	–	–	1,457417	15,5	1,458215	15,470020	$-2,998035^{-2}$
8	–	–	1,496055	17,5	1,496727	17,472750	$-2,724972^{-2}$
9	–	–	1,530506	19,5	1,531081	19,474988	$-2,501237^{-2}$
m	Второе приближение			Третье приближение			
	$\eta_m^{(2)}$	$\mu_m^{(2)}$	$\Delta\mu_m^{(2)}$	$\eta_m^{(3)}$	$\mu_m^{(3)}$	$\Delta\mu_m^{(3)}$	
	10	11	12	13	14	15	
0	0,716369	1,341038	$2,094976^{-3}$	0,716435	1,340827	$-2,108886^{-4}$	
1	0,987756	3,409943	$9,611929^{-4}$	0,987763	3,409905	$-3,806625^{-5}$	
2	1,130345	5,434630	$4,554117^{-4}$	1,130346	5,434620	$-1,019992^{-5}$	
3	1,228297	7,447932	$2,568079^{-4}$	1,228297	7,447928	$3,845885^{-6}$	
4	1,303067	9,456390	$1,618891^{-4}$	1,303067	9,456388	$-1,772576^{-6}$	
5	1,363570	11,462297	$1,099432^{-4}$	1,363570	11,462296	$-9,127406^{-7}$	
6	1,414393	13,466682	$7,883741^{-5}$	1,414393	13,466682	$-4,886616^{-7}$	
7	1,458211	15,470079	$5,888606^{-5}$	1,458211	15,470079	$-2,948776^{-7}$	
8	1,496724	17,472795	$4,537539^{-5}$	1,496724	17,472795	$-2,024078^{-7}$	
9	1,531079	19,475024	$3,584435^{-5}$	1,531079	19,475024	$-1,245871^{-7}$	

Уравнение (61), решение которого доставляет значения координат точек выхода комплексных корней условия существования антисимметричных волн Лэмба распадается на два уравнения следующего вида:

$$\operatorname{sh} \pi \eta_m \cos \pi \mu_m - \pi \eta_m = 0; \quad (72)$$

$$\operatorname{ch} \pi \eta_m \sin \pi \mu_m - \pi \mu_m = 0. \quad (73)$$

Из уравнения (72) находим нулевое приближение для координаты μ_m : $\mu_m^{(0)} = 1/2 + k$. После подстановки значения $\mu_m^{(0)}$ в уравнение (73), определяем, что k должно быть четным числом, т.е. $\mu_m^{(0)} = 1/2 + 2m$. Повторяя цепочку предыдущих рассуждений, приходим к выводу, что n -ая итерация к точным значениям координат μ_m

и η_m определяется следующими выражениями:

$$\mu_m^{(n)} = \frac{1}{2} + 2m - \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{\pi\eta_m^{(n-1)}}{sh \pi\eta_m^{(n-1)}}\right); \quad \eta_m^{(n)} = \frac{1}{\pi} \text{Arch}\left(\frac{\pi\mu_m^{(n)}}{\sin \pi\mu_m^{(n)}}\right). \quad (74)$$

Числовые значения нулевого и первых трех приближений к точным значениям координат μ_m и η_m приведены в табл. 2.

Таблица 2

m	Нулевое приближение		Первое приближение			
	$\eta_m^{(0)}$	$\mu_m^{(0)}$	$\eta_m^{(1)}$	$\mu_m^{(1)}$	$\Delta\mu_m^{(1)}$	
1	2	3	4	5	6	
0	$3,257034^{-1}$	0,5	$1,052975^{-1}$	$1,797843^{-1}$	$-3,202159^{-1}$	
1	$8,753809^{-1}$	2,5	$8,816459^{-1}$	2,385153	$-1,148471^{-1}$	
2	1,063378	4,5	1,067149	4,423869	$-7,613131^{-2}$	
3	1,180637	6,5	1,183129	6,441790	$-5,820996^{-2}$	
4	1,266107	8,5	1,267896	8,452376	$-4,762422^{-2}$	
5	1,333407	10,5	1,334766	10,459449	$-4,055075^{-2}$	
6	1,388927	12,5	1,390002	12,464547	$-3,545349^{-2}$	
7	1,436184	14,5	1,437060	14,468413	$-3,158711^{-2}$	
8	1,477322	16,5	1,478053	16,471457	$-2,854333^{-2}$	
9	1,513746	18,5	1,514367	18,473922	$-2,607846^{-2}$	
m	Второе приближение			Третье приближение		
	$\eta_m^{(2)}$	$\mu_m^{(2)}$	$\Delta\mu_m^{(2)}$	$\eta_m^{(3)}$	$\mu_m^{(3)}$	$\Delta\mu_m^{(3)}$
7	8	9	10	11	12	13
0	$3,498572^{-2}$	$6,049970^{-2}$	$-1,192844^{-1}$	$1,165773^{-2}$	$2,018818^{-2}$	$-4,031152^{-2}$
1	$8,812746^{-1}$	2,386668	$1,515378^{-3}$	$8,812990^{-1}$	2,386579	$-8,862618^{-5}$
2	1,067038	4,424513	$6,441946^{-4}$	1,067042	4,424494	$-1,889389^{-5}$
3	1,183083	6,442126	$3,362993^{-4}$	1,183084	6,442120	$-6,191956^{-6}$
4	1,267873	8,452578	$2,016849^{-4}$	1,267873	8,452575	$-2,587914^{-6}$
5	1,334753	10,459581	$1,323952^{-4}$	1,334753	10,459580	$-1,264594^{-6}$
6	1,389994	12,464640	$9,260303^{-5}$	1,389994	12,464639	$-6,883314^{-7}$
7	1,437055	14,468481	$6,783540^{-5}$	1,437055	14,468481	$-3,868251^{-7}$
8	1,478049	16,471509	$5,153888^{-5}$	1,478049	16,471509	$-2,817564^{-7}$
9	1,514364	18,473962	$4,025250^{-5}$	1,514364	18,473962	$-1,942979^{-7}$

Также в табл. 2 даны значения поправок $\Delta\mu_m^{(n)}$ первых трех приближений. Хорошо видно, что при $m = 0$ поправка каждого последующего приближения $\Delta\mu_0^{(n)}$ соиз-

мерима со значениями $\mu_0^{(n-1)}$ и $\eta_0^{(n-1)}$. Это явное указание на то, что точные значения μ_0 и η_0 равны нулю. Полагая, что $\eta_0^{(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ из определения $\mu_0^{(n)} = 1/2 - (1/\pi) \arcsin(1)$ следует, что $\mu_0^{(n)} = 0$. Четвертое и последующие приближения к точным значениям μ_0 и η_0 дают следующие результаты:

$$\begin{aligned} \eta_0^{(4)} &= 3,885756 \cdot 10^{-3}; & \mu_0^{(4)} &= 6,730194 \cdot 10^{-3}; & \eta_0^{(5)} &= 1,295246 \cdot 10^{-3}; \\ \mu_0^{(5)} &= 2,243428 \cdot 10^{-3}; & \eta_0^{(6)} &= 4,317486 \cdot 10^{-4}; & \mu_0^{(6)} &= 7,478103 \cdot 10^{-4}; \\ \eta_0^{(7)} &= 1,439162 \cdot 10^{-4}; & \mu_0^{(7)} &= 2,492701 \cdot 10^{-5}; & \eta_0^{(8)} &= 4,797206 \cdot 10^{-5}; \\ \mu_0^{(8)} &= 8,309001 \cdot 10^{-5}; & \eta_0^{(9)} &= 1,599069 \cdot 10^{-5}; & \mu_0^{(9)} &= 2,769668 \cdot 10^{-5}; \\ \eta_0^{(10)} &= 5,330228 \cdot 10^{-6}; & \mu_0^{(10)} &= 9,232228 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Таким образом, число m в формулах (74) принимает значения $1, 2, 3, \dots$. Необходимо подчеркнуть, что уравнения (62), (63) и (72), (73) не изменяют своей конструкции при подстановке в них значений $\pm\mu_m$ и $\pm\eta_m$. А это означает, что каждой точке выхода с координатами $\Gamma_m = \eta_m + i\mu_m$ соответствуют еще три точки с координатами $-\eta_m + i\mu_m$, $-\eta_m - i\mu_m$ и $\eta_m - i\mu_m$.

Полные карты точек выхода из плоскости $\Omega = 0$ ветвей комплексных корней дисперсионных уравнений (51) и (53) показаны на рис. 5, а (симметричные волны Лэмба) и рис. 5, б (антисимметричные волны Лэмба). В точке $\eta = \mu = 0$ комплексной

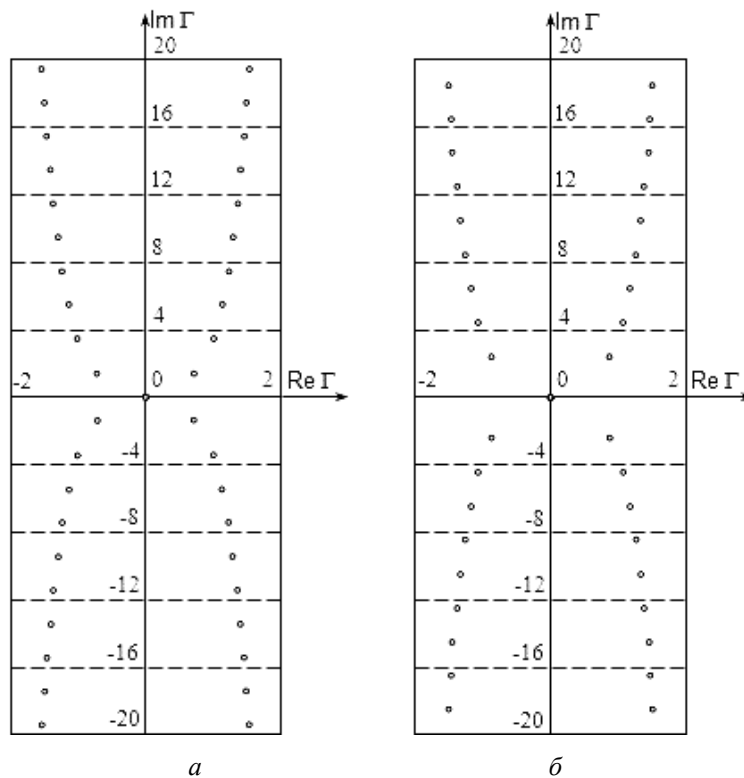


Рис. 5

плоскости $\Omega = 0$ находится точка выхода ветви действительных волновых чисел первой симметричной и первой антисимметричной нормальной волны Лэмба, а также ветви чисто мнимых значений волновых чисел второй антисимметричной волны Лэмба.

Таким образом, совокупность распространяющихся и не распространяющихся (с комплексными и чисто мнимыми значениями волновых чисел) нормальных волн образуют общие решения дисперсионных уравнений (51) и (53) и, как следствие, однородной граничной задачи о возбуждении упругих волн в изотропном слое, которые обладают полнотой в смысле удовлетворения третьему закону Ньютона.

Для того, чтобы определить точки входа комплексных участков частотного спектра волновых чисел в плоскость $\text{Re } \Gamma = 0$, необходимо подставить значение $\Gamma = i\mu = -i\Gamma$ в условия существования (51) и (53) нормальных волн Лэмба в упругом слое. После подстановки получаем уравнения (57) и (58), частотный спектр корней которого показан в левой полуплоскости рис. 3 и рис. 4. Из этого факта следует очевидный вывод – точки входа комплексных ветвей корней дисперсионного уравнения (51) и (53) в плоскость $\text{Re } \Gamma = 0$ находятся на кривых, которые изображены в левой полуплоскости рис. 3 и 4.

Для того, чтобы уточнить место расположения этих точек на плоскости $\text{Re } \Gamma = 0$, рассмотрим значения волновых чисел на очень близко расположенной плоскости $\text{Re } \Gamma \neq 0$, которая параллельна исходной плоскости $\text{Re } \Gamma = 0$. При малых значениях действительной части η комплексного волнового числа Γ условие существования (51) возможно представить разложением в ряд Тейлора следующего вида

$$F_{SS}(\Omega, \Gamma) = F_{SS}(\Omega, \Gamma)|_{\eta=0} + \eta \left\{ \frac{\partial F_{SS}(\Omega, \Gamma)}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \Gamma} + \frac{\partial F_{SS}(\Omega, \Gamma)}{\partial \Gamma} \right\} \Big|_{\eta=0} + \dots \quad (75)$$

Так как в непосредственной близости (точнее говоря – бесконечно близко) возле любой кривой в левой полуплоскости рис. 3 должно с хорошей точностью выполняться условие $F_{SS}(\Omega, \Gamma) \approx 0$, а $F_{SS}(\Omega, \Gamma)|_{\eta=0} = 0$ по определению, то при малых $\eta \neq 0$ из разложения (75) следует, что

$$F'_{\Omega}(\Omega, i\mu) \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} + F'_{\mu}(\Omega, i\mu) = 0, \quad (76)$$

где $F'_{\Omega}(\Omega, i\mu) = [\partial F_{SS}(\Omega, \Gamma)/\partial \Omega]_{\eta=0}$ и $F'_{\mu}(\Omega, i\mu) = [\partial F_{SS}(\Omega, \Gamma)/\partial \Gamma]_{\eta=0}$. Из последнего равенства определяется наклон ветви корней уравнения $F_{SS}(\Omega, i\mu) = F_{SS}(\Omega, \pm i\Gamma) = 0$ к оси абсцисс $\text{Im } \Gamma = \mu$:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = - \frac{F'_{\mu}(\Omega, i\mu)}{F'_{\Omega}(\Omega, i\mu)}. \quad (77)$$

Так как при $\mu \neq 0$, как правило, выполняется условие $F'_{\Omega}(\Omega, i\mu) \neq 0$, то условие (76) выполняется при $F'_{\mu}(\Omega, i\mu) = 0$. При этом, как следует из соотношения (77), автоматически выполняется условие $\partial \Omega / \partial \mu = 0$.

Таким образом, комплексные ветви частотного спектра волновых чисел симметричных волн Лэмба входят в те точки кривых $F_{SS}(\Omega, \pm i\Gamma) = 0$, в которых касательная к ним имеет нулевой наклон, т.е. параллельна оси абсцисс $\text{Im } \Gamma$ левой полуплоскости рис. 3. Так как $\partial \Gamma / \partial \mu|_{\eta=0} = i$, то левая часть условия (76) является действительным числом, а это значит, что комплексные участки спектра волновых чисел вхо-

дят в плоскость $\operatorname{Re} \Gamma = 0$ параллельно нормали к этой плоскости, т.е. оси $\operatorname{Re} \Gamma$ в правой полуплоскости рис. 3. Точно такие логические построения имеют место в случае комплексных ветвей волновых чисел антисимметричных волн Лэмба.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что комплексные участки частотного спектра волновых чисел входят в плоскость $\operatorname{Im} \Gamma = 0$, т.е. в правую полуплоскость рис. 3, в те точки кривых $F_{SS}(\Omega, \pm \Gamma) = F_{SS}(\Omega, \pm \eta) = 0$, в которых $F'_\eta(\Omega, \pm \eta) = 0$, т.е. в которых касательная параллельна оси действительных значений безразмерного волнового числа Γ . Комплексные участки входят в плоскость $\operatorname{Im} \Gamma = 0$ (на рис. 3 это всего лишь одна точка, а на рис. 4 такие точки в рассматриваемом диапазоне частот вовсе отсутствуют) по направлению нормали к этой плоскости.

Точки входа комплексных участков частотного спектра волновых чисел в плоскости $\operatorname{Re} \Gamma = 0$ и $\operatorname{Im} \Gamma = 0$ показаны на рис. 3 и рис. 4 светлыми кружками.

Имея в своем распоряжении значения точек выхода и входа, можно приступить к решению трансцендентных уравнений (51) и (53), полагая в них $\Gamma = \eta + i\mu$.

Опираясь на результаты вычислений Й.Земанека [12] комплексных ветвей частотного спектра волновых чисел и изотропных стержнях кругового поперечного сечения, можно сделать вывод, что некоторые точки на змееподобных ветвях чисто мнимых корней дисперсионных уравнений (57) и (58) являются точками выхода комплексных ветвей из плоскости $\operatorname{Re} \Gamma = 0$. На рис. 3 и рис. 4 штриховыми линиями схематически показаны мнимые части ветвей комплексных корней уравнений (51) и (53).

Из представленных на рис. 3 и рис. 4 построений следует, что любая мода из бесконечного набора нормальных волн существует во всем частотном диапазоне $0 \leq \Omega < \infty$. При этом на низких частотах эта мода существует как не распространяющаяся, превращаясь на высоких частотах в переносчика энергии. Исключением из сказанного являются первая симметричная и первая антисимметричная волны Лэмба.

Заключение.

В результате решения однородной граничной задачи об установившихся вынужденных колебаниях элементарного объема деформируемого твердого тела получены характеристики ультразвуковых гармонических волн, которые существуют за пределами области нагружения, и которые можно возбудить контактным или бесконтактным (электромагнитным) способом. Указанная однородная граничная задача решена в предположении произвольного пространственного распределения волнового поля смещений материальных частиц упругого слоя.

Получены соотношения, которые описывают свободные колебания материальных частиц упругого слоя (нормальные волны), т.е. собственные функции однородной граничной задачи при равенстве нулю объемных и поверхностных нагрузок, для неосесимметричных радиально распространяющихся волн Лэмба и горизонтально-сдвиговых волн.

При численном решении дисперсионных уравнений для неосесимметричных волн Лэмба, исследованы комплексные корни дисперсионного уравнения для симметричных и антисимметричных волн Лэмба.

Показано, что на любой безразмерной частоте ($\Omega \geq 0$) существует бесконечное множество нормальных симметричных и антисимметричных волн Лэмба. Из этого множества лишь конечное число нормальных волн являются распространяющимися, т.е. способными выносить энергию из области приложения внешних сил.

Бесконечное число не распространяющихся нормальных волн играют роль реактивной нагрузки для источника внешних сил и способны обеспечить выполнение третьего закона Ньютона в области приложения внешних сил.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто принцип і метод розрахунку електроакустичних перетворювачів в режимі збудження пружних хвиль в ізотропних твердих тілах. При розв'язанні однорідної граничної задачі динамічної теорії пружності отримано співвідношення, які повністю визначають весь набір власних функцій (нормальних хвиль). Розглянуто основні розв'язки крайової задачі динамічної теорії пружності в припущенні, що джерело просторово розвинених хвиль Лемба не має осьової симетрії. Виконано кількісні оцінки комплексних коренів дисперсійного рівняння для симетричних і антисиметричних хвиль Лемба.

1. *Вовк А.Е., Тютекин В.В.* Возбуждение нормальных волн в плоском упругом волноводе силами, заданными в его поперечном сечении. // Тр. Акуст. ин-та. – 1969. – № 9. – С. 5 – 26.
2. *Гринченко В.Т., Петрищев О.Н.* Изучение закономерностей процесса возбуждения упругих волн при сложном нагружении участка изотропной упругой полосы // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1987. – **40**, № 6. – С. 22 – 31.
3. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.
4. *Кузнецов С.В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журнал – 2014. – **60**, № 1. – С. 90 – 100.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
6. *Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довгий С.А., Трофимчук А.Н., ван Хейст Г.Я.Ф.* Упругие волноводы: история и современность // Математичні методи та фізико-механічні поля – 2008. – **51**, № 2. – С. 86 – 104.
7. *Grinchenko V.T., Petrishchev O.N.* Excitation of Elastic Vibrations in a Longitudinally Polarized Magnetostrictive Strip by an External Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 1986. – **22**, N 7. – P. 650 – 654.
8. *Mindlin R.D., Onoe M., Medick M.A.* Mathematical theory of vibrations of elastic plates // Proc. 11th Annual Symp. on Frequency Control (Fort Monmouth, N. J., 7 – 9 May 1957). – Fort Monmouth N.J.: U.S. Army Signal Engineering Laboratories, 1957. – P. 1 – 40.
9. *Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1962. – **29**, N 4. – P. 729 – 734.
10. *Petrishchev O.N., Trushko N.S.* Modeling the Radiation of Ultrasonic Waves by a Unit Source of Acoustic Emission Noise // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 207 – 222.
11. *Thurston R.N.* Elastic waves in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Amer. – 1978. – **64**, N 1. – P. 1 – 37.
12. *Zemanek J.* An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. – 1972. – **51**, N 1. – Pt. 2. – P. 265 – 289.

Поступила 29.05.2018

Утверждена в печать 04.06.2019