

Н. В. Никитина

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ КВАДРОКОПТЕРА

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract. This study of stability is connected with consideration of the planes of a three-dimensional model of oscillations of a quadcopter. A qualitative analysis is carried out at the singular point on each plane using of equations in variations. The cases are considered at the constant voltage in all engines and the different constant voltages in the engines.

Key words: quadcopter, stability of multidimensional system.

Введение.

В работах [3, 6] рассматривалась модель транспортного средства, в которой обсуждался вопрос существования областей притяжения. Существование области притяжения к нулевому решению многомерной системы гармонизирует затухание возмущений с течением времени. Значительное внимание в публикациях о движении беспилотного квадрокоптера уделяется вопросам стабилизации и управления [4, 5]. В данной работе рассматривается известная модель летательного аппарата (ЛА) квадрокоптера [1, 2]. Для установления устойчивости решений принимаем во внимание три плоскости пространственной модели. Также анализируем устойчивость вращений ЛА при разных, но постоянных напряжениях двигателей квадрокоптера.

Математическая модель представлена системой в форме Коши 12- го порядка [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= V_x; \quad \frac{dY}{dT} = V_y; \quad \frac{dZ}{dT} = V_z; \\ m \frac{dV_x}{dt} &= F(\cos \varphi \sin \gamma \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) - A_x V_x; \\ m \frac{dV_y}{dt} &= F(-\sin \varphi \sin \gamma \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta) - A_y V_y; \\ m \frac{dV_z}{dt} &= F \cos \theta \cos \gamma - mg - A_z V_z; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_\gamma; \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_\theta; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_\varphi; \\ J_x \frac{d\omega_\gamma}{dt} &= (J_y - J_z)\omega_\theta \omega_\varphi - J_\Gamma \omega_\theta \omega_\Gamma + M_\gamma; \\ J_y \frac{d\omega_\theta}{dt} &= (J_z - J_x)\omega_\gamma \omega_\varphi + J_\Gamma \omega_\gamma \omega_\Gamma + M_\theta; \\ J_z \frac{d\omega_\varphi}{dt} &= (J_x - J_y)\omega_\gamma \omega_\theta + M_\varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Введено три системы координат. Система XYZ связана с Землей. Ось OY направлена на север, ось OX – на восток, ось OZ – вертикально вверх. Четыре двигателя беспилотного квадрокоптера размещены на концах балок на одинаковых расстояниях L . Начало второй системы координат $(OX_1Y_1Z_1)$ связано с центром масс квадрокоптера (рис. 1). В третьей системе координат ось OY_2 направлена от центра масс до носа ЛА (точка A_1); ось OX_2 – до правого двигателя, ось OZ_2 – вверх перпендикулярна до двух осей. Угловые перемещения характеризуются тремя углами: γ – угол крена; θ – угол тангажа; φ – угол рыскания. Крен – угол между продольной осью ЛА и горизонтальной плоскостью; тангаж – угол между поперечной осью ЛА и горизонтальной плоскостью; угол рыскания – угол поворота корпуса ЛА в горизонтальной плоскости.

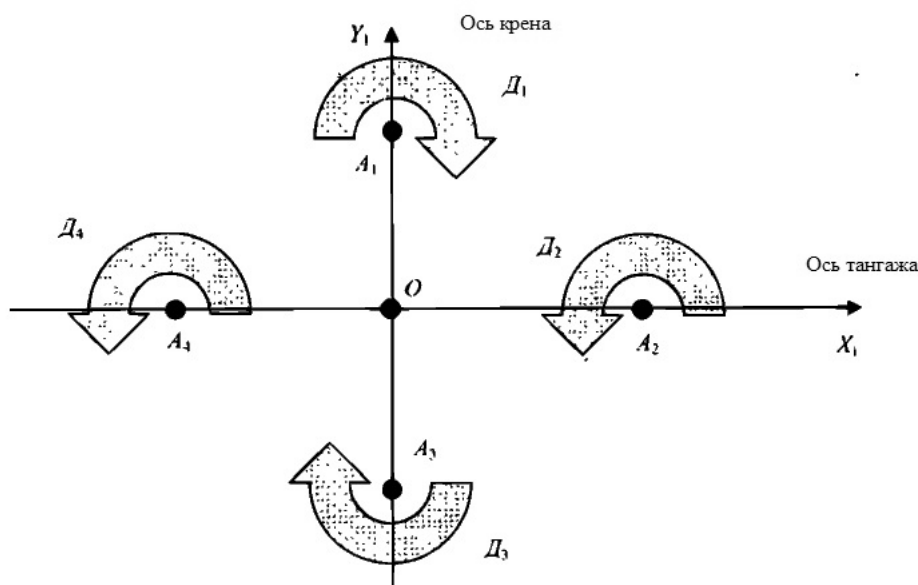


Рис. 1

Сила тяги $F_j (j=1, 2, 3, 4)$ приложена в разных точках A_1, A_2, A_3, A_4 (см. рис. 1) и имеет одно направление

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \quad (2)$$

где k – коэффициент электродвижущей силы. Суммарный вектор угловых скоростей двигателей имеет вид

$$\omega_{\Gamma} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4.$$

Суммарный момент сил на оси тангажа равен

$$M_{\theta} = kL(\omega_1^2 - \omega_3^2), \quad (3)$$

на оси крена

$$M_{\gamma} = kL(\omega_4^2 - \omega_2^2), \quad (4)$$

на оси рыскания

$$M_{\varphi} = b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2), \quad (5)$$

где b – коэффициент аэродинамического сопротивления. Вращательные движения содержат $J = \text{diag}(J_{\gamma}, J_{\theta}, J_{\varphi})$ – диагональную матрицу моментов инерции; вектор угловых скоростей имеет вид $\omega = [\omega_{\gamma} \ \omega_{\theta} \ \omega_{\varphi}]^T$.

Опуская выкладки из [1, 2], приведем выражения скорости вращения j -го двигателя в случае постоянного напряжения U_j

$$\omega_j = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0 + 4a_2bU_j}}{2a_2} \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (6)$$

где

$$a_1 = \frac{k_D}{J}; \quad a_2 = \frac{k}{J}; \quad a_0 = \frac{M_T}{J}; \quad b = \frac{k_D}{JR};$$

k_D – постоянный коэффициент двигателя; M_T – момент сил сухого трения; J – момент инерции ротора; R – омическое сопротивление обмотки.

1. Анализ вращательного движения квадрокоптера при постоянном напряжении во всех двигателях.

Результаты, приведенные выше, составляют содержание работ [1, 2]. Полагаем, что ЛА работает в режиме постоянного напряжения U во всех четырех двигателях, тогда в силу формул (2) – (6) в уравнениях (1) равны нулю моменты $M_\theta, M_\gamma, M_\varphi$ и суммарный вектор угловых скоростей двигателей ω_Γ . Для этого случая запишем систему уравнений, которая связана лишь с вращательным движением ЛА. Введем диссипативную составляющую в уравнения движения.

$$J_x \frac{d\omega_\gamma}{dt} = (J_y - J_z) \omega_\theta \omega_\varphi - b_\gamma \omega_\gamma; \quad J_y \frac{d\omega_\theta}{dt} = (J_z - J_x) \omega_\gamma \omega_\varphi - b_\theta \omega_\theta; \quad (7)$$

$$J_z \frac{d\omega_\varphi}{dt} = (J_x - J_y) \omega_\gamma \omega_\theta - b_\varphi \omega_\varphi.$$

Запишем характеристические уравнения, соответствующие линейной системе (7). Получим уравнения на оси крена, тангажа, рыскания

$$J_x \lambda + b_\gamma = 0; \quad J_y \lambda + b_\theta = 0; \quad J_z \lambda + b_\varphi = 0. \quad (8)$$

В уравнениях (8) содержатся по одному отрицательному корню. Это гарантирует устойчивость вращательных скоростей в определенной (малой) окрестности нуля за счет линейной диссипации. Далее отменим диссипативные составляющие в уравнениях движения.

Следующий этап: напряжения двигателей ($U_i = 1, 2, 3, 4$) постоянные, но различные (для каждого двигателя). Уравнения движения (7) могут содержать вращательные моменты из числа $M_\gamma, M_\theta, M_\varphi$.

2. Анализ устойчивости вращательных движениях квадрокоптера.

Рассматривая плоскости $\gamma\theta$; $\theta\varphi$; $\gamma\varphi$ в окрестности нуля можно определить области притяжения на каждой плоскости.

Пример. Пусть на вращательные скорости двигателей (двигатели 1, 3) наложены такие условия:

$$\omega_1 > \omega_3; \quad \omega_1 - \omega_3 = \varepsilon; \quad \omega_1^2 - \omega_3^2 = \Delta. \quad (9)$$

Остальные скорости вращения имеют вид: $|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_4|$. Заметим, что при выполнении условий (9) суммарный вектор угловых скоростей $\omega_\Gamma \neq 0$. Пусть $J_x > J_y$; $J_z > J_x$;

$$\omega_\Gamma = -\varepsilon; \quad J_\Gamma \omega_\gamma \omega_\Gamma = -\varepsilon J_\Gamma \omega_\gamma; \quad J_\Gamma \omega_\theta \omega_\Gamma = -\varepsilon J_\Gamma \omega_\theta;$$

$$M_\gamma = 0; \quad M_\theta = kL\Delta; \quad M_\varphi = b\Delta.$$

Запишем систему вращательных уравнений, принимая во внимание условия (9).

$$J_x \frac{d\omega_\gamma}{dt} = -(J_z - J_y)\omega_\gamma\omega_\varphi + \varepsilon J_\Gamma \omega_\theta; \quad J_y \frac{d\omega_\theta}{dt} = (J_z - J_x)\omega_\gamma\omega_\varphi - \varepsilon J_\Gamma \omega_\gamma + M_\theta; \quad (10)$$

$$J_z \frac{d\omega_\theta}{dt} = (J_x - J_y)\omega_\gamma\omega_\theta - \varepsilon J_\Gamma \omega_\gamma + M_\varphi.$$

Рассмотрим процесс на плоскости $\gamma\theta$ в линейном виде

$$\frac{d\omega_\gamma}{dt} = \varepsilon \frac{J_\Gamma}{J_x} \omega_\theta; \quad \frac{d\omega_\theta}{dt} = -\varepsilon \frac{J_\Gamma}{J_y} \omega_\gamma. \quad (11)$$

Линейная система (11) имеет в особой точке (0, 0) характеристическое уравнение, из которого находим

$$\lambda^2 = -\frac{\varepsilon^2 J_\Gamma^2}{J_x J_y}. \quad (12)$$

Корни характеристического уравнения (12) показывают, что на плоскости $\gamma\theta$ в окрестности нуля процесс устойчивый неасимптотически. Рассмотрим уравнения в вариациях первых двух уравнений системы (10)

$$\frac{d\delta\omega_\gamma}{dt} = \frac{(J_z - J_y)}{J_x} \bar{\omega}_\varphi \delta\omega_\theta + \varepsilon \frac{J_\Gamma}{J_x} \delta\omega_\theta; \quad \frac{d\delta\omega_\theta}{dt} = \frac{(J_z - J_x)}{J_y} \bar{\omega}_\varphi \delta\omega_\gamma - \varepsilon \frac{J_\Gamma}{J_y} \delta\omega_\gamma. \quad (13)$$

Характеристическое уравнение системы в вариациях (13) имеет вид

$$\lambda^2 - \left(-\frac{(J_z - J_y)}{J_x} \bar{\omega}_\varphi - \varepsilon \frac{J_\Gamma}{J_x} \right) \left(-\frac{(J_z - J_x)}{J_y} \bar{\omega}_\varphi + \varepsilon \frac{J_\Gamma}{J_y} \right) = 0,$$

из которого находим

$$\lambda^2 = -\frac{\varepsilon^2 J_\Gamma^2}{J_x J_y} + \frac{(J_z - J_y)}{J_x} \frac{(J_z - J_x)}{J_y} \bar{\omega}_\varphi^2 + \varepsilon \frac{J_\Gamma}{J_x} \frac{(J_y - J_x)}{J_y} \bar{\omega}_\varphi. \quad (14)$$

При $\bar{\omega}_\varphi = 0$ на плоскости $\omega_\gamma\omega_\theta$ область устойчивости ограничивает окружность, параметры которой определены системой (11). Здесь $\lambda^2 = -(\varepsilon^2 J_\Gamma^2)/(J_x J_y)$. Радиус окружности $R_L = \varepsilon J_\Gamma \sqrt{1/(J_x J_y)}$. По мере возрастания абсолютной величины угловой скорости $\pm \bar{\omega}_\varphi$ в системе трех координат $\omega_\gamma, \omega_\theta, \omega_\varphi$ (в силу характеристического уравнения и формулы (14)) имеем уменьшение радиуса сечения области, которая является ограниченной областью устойчивости, порожденной плоскостью $\omega_\gamma\omega_\theta$ и частным решением $\pm \bar{\omega}_\varphi$. На это указывает уравнение в вариациях (13).

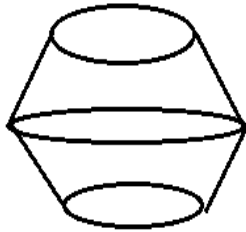


Рис. 2

Пусть λ^2 в формуле (14) имеет отрицательный знак (при некотором значении $\bar{\omega}_\varphi$). Тогда можно определить радиус сечения области устойчивости R_N , причем $R_N < R_L$. Эта область в виде эскиза показана на рис. 2.

Рассмотрим процесс на плоскости $\gamma\varphi$. На плоскости $\gamma\varphi$ линейная система имеет два нулевых корня.

$$\frac{d\omega_\gamma}{dt} = 0; \quad \frac{d\omega_\varphi}{dt} = 0.$$

Рассмотрим уравнения в вариациях на плоскости $\gamma\varphi$

$$\frac{d\delta\omega_\gamma}{dt} = -\frac{(J_z - J_y)}{J_x}\bar{\omega}_\theta\delta\omega_\varphi; \quad \frac{d\delta\omega_\varphi}{dt} = \frac{(J_x - J_y)}{J_z}\bar{\omega}_\theta\delta\omega_\gamma. \quad (15)$$

Уравнения в вариациях (15) имеет мнимые корни. На плоскости $\gamma\varphi$ процесс устойчивый относительно нуля.

Рассмотрим процесс на плоскости $\theta\varphi$. На плоскости $\theta\varphi$ линейная система имеет два нулевых корня.

$$\frac{d\omega_\theta}{dt} = 0; \quad \frac{d\omega_\varphi}{dt} = 0.$$

Составим уравнения в вариациях на плоскости $\theta\varphi$

$$\frac{d\delta\omega_\theta}{dt} = \frac{(J_z - J_x)}{J_y}\bar{\omega}_\gamma\delta\omega_\varphi; \quad \frac{d\delta\omega_\varphi}{dt} = \frac{(J_x - J_y)}{J_z}\bar{\omega}_\gamma\delta\omega_\theta. \quad (16)$$

Уравнения в вариациях (16) имеет седловые корни. На плоскости $\theta\varphi$ процесс неустойчивый относительно нуля.

Таким образом, условия (9) на вращательные движения показывают, как устойчивые вращения так и неустойчивые на координатных плоскостях. Область устойчивости имеет место, например, на плоскости $\gamma\theta$. Эта трехмерная область весьма мала и имеет геометрическую конфигурацию, показанную на рис. 2.

3. Анализ вращательного движения квадрокоптера при постоянном напряжении во всех двигателях и отсутствии диссипации.

Вернемся к системе (7) без диссипативной составляющей. Составим уравнения в вариациях системы (7) на каждой из плоскостей $\gamma\theta$; $\theta\varphi$; $\gamma\varphi$. Запишем характеристические уравнения в вариациях, по которым проведем качественный анализ относительно скоростей $\omega_\gamma, \omega_\theta, \omega_\varphi$. Рассмотрим уравнения в вариациях системы (7) (здесь $J_x > J_y; J_z > J_x$)

на плоскости $\gamma\theta$ –

$$\frac{d\delta\omega_\gamma}{dt} = -\frac{(J_z - J_y)}{J_x}\bar{\omega}_\varphi\delta\omega_\theta; \quad \frac{d\delta\omega_\theta}{dt} = \frac{(J_z - J_x)}{J_y}\bar{\omega}_\varphi\delta\omega_\gamma;$$

на плоскости $\theta\varphi$ –

$$\frac{d\delta\omega_\theta}{dt} = \frac{(J_z - J_x)}{J_y}\bar{\omega}_\gamma\delta\omega_\varphi; \quad \frac{d\delta\omega_\varphi}{dt} = \frac{(J_x - J_y)}{J_z}\bar{\omega}_\gamma\delta\omega_\theta;$$

на плоскости $\gamma\varphi$ –

$$\frac{d\delta\omega_\gamma}{dt} = -\frac{(J_z - J_y)}{J_x}\bar{\omega}_\theta\delta\omega_\varphi; \quad \frac{d\delta\omega_\varphi}{dt} = \frac{(J_x - J_y)}{J_z}\bar{\omega}_\theta\delta\omega_\gamma.$$

На плоскости $\gamma\theta$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 = -\frac{(J_z - J_y)}{J_x}\bar{\omega}_\varphi\frac{(J_z - J_x)}{J_y}\bar{\omega}_\varphi$$

будут мнимые.

На плоскости $\theta\varphi$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 = \frac{(J_x - J_y)}{J_z} \bar{\omega}_\gamma \frac{(J_z - J_x)}{J_y} \bar{\omega}_\gamma$$

будут седловые.

На плоскости $\gamma\varphi$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 = -\frac{(J_z - J_y)}{J_z} \bar{\omega}_\theta \frac{(J_z - J_x)}{J_x} \bar{\omega}_\theta$$

будут мнимые.

На плоскостях $\gamma\theta$, $\gamma\varphi$ мнимые корни в нуле занимают определенный объем, т.к. зависят от частных решений $\bar{\omega}_\varphi$ и $\bar{\omega}_\theta$. Области устойчивости имеют трехмерный вид. Таким образом, в системе вращательных движений при постоянном напряжении (без присутствия диссипативных сил) на плоскостях $\gamma\theta$, $\theta\varphi$, $\gamma\varphi$ генерируются седловые и мнимые решения в нулевых особых точках, что соответствует существованию как неасимптотической устойчивости так и неустойчивости системы вращательных движений. На это влияют также инерциальные характеристики ЛА.

Заключение.

При рассмотрении результатов работ [1, 2] было замечено, что, выделив из общей системы (1) уравнения вращательных движений, можно изучить проблему устойчивости вращательных движений. Возникновение неустойчивости в рамках предлагаемой в [1, 2] модели и подхода исследования связано с неустойчивостью, которая порождена на плоскостях, образованных осям крена, тангажа и рыскания в силу уравнений системы, описывающей вращательный процесс. Информация об устойчивости вращательных движений весьма полезна для решения проблем управления ЛА.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Дослідження стійкості пов'язане з розглядом площин тривимірної моделі коливань квадрокоптера. Проведено якісний аналіз в особливій точці на кожній площині за допомогою рівнянь в варіаціях. Розглянуто випадки при постійній нарузі в усіх двигунах та при різних постійних напругах в двигунах.

1. *Благітко Б., Мочульський Ю.* Математичне моделювання процесу стабілізації квадрокоптера у польоті // Електроніка та інформаційні технології. – 2013, вип. 3. – С. 96 – 107.
2. *Благітко Б., Мочульський Ю., Зайчук І., Кім Л.* Моделювання процесу стабілізації та керуваності безпілотного квадрокоптера у польоті. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013, вип. 18. – С. 21 – 31.
3. *Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г.* Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. К.: Наук. думка, 1990. – 232 с.
4. *Larin V.B.* Improving the Reliability of the Control System of a Quadcopter // Int. Appl. Mech. – 2018. – 46, N 4. – P. 454 – 462.
5. *Larin V.B., Tunic A.A.* On Problem of Synthesis of Control System for Quadcopter // Int. Appl. Mech. – 2017. – 46, N 3. – P. 342 – 348.
6. *Martynuk A.A., Nikitina N.V.* On the Qualitative Analysis of One Model of Transport Vehicle // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 231 – 238.

Поступила 27.09.2018

Утверждена в печать 04.06.2019