

Л.В.Мольченко¹, И.И.Лоос², Л.Я.Васильева,
А.Ю.Пархоменко

**МАГНИТОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ: УЧЕТ ДЖОУЛЕВОГО ТЕПЛА
И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ**

*Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, 54030, Николаев, Украина;
e-mail: ¹l.molchenko@gmail.com; ²Loiri@ukr.net*

Abstract. A theory and construction of non-linear problems of the thermomagnetoelasticity of flexible shells of revolution of variable thickness is considered with taking into account the Joule heat in the nonstationary magnetic field. A technique of analysis of a flexible conical shells of revolution of variable stiffness in the magnetic field is proposed. The thermoelasticity of the truncated flexible conical shell is considered an axisymmetric statement with taking into account the Joule heating.

Key words: magnetic field, Joule heat, Lorentz force, variable stiffness, flexible conical shell.

Введение.

Теория термомагнитоупругости пластин и оболочек – один из актуальных разделов теории упругости, т.к. многие элементы современных технологических конструкций изготовлены в виде гибких пластин и оболочек, которые в процессе эксплуатации находятся под действием механических, электромагнитных и температурных нагрузок [1, 3, 11]. В настоящее время в теоретических и прикладных исследованиях существенное развитие получило направление, связанное с изучением нестационарных термомеханических процессов деформирования при действии на токопроводящие элементы магнитных полей [7, 8, 10, 12]. Строгий анализ процессов деформирования при термоэлектромагнитном влиянии должен учитывать уравнения механики, электродинамики и уравнения теплопроводности при учете джоулевого тепла. Учет сил Лоренца и джоулевого тепла является определяющим в связанных задачах магнитоупругости.

В данной работе предложена теория и методика решения нелинейных задач магнитоупругости гибких оболочек вращения переменной жесткости с учетом джоулевого нагрева. На основании предложенной методики исследовано напряженно-деформированное состояние (НДС) гибкой усеченной конической оболочки переменной толщины с учетом джоулевого тепла.

1. Постановка задачи. Двумерные нелинейные уравнения магнитоупругости гибких оболочек вращения переменной жесткости.

Рассмотрим нелинейную задачу магнитоупругости об определении НДС проводящих гибких оболочек вращения переменной жесткости, находящихся под действием нестационарного магнитного поля и произвольной механической нагрузки. Принимаем, что изотропная упругая оболочка изготовлена из материала с конечной проводимостью σ См/м и находится во внешнем магнитном поле \vec{H}_0 А/м. Кроме того,

оболочка является проводником равномерно распределенного электрического тока плотности \vec{J}_{cm} А/м².

Пространственные уравнения магнитоупругости в дифференциальной форме в лагранжевых переменных имеют вид [6, 8, 14]

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \text{rot}\vec{H} = \vec{J}; \text{div}\vec{B} = 0; \rho \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \rho(\vec{F} + \vec{F}^\wedge) + \text{div}\overset{\wedge}{\sigma}, \quad (1)$$

где \vec{E} В/м – напряженность электрического поля; \vec{H} А/м – напряженность магнитного поля; \vec{B} Тл – магнитная индукция; \vec{J} А/м² – плотность электрического тока; ρ кг/м³ – плотность материала; \vec{F} Н/м² – объемная механическая сила; \vec{F}^\wedge Н/м² – объемная сила Лоренца; $\overset{\wedge}{\sigma}$ Н/м² – тензор внутренних напряжений.

Закон Ома и сила Лоренца с учетом стороннего тока \vec{J}_{cm} , соответственно, имеют вид

$$\vec{J} = \vec{J}_{cm} + \sigma[\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}]; \quad \rho\vec{F}^\wedge = \vec{J}_{cm} \times \vec{B} + \sigma[\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}] \vec{B}. \quad (2)$$

При построении приближенных (двумерных в материальных переменных) уравнений движения и уравнений электродинамики теории тонких оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке, используются гипотезы Кирхгофа – Лява и гипотезы о характере распределения электромагнитного поля [1, 6]

$$E_\alpha = E_\alpha(\alpha, \beta, t); \quad E_\beta = E_\beta(\alpha, \beta, t); \quad E_\gamma = \frac{\partial u_\beta}{\partial t} B_\alpha - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} B_\beta;$$

$$J_\alpha = J_\alpha(\alpha, \beta, t); \quad J_\beta = J_\beta(\alpha, \beta, t); \quad J_\gamma = 0; \quad (3)$$

$$H_\alpha = \frac{H_\alpha^+ + H_\alpha^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\alpha^+ - H_\alpha^-); \quad H_\beta = \frac{H_\beta^+ + H_\beta^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\beta^+ - H_\beta^-); \quad H_\gamma = H_\gamma(\alpha, \beta, t).$$

Здесь H_i^\pm ($i = \alpha, \beta, \gamma$) – известные составляющие напряженности магнитного поля на поверхностях оболочки, определяемые из внешней задачи магнитостатики; $h(s, \theta)$ м – переменная толщина оболочки; (α, β, γ) – ортогональные криволинейные координаты срединной поверхности оболочки.

Рассмотрим гибкие изотропные оболочки вращения переменной толщины, координатная поверхность которых замкнута в окружном направлении поверхности вращения. За координатную поверхность выбираем срединную поверхность оболочки и отнесем ее в недеформированном состоянии к криволинейной ортогональной системе координат s, θ , где s – длина меридиана; θ – центральный угол в параллельном круге. Отсчитывая координату γ по нормали к срединной поверхности вращения, отнесем оболочку к ортогональной пространственной системе координат s, θ, γ .

Применяя вариационный принцип к уравнениям магнитоупругости (1), с использованием (2), учитывая гипотезы Кирхгофа – Лява и электродинамические гипотезы (3), уравнения и соотношения магнитоупругости гибких оболочек вращения переменной толщины принимают такой вид [6]:

уравнения магнитоупругости:

$$\frac{\partial(rN_s)}{\partial s} - \cos\varphi N_\theta + \frac{\partial S}{\partial\theta} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial\theta} + \frac{r}{R_s} Q_s + r(F_s + \rho F_s^\wedge) = r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 S) + \frac{\partial}{\partial s} (\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_s} H + \sin \varphi Q_\theta + r (F_\theta + \rho F_\theta^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial (r Q_s)}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - r \frac{N_s}{R_s} - \sin \varphi N_\theta + r (F_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial (r M_s)}{\partial s} - \cos \varphi M_\theta - r Q_s - r \left(N_s - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta \right) \mathcal{G}_s - r S \mathcal{G}_\theta &= 0; \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - r Q_\theta - r \left(N_\theta - \frac{1}{R_s} M_s \right) \mathcal{G}_\theta - r S \mathcal{G}_s &= 0; \quad (4) \\
-\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_s}{\partial \theta} \right); \\
\sigma \left[E_s - 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \theta} + \frac{H_\theta^+ - H_\theta^-}{h}; \\
\sigma \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] &= -\frac{\partial H_\gamma}{\partial s} + \frac{H_s^+ - H_s^-}{h};
\end{aligned}$$

выражения деформаций через перемещения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ss} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w + \frac{1}{2} \mathcal{G}_\theta^2; \\
\varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{r} \right) + \mathcal{G}_s \mathcal{G}_\theta; \quad \chi_{ss} = \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s}; \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \\
\chi_{s\theta} &= \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_\theta + \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right) + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial s},
\end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\mathcal{G}_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s}; \quad \mathcal{G}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} v;$$

соотношения упругости:

$$N_s = D_N [\varepsilon_{ss} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu) \varepsilon_T]; \quad N_\theta = D_N [\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{ss} - (1 + \nu) \varepsilon_T]; \quad S = D_N \frac{1 - \nu}{2} \varepsilon_{s\theta}; \quad (6)$$

$$H = D_M (1 - \nu) \chi_{s\theta}; \quad M_s = D_M [\chi_{ss} + \nu \chi_{\theta\theta} - (1 + \nu) \chi_T]; \quad M_\theta = D_M [\chi_{\theta\theta} + \nu \chi_{ss} - (1 + \nu) \chi_T],$$

где

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) d\gamma; \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) \gamma d\gamma; \quad D_N = \frac{Eh(s, \theta)}{1 - \nu^2}; \quad D_M = \frac{Eh^3(s, \theta)}{12(1 - \nu^2)}.$$

Составляющие силы Лоренца $\rho \vec{F}^\wedge$ в соответствии с выражением (2) представляются в виде:

$$\begin{aligned}
\rho F_s^{\wedge} &= -hJ_{scm}B_{\gamma} - \frac{h}{r\mu} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \theta} B_{\gamma} + \\
&+ \sigma h \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25(B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)(B_s^+ + B_s^-) + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)(B_s^+ - B_s^-) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25(B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 \right] \right\} - \frac{B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-}{\mu} B_{\gamma}; \\
\rho F_{\theta}^{\wedge} &= hJ_{\theta cm}B_{\gamma} + \sigma h E_{\theta} B_{\gamma} + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_{\gamma} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma}^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25(B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25(B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)(B_s^+ + B_s^-) + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)(B_s^+ - B_s^-) \right] \right\}; \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho F_{\gamma}^{\wedge} &= 0,5h \left[J_{\theta cm} (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) - J_{\theta cm} (B_s^+ + B_s^-) \right] + \frac{h}{2r\mu} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \theta} (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) - \\
&\quad - 0,5\sigma h E_{\theta} (B_s^+ + B_s^-) + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_{\gamma} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial w}{\partial t} \left[0,25(B_s^+ + B_s^-)^2 + \frac{1}{12}(B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12}(B_s^+ - B_s^-)^2 \right] \right\} + \frac{(B_{\theta}^+)^2 - (B_{\theta}^-)^2}{\mu}.
\end{aligned}$$

Отметим, что в случае использования канонических координат в теории оболочек вращения коэффициенты Ламе срединной поверхности $A = 1$, $B = r(s)$, а также $dr/ds = \cos \varphi$, где φ – угол между осью вращения и нормалью к оболочке; $r(s)$ – радиус параллельного круга; $h = h(s, \theta)$ – толщина оболочки.

В соотношениях (4) – (7) введены следующие обозначения: N_s, N_{θ} – нормальное и тангенциальное усилия; S – сдвигающее усилие; Q_s, Q_{θ} – поперечные усилия; M_s, M_{θ}, H – изгибные и крутящий моменты соответственно; u, v, w – компоненты вектора перемещения; E_s, E_{θ} – составляющие напряженности электрического поля; B_{γ} – нормальная составляющая магнитной индукции; $B_s^{\pm}, B_{\theta}^{\pm}$ – известные составляющие магнитной индукции на поверхностях оболочки; $\vartheta_s, \vartheta_{\theta}$ – углы поворота нормали; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; R_s – главный радиус кривизны; μ Гн/м – коэффициент магнитной проницаемости; α $1/^{\circ}\text{C}$ – коэффициент линейного температурного расширения; $T(s, \theta, \gamma, t)$ $^{\circ}\text{C}$ – температура тела. Остальные вышеперечисленные компоненты из уравнений (4) соответствуют размерностям теории оболочек.

К полученным уравнениям необходимо присоединить начальные и граничные условия.

2. Термодинамические соотношения определения джоулевого тепла гибких оболочек в микросекундном диапазоне.

Сформулируем уравнение динамической термомагнитоупругости с учетом джоулевой температуры, которая возникает в гибкой оболочке при действии на нее магнитного поля в микросекундном диапазоне (переходной процесс) [4, 6 – 8, 13].

При расчете температуры $T(s, \theta, \gamma, t)$ будем использовать уравнение баланса тепла в виде

$$C_v = \frac{\partial T}{\partial t} Q_{дж}, \quad (8)$$

где $Q_{дж} = \vec{J}\vec{J} / \sigma$ Вт/м² – джоулево тепло, выделяемое в результате циркуляции в оболочке вихревых токов; C_v Дж/(кг°C) – удельная теплоемкость.

Плотность магнитной энергии на единицу объема запишем в виде функции

$$W = 0,5(\vec{B}\vec{H}), \text{ Дж/м}^3, \quad (9)$$

а количество тепла, выделяемого током \vec{J} в единицу времени (мощность джоулевого тепла на единицу массы) определяется формулой

$$\dot{Q}_{дж} = \frac{\vec{J}\vec{E}}{\rho}.$$

Запишем магнитное давление P в виде суммы двух составляющих

$$P(\rho, T) = P_\chi(\rho) + P_T(\rho, T),$$

где $P_\chi(\rho)$ – составляющая давления, зависящая только от плотности ρ ; $P_T(\rho, T)$ – тепловая составляющая, зависящая от температуры и плотности. Также представим приращение внутренней энергии в виде энергии без учета температуры и тепловой составляющих, т.е.

$$\rho dU = \rho dU_\chi + \rho dU_T,$$

где

$$\rho dU_\chi = \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik} + 3P_\chi de; \quad \rho dU_T = 3P_T de + \rho dQ_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad} T) dr. \quad (10)$$

Здесь λ_T Вт/(м°C) – коэффициент теплопроводности.

Примем далее, что приращение тепловой энергии пропорционально приращению температуры, т.е.

$$dU_T = C_\varepsilon(T) dT; \quad U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT,$$

где C_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации. Тогда выражение (10) можем использовать для вычисления температуры

$$\rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \dot{Q}_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad} T). \quad (11)$$

Учитывая, что удельная теплоемкость металлов для температур выше T_0 вплоть до точки плавления изменяется незначительно (не более чем на 5 – 10 % от среднего значения), тепловую энергию можно представить в виде

$$U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT \approx C_\varepsilon^{\text{cp}} (T - T_0) + U_{T_0}; \quad U_{T_0} = \int_0^{T_0} C_\varepsilon(T) dT,$$

где $C_\varepsilon^{\text{cp}}$ – среднее значение теплоемкости на интервале $[T_0, T]$.

Следуя [7], уравнение (11) преобразуется в известное уравнение теплопроводности с источником джоулева тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_\varepsilon^{\text{cp}}} \dot{Q}_{\text{дж}} + \alpha_T \Delta T; \quad \alpha_T = \frac{\lambda_T}{\rho C_\varepsilon^{\text{cp}}}, \quad \lambda_T = \text{const}, \quad (12)$$

где α_T м²/с – коэффициент тепловой диффузии.

Используя выражение для расчета джоулева тепла, оценим величину температуры, возникающую в результате джоулева нагрева в зависимости от величины магнитной индукции \vec{B} . Используя (9) и уравнение Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E}$, из соображений теории размерности и на основании (12) имеем

$$\tilde{T} \approx \tilde{T}_0 + \frac{2}{\rho C_\varepsilon^{\text{cp}}} \tilde{W} + \frac{\alpha_T}{\alpha_D} \tilde{T}; \quad \tilde{W} = 0,5 \tilde{B}^2 / \mu, \quad (13)$$

где $\alpha_D = 1 / \sigma \mu$ м²/с – коэффициент магнитной диффузии. В качестве характерного времени принято время диффузии магнитного поля на расстояние \tilde{L} , т.е. $\tilde{t} = \tilde{L} / \alpha_D$. Так как $\alpha_T / \alpha_D \ll 1$ для металлов (например для алюминия при $T_0 = 20^\circ\text{C}$ – $\alpha_T / \alpha_D \approx 3,0 \cdot 10^{-6}$, для нержавеющей стали – $\alpha_T / \alpha_D \approx 0,8 \cdot 10^{-5}$), то из символического уравнения (13) следует, что процессом теплопроводности в переходном режиме можно пренебречь.

Таким образом, учитывая оценку членов уравнения (12), получаем приближенное уравнение для определения температуры, возникающей в результате джоулева нагрева в микросекундном диапазоне в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_\varepsilon^{\text{cp}}} Q_{\text{дж}}. \quad (14)$$

Исходя из уравнения (14), имеем

$$\frac{h}{2} Q_{\text{дж}} dt = \frac{h}{2} \rho C_\varepsilon^{\text{cp}} dT_{\text{п}} + \lambda_F (T_{\text{п}} - T_C) dt, \quad (15)$$

где $T_{\text{п}}$ – температура на поверхности оболочки; T_C – температура срединной поверхности оболочки; λ_F Вт/(м²°C) – коэффициент теплоотдачи.

Выражение температуры при изменении вдоль γ принимает вид

$$T = T_{\text{п}} + \frac{Q_{\text{дж}} h^2}{8 \lambda_T} \left[1 - 4 \left(\frac{\gamma}{h} \right)^2 \right].$$

Исходя из симметрии задачи для оболочек вращения, на срединной поверхности тепловой поток $q = 0$ при $\gamma = 0$, а на поверхности – $q = Q_{\text{дж}} h / 2$ и $T = T_{\text{п}}$.

С учетом (15) выражение для определения температуры принимает вид

$$T = T_C + \frac{Q_{\text{дж}} h^2}{8 \lambda_T} \left[1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} - 4 \left(\frac{\gamma}{h} \right)^2 \right] - \frac{\rho h C_\varepsilon^{\text{cp}}}{2 \lambda_F} \dot{T}_{\text{п}}.$$

Компоненты электрического тока с учетом стороннего тока имеют вид

$$J_s = J_{сст} + \sigma \left[E_s + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma \right];$$

$$J_\theta = J_{\theta сст} + \sigma \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right]; J_\gamma = 0.$$

3. Разрешающая система уравнений магнитоупругости гибкой конической оболочки переменной жесткости с учетом джоулевой температуры.

Рассмотрим осесимметричную нелинейную краевую задачу магнитоупругости об определении НДС гибкой конической оболочки переменной толщины с учетом джоулева тепла [1, 9, 12]. Оболочка упругая изотропная, изготовленная из алюминия (рис. 1). Полагаем, что на поверхности $\gamma = \pm h/2$ оболочки осуществляется теплообмен по закону Ньютона – Рихмана (с коэффициентом теплообмена λ_F) с внешней средой, имеющей температуру ноль градусов. Также оболочка является проводником стороннего тока плотности \vec{J}_{cm} .

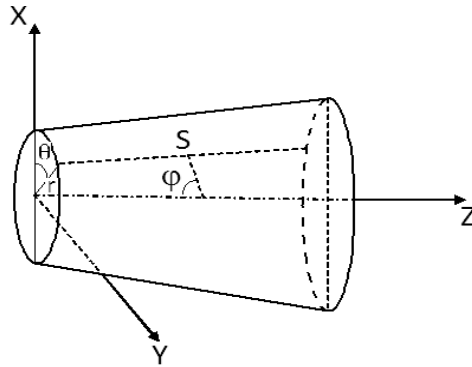


Рис. 1

Пусть задача магнитостатики для возмущенного состояния решена, т.е. известны векторы магнитной индукции начального состояния для внешней и внутренней областей. За координатную плоскость выбираем срединную поверхность оболочки, отнесенную к системе координат s, θ , координата γ отсчитывается по нормали к срединной поверхности.

Принимаем, что все компоненты возбужденного электромагнитного поля и поля перемещений не зависят от координаты θ , положим [6]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; v = 0; E_s = 0; B_\theta = 0; F_\theta = 0; \rho F_\theta^\wedge = 0.$$

При построении разрешающей системы терромагнитоупругости усеченной гибкой конической оболочки переменной толщины, в качестве искомых функций выбраны следующие [4, 5]:

$$u, w, \varrho_s, N_s, M_s, Q_s, B_\gamma, E_\theta.$$

Разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений магнитоупругости осесимметричной изотропной конической оболочки переменной жесткости с учетом джоулевой температуры принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1-\nu^2}{Eh} N_s - \frac{\nu \cos \varphi}{r} u - \frac{\nu \sin \varphi}{r} w - \frac{1}{2} \varrho_s^2 + (1+\nu) \varepsilon_T;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= -g_s; \quad \frac{\partial g_s}{\partial s} = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_s - \frac{\nu \cos \varphi}{r} g_s; \\
\frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu-1) N_s + Eh \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - F_s + h J_{\theta CT} B_\gamma - \\
&- \sigma h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \frac{Eh \cos \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (16) \\
\frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \frac{\nu \sin \varphi}{r} N_s + Eh \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - F_\gamma - \\
&- 0,5 h J_{\theta CT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma h \left[-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \right. \\
&- \left. \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \frac{h}{12} \frac{\partial g_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) \right] + \frac{Eh \sin \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu-1) M_s + \frac{Eh^3 \cos \varphi}{12 r} g_s \right] + Q_s + N_s g_s - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\nu M_s + \frac{Eh^3 \cos \varphi}{12 r} g_s \right] g_s; \\
\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\mu \sigma \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}; \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\varepsilon_T &= \alpha T_C + \frac{\alpha h^2}{8\sigma\lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma^2 \left[E_\theta^2 + 0,06 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_s^+ + B_s^-)^2 + E_\theta \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] \right\} + \\
&+ \frac{\alpha h^2}{8\sigma\lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ 2\sigma J_{\theta cm} \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \dot{T}_\Pi; \quad \chi_T = 0.
\end{aligned}$$

Разрешающая система уравнений (16) является нелинейной смешанной гиперболо-параболической системой восьмого порядка с переменными коэффициентами.

4. Методика решения задач термомагнитоупругих гибких оболочек вращения переменной толщины с учетом джоулевой температуры.

Методика решения задач термомагнитоупругости изотропных оболочек вращения переменной жесткости заключается в последовательном использовании схемы Ньюмарка, метода квазилинеаризации и метода дискретной ортогонализации [2, 5, 15].

Для разделения переменных по временной координате применяем неявную конечноразностную схему Ньюмарка [15] интегрирования уравнений термомагнитоупругости.

Следующий этап решения нелинейной краевой задачи термомагнитоупругости основан на применении метода квазилинеаризации [2], с помощью которого нелинейная краевая задача сводится к последовательности линейных краевых задач на каждом временном шаге. Далее каждая из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решается численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации [5].

Числовой пример.

Рассмотрим случай, когда гибкая усеченная коническая оболочка переменной жесткости, изготовленная из алюминия, находится под воздействием нормальной составляющей механической силы $F_y = 500 \sin \omega t$ Н/м² и внешнего электрического тока $J_{\theta cm} = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t$ А/м². Толщина оболочки принимается: 1) постоянной $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м; 2) переменной $h = 5 \cdot 10^{-4} (1 - 0,5s^2 / b)$; 3) переменной $h = 5 \cdot 10^{-4} (1 + 0,5s^2 / b)$ м, где $b = 0,4$ м.

Граничные условия выбраны в таком виде:

$$u = 0; M_s = 0; Q_s = -200; B_y = 0,5 \sin \omega t \text{ при } s = 0;$$

$$u = 0; w = 0; M_s = 0; B_y = 0 \text{ при } s = 0,4.$$

Параметры оболочки и материала выбраны следующие:

$$s_0 = 0 \text{ м}; s_1 = 0,4 \text{ м}; E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; \varphi = \pi / 10;$$

$$\nu = 0,3; \rho = 2670 \text{ кг/м}^3; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \sigma = 3,13 \cdot 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}; B_s^{\pm} = 0,5 \text{ Т};$$

$$C_{\varepsilon}^{\text{сп}} = 820 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{}^{\circ}\text{C)}; \lambda_T = 228 \text{ Вт/(м}^{\circ}\text{C)}; \lambda_F = 225 \text{ Вт/(м}^2 \text{ }^{\circ}\text{C)}; \alpha = 2,36 \cdot 10^{-5} 1/^{\circ}\text{C}.$$

Решение задачи получено на интервале $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с, временной шаг интегрирования $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с.

На рис. 2 представлено безразмерное распределение прогиба w/h_0 при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с. Линия 1 отвечает толщине оболочки 3; линия 2 – толщине 1; линия 3 – толщине 2.

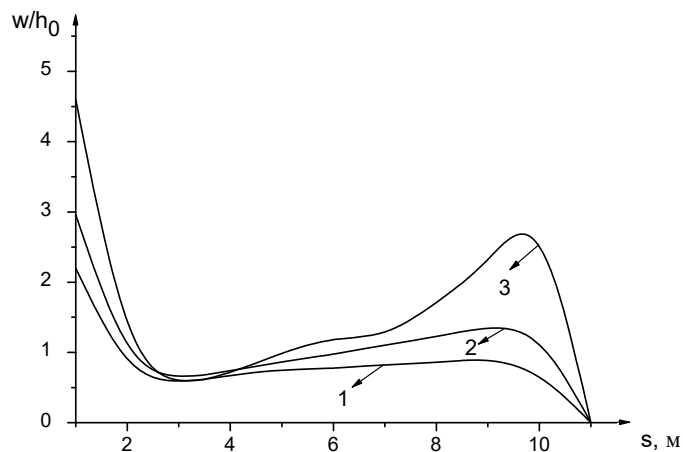


Рис. 2

Максимальная нелинейность прогиба достигается на торце оболочки $s = 0$ и равняется $w/h_0 = 4,60$ (линия 3) при толщине 2. Также прогиб оболочки является нелинейным с пятой по десятую точки графика. При постоянной толщине $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м максимальная нелинейность равняется 2,96 (линия 2). Кроме того, прогиб оболочки является нелинейным с седьмой по десятую точки. При изменении толщины за законом 3 – нелинейность наблюдается только в первой точке и равняется 2,20 (линия 1).

Исходя из полученных результатов (рис. 2), можно судить о влиянии толщины на НДС оболочки.

На рис. 3 представлено распределение компоненты силы Лоренца ρF_s^{\wedge} Н/м² при $s = 0$. Здесь линия 1 отвечает толщине 2; линия 2 – толщине 1; линия 3 – толщине 3. Максимальные значения силы Лоренца по абсолютной величине достигаются при $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с. Наибольшее значение силы наблюдаем в более толстой конической оболочке (линия 3)

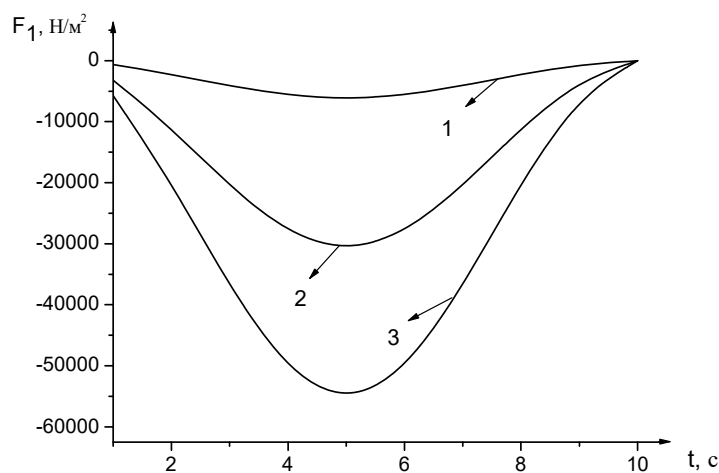


Рис. 3

Рис. 4 иллюстрирует распределение нормальной составляющей силы Лоренца при $s = 0$. Линии 1, 2, 3 соответствуют толщинам на рис. 3. Значения нормальной составляющей силы Лоренца является положительным по сравнению с компонентой силы Лоренца ρF_s^{\wedge} Н/м², которая принимает отрицательное значение.

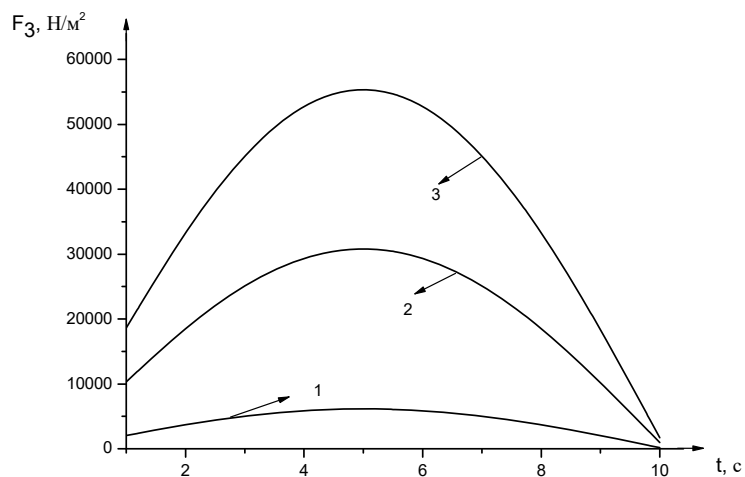


Рис. 4

На рис. 5 представлены графики джоулевой температуры $T(t)$ °С при $s = 0$ для толщин, приведенных выше. Линия 1 отвечает толщине 3; линия 2 – толщине 1; линия 3 – толщине 2. Как видно из графиков, максимальное значения температуры конической

оболочки достигает $14,56^{\circ}\text{C}$ – (линия 1); $89,25^{\circ}\text{C}$ – (линия 2); $133,3^{\circ}\text{C}$ – (линия 3). Это говорит о том, что с уменьшением толщины, температура оболочки возрастает.

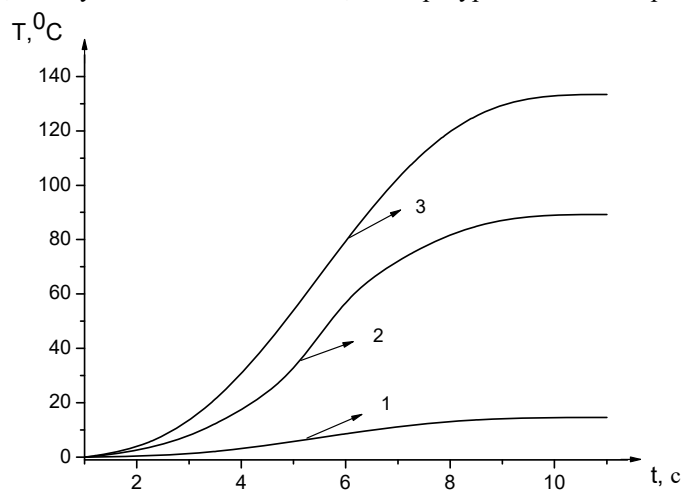


Рис. 5

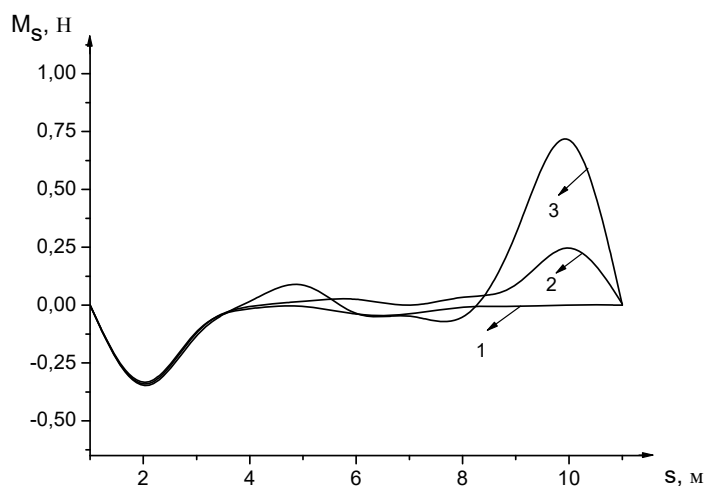


Рис. 6

На рис. 6 приведено изменение величины изгибающего момента $M_s(s)$ Нм/м при $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ для соответствующих толщин (рис. 4). В окрестности торцов конической оболочки происходит существенное изменение значений моментов, что подтверждается теорией тонких оболочек.

Заключение.

На основании полученных нелинейных уравнений термомагнитоупругости оболочек вращения с использованием предложенной методики исследовано термонапряженное состояние гибких оболочек вращения переменной жесткости с учетом джоулевого тепла. Предложенная методика позволяет рассматривать различные варианты физико-механических параметров оболочек вращения переменной жесткости в геометрически-нелинейной постановке.

В качестве иллюстрации предложенного подхода проведено исследование НДС осесимметричной усеченной гибкой конической оболочки переменной жесткости с

учетом джоулевого тепла. Результаты иллюстрируются графиками. Дан анализ полученных результатов.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто теорію та побудову нелінійних рівнянь термомагнітопружності гнучких оболонок обертання змінної жорсткості з урахуванням джоулевого тепла в нестационарному магнітному полі. Наведено методику розрахунку гнучких оболонок обертання змінної товщини в магнітному полі. Проведено аналіз термомагнітопружності зрізаної гнучкої конічної оболонки в осесиметричній постановці з урахуванням джоулевого нагріву.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
3. Будак В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Численно-аналитическое решение краевых задач магнитоупругости. – Николаев: Илион, 2016. – 148 с.
4. Будак В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Нелинейные магнитоупругие оболочки. – Николаев: Илион, 2016. – 136 с.
5. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1963. – 16, вып. 5(99). – С. 171 – 174.
6. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403 с. (укр).
7. Дресвянников В.И. О нестационарных задачах механики упруго-пластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – Вып. 19. – С. 32 – 47.
8. Тамм И.Е. Теория электромагнетизма. – М.: Наука, 1976. – 613 с.
9. Bian Y.H. Analysis of Nonlinear Stresses and Strains in a Thin Current-Carrying Elastic Plate // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 108 – 130.
10. Elhajjar R., Saponara V., Muliana A. Smart composites. Mechanics and Design. – New York: CRC Press, 2013. – 430 p.
11. Hutter K., Van de Ven A.F., Ursescu A. Electromagnetic Field Matter Interactions in Thermoelastic Solids and Viscous Fluids. – New York: Springer. – 2007. – 403 p.
12. Mol'chenko L.V., Loos I.I. Influence of Conicity on the Stress – Strain State of Flexible Orthotropic Conical Shell in Nonstationary Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 11. – P. 1261 – 1267.
13. Mol'chenko L.V., Fedorchenko L.N., Vasilieva L.Yu. Nonlinear Theory of Magnetoelasticity of Shells of Revolution with Joule Heat Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54. – N 3. – P. 306 – 314.
14. Moon F.C. Magneto-Solid Mechanics. – New York: John Wiley & Sons Inc., 1984. – 448 p.
15. Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – 85, N 7. – P. 67 – 97.

Поступила 21.11.2018

Утверждена в печать 05.11.2019