

С. Б. Ковальчук<sup>1</sup>, А. В. Горик<sup>2</sup>, А. П. Зиньковский<sup>3</sup>

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕРМОУПРУГОМ  
ДЕФОРМИРОВАНИИ НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ  
СЛОИСТОГО ДИСКА

<sup>1</sup>Полтавская государственная аграрная академия,  
ул. Сквороды, 1/3, 36003, Полтава, Украина; e-mail: stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua

<sup>2</sup>Полтавская государственная аграрная академия,  
ул. Сквороды, 1/3, 36003, Полтава, Украина; e-mail: oleksii.goruk@pdaa.edu.ua

<sup>3</sup>Институт проблем прочности им. Г.С.Писаренко НАНУ,  
ул. Тимирязевская, 2, 01014, Киев, Украина; e-mail: zinkovskii@ipp.kiev.ua

**Abstract.** An exact analytical solution is presented for the problem on determining the characteristics of the strain-stress state of a multilayer narrow disk with a radial alternation of layers. This disk is rotated with acceleration in an axisymmetric temperature field under the action of normal and tangential loads uniformly distributed on its cylindrical surfaces. The relations are obtained by solving the system of equations of the plane problem of theory of elasticity in the polar coordinate system with taking into account a discrete-inhomogeneous structure of the disk. The solution obtained gives the distribution of stresses and displacements over all the package of disk layers and can be used to solve a wide range of applied problems and methods of optimal design.

**Key words:** composite disc, concentric layers, rotation, acceleration, temperature field, stress, deformation, displacement.

**Введение и постановка задачи.**

В механизмах энергетических машин достаточно широко распространены детали в виде круговых дисков, которые вращаются с большой угловой скоростью и ускорением в неравномерном температурном поле. Они могут выполнять вспомогательную функцию, например, маховики, или быть несущими элементами – колеса механических передач, диски рабочих органов измельчителей, рабочих колес осевых турбомашин и т.п. Диски компрессоров и турбин являются одними из важнейших деталей авиационных газотурбинных двигателей, совершенство конструкции которых в значительной степени определяет их надежность и технико-экономические характеристики, такие как прочность и минимальная масса.

Улучшение весовых характеристик дисков газотурбинных двигателей возможно, в частности, путем использования для их изготовления композитных материалов [2, 4, 7], а также путем чередования слоев различных материалов в радиальном направлении. Проектирование таких дисков с оптимальными параметрами требует наличия достоверных моделей их напряженно-деформированного состояния (НДС). Конечно-элементное моделирование является достаточно универсальным и незаменимым на этапе проверочных расчетов композитных дисков. В то же время на этапе предварительных расчетов полезны аналитические модели, которые позволяют анализировать зависимости компонент НДС от различных характеристик материалов и параметров внешних воздействий. Однако уровень их развития применительно к дискретно-неоднородным многослойным дискам в условиях действия внешних нагрузок различной природы является недостаточным.

В большинстве научных работ, посвященных теоретическому исследованию НДС вращающихся изотропных и цилиндрически ортотропных дисков, их материал рассматривается как идеально-упругий. Отдельное направление составляют исследования, посвященные учету влияния пластичности и ползучести на НДС диска. В то же время волокнистые композитные материалы при растяжении – сжатии вдоль волокон проявляют линейную зависимость между напряжениями и деформациями практически до момента разрушения [1], что позволяет использовать аналитические решения, полученные на основании соотношений теории упругости.

В [8] рассмотрено решение для вращающихся изотропных тонких дисков постоянной и переменной толщины с отверстием или без него, которое получено с использованием допущения плоского напряженного состояния. Такое допущение объясняется не только значительным упрощением исходных уравнений, но и малым расхождением результатов по сравнению с известными пространственными решениями [13, 21, 27]. Позднее на основе указанного решения плоской задачи получены замкнутые решения для изотропных дисков с непрерывно-переменными физико-механическими характеристиками материала.

Решение для случая, когда модуль упругости материала в радиальном направлении изменяется по степенному закону, получено в [18], которое в [14] расширено на случай экспоненциального закона его изменения, а в [28] дополнено учетом изменения по степенному закону плотности и коэффициента теплового расширения. Изотропный однородный диск с различными формами радиального сечения с непрерывно-переменной плотностью, которая изменяется в радиальном направлении согласно полиномиальному закону, исследован в [26].

Подход на основе плоской задачи использован и при расчете дисков турбомашин с учетом переменной толщины и неравномерного температурного поля [2, 3, 7]. В этом случае диск разбивается на некоторое количество кольцевых участков постоянной толщины и постоянным модулем упругости, определяемым с учетом действующей температуры. По сути, такой подход приводит задачу исследования НДС однородного диска переменной толщины с непрерывно-переменным в радиальном направлении модулем упругости к таковой для дискретно-неоднородного диска с кусочно-постоянным распределением модуля упругости. Однако такое решение не может быть использовано в случае дискретно-неоднородных дисков, изготовленных из композитных материалов, которые являются анизотропными по физико-механическим свойствам.

Впервые задача определения напряженного состояния вращающегося тонкого диска постоянной толщины с цилиндрической ортотропией упругих свойств поставлена и решена в [5]. Значительно позже в [22, 25] получены решения для такого диска переменной толщины, а в [12, 24] – также с учетом переменной по степенному закону плотности материала. Решение для ортотропного диска переменной толщины с непрерывно-переменными (по трехпараметрическому экспоненциально-степенному закону) в радиальном направлении модулями упругости и плотностью материала, но с постоянными коэффициентами Пуассона, получено в [15]. При этом в [23] показано, что при изменении толщины по степенному закону задача сводится к рассмотрению диска постоянной толщины, но с переменными упругими характеристиками и плотностью.

Теоретические подходы к изучению влияния неоднородности физико-механических свойств в условиях действия различных термомеханических нагрузок на НДС рассматриваемых дисков рассмотрены в [11, 17].

В [9, 20] показано, что задача определения НДС слоистого диска с чередованием слоев по толщине может быть сведена к рассмотрению однородного ортотропного диска постоянной толщины с усредненными характеристиками.

Следует отметить, что представленные выше результаты исследований получены для случая непрерывной неоднородности материала диска с гладким изменением физико-механических свойств. Лишь в [29], исходя из дискретно-структурного подхода, получено аналитическое решение для трехслойного диска постоянной толщины с радиальным чередованием слоев в предположении, что внутренний и внешний слои диска выполнены из изотропного однородного материала, а средний – изотропный с

непрерывно-переменными по экспоненциальному закону модулем упругости и плотностью. При этом было принято, что коэффициенты Пуассона для всех слоев являются одинаковыми.

Учитывая результаты проведенного анализа известных исследований, цель данной работы состоит в получении аналитического решения задачи определения компонент НДС вращающегося с ускорением диска постоянной толщины, выполненного из композита с радиальным чередованием цилиндрически ортотропных или изотропных слоев при действии неравномерного осесимметричного температурного поля и статических нагрузок на цилиндрических поверхностях.

### §1. Объект исследования.

Рассмотрим многослойный плоский диск (рис. 1) постоянной толщины  $b$ , который состоит из  $m$  концентрических цилиндрических слоев  $P_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) с внутренними радиусами  $r_{bd,k-1}$  и внешними –  $r_{bd,k}$  (рис. 1, б). На поверхностях контакта слоёв диска жестко соединены между собой. Суммарная высота слоев  $h = r_{bd,m} - r_{bd,0}$  значительно превышает толщину диска  $b$ .

Диск имеет центральное круговое отверстие радиуса  $r_1 = r_{bd,0}$ , которое в частном случае может быть заполнено однородным материалом, образующим сердечник  $P_0$ , жестко соединенный с граничащим слоем  $P_1$  (рис. 1, в). Такие два случая конструкции диска являются основными, поскольку по отдельности либо в виде комбинации они охватывают большинство вариантов крепления диска.

Диск отнесен к круговой цилиндрической системе координат  $r\theta z$ , в которой начало  $O$  совпадает с центром диска, а ось  $Oz$  – с его осью. В принятой системе координат произвольная точка  $K$  будет иметь координаты  $(r, \theta, z)$  (рис. 1, а).

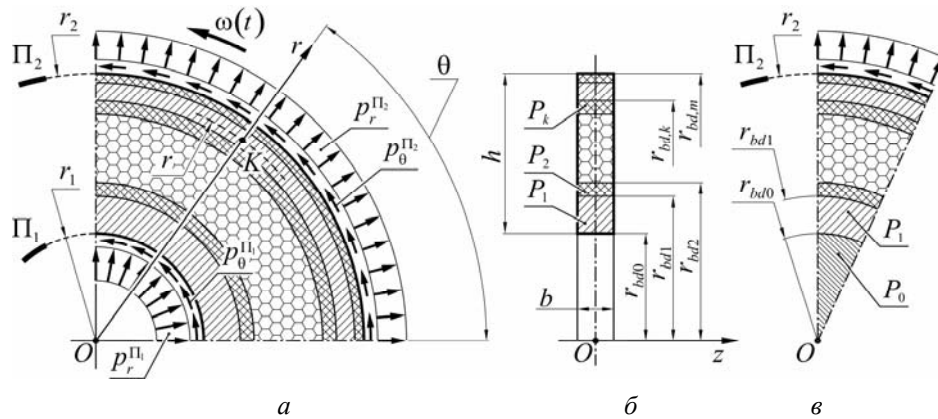


Рис. 1

Боковые грани диска свободны от нагрузок. На внешней цилиндрической поверхности  $\Pi_2$  диска действуют равномерно распределенные нормальная  $p_r^{\Pi_2}$  и касательная  $p_\theta^{\Pi_2}$  нагрузки (рис. 1, а). На практике к нагрузке  $p_r^{\Pi_2}$  приводят центробежные силы, действующие на равномерно распределенные по периферии диска массы, а к нагрузке  $p_\theta^{\Pi_2}$  – силы сопротивления их перемещению в некоторой среде (или, наоборот, движущие силы) и окружные силы инерции, возникающие при ускорении или замедлении диска.

На поверхности отверстия  $\Pi_1$  действуют равномерные нагрузки  $p_r^{\Pi_1}$  и  $p_\theta^{\Pi_1}$ , которые можно рассматривать как реакции крепления диска на валу. Эти нагрузки на практике зачастую неизвестны и требуют отдельного определения при рассмотрении

совместного деформирования диска и вала. Рассматриваемая задача является только частью этой сложной задачи, поэтому в данной статье будем считать нагрузки  $p_r^{Pi}$  и  $p_\theta^{Pi}$  заданными, опуская методы их определения.

Предполагаем, что слои диска выполнены из однородных или непрерывно-неоднородных материалов с цилиндрической ортотропией упругих характеристик [6]. В любой точке диска одна из плоскостей упругой симметрии совпадает с его поперечным сечением, а вторая – перпендикулярна оси  $Oz$ . Физико-механические характеристики произвольного  $k$ -го слоя диска составляют совокупность величин

$$\|S_a^{[k]}\| = \|E_r^{[k]}, E_\theta^{[k]}, G_{r\theta}^{[k]}, \nu_{r\theta}^{[k]}, \nu_{\theta r}^{[k]}, \rho^{[k]}, g_r^{[k]}, g_\theta^{[k]}\|, \quad (1.1)$$

где  $E_r^{[k]}, E_\theta^{[k]}$  – модули упругости в радиальном и окружном направлениях;  $G_{r\theta}^{[k]}$  – модуль сдвига в плоскости упругой симметрии;  $\nu_{r\theta}^{[k]}, \nu_{\theta r}^{[k]}$  – коэффициенты Пуассона;  $\rho^{[k]}$  – плотность материала;  $g_r^{[k]}, g_\theta^{[k]}$  – коэффициенты теплового расширения.

С учетом замечаний Фойгта [6], однородный сердечник  $P_0$  сплошного диска может быть только изотропным или трансверсально-изотропным, если плоскость изотропии совпадает с плоскостью диска, поскольку все направления на оси анизотропии являются равноправными. В то же время эта особенность не накладывает ограничений на радиус сердечника  $P_0$ , который можно принять сколь угодно малым.

В рассматриваемой цилиндрической системе координат  $r\theta z$  физико-механические характеристики материала диска в целом будут кусочно-постоянными функциями  $\mu_a^S = \mu_a^S(r)$ , которые по аналогии с многослойным брусом [16] можно представить с помощью функций Хэвисайда  $H(r)$ :

$$\mu_a^S = \sum_{k=1}^m \left\{ S_a^{[k]} \left[ H(r - r_{bd,k-1}) - H(r - r_{bd,k}) \right] \right\}, \quad (1.2)$$

где  $r_{bd0} = r_1, r_{bd,m} = r_2$  – радиусы кривизны внутренней ( $\Pi_1$ ) и внешней ( $\Pi_2$ ) цилиндрических поверхностей диска (рис. 1, а).

Диск вращается относительно оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega = \omega(t)$ , которая является гладкой функцией времени  $t$ , и пребывает в осесимметричном температурном поле. Разность температуры в точках диска до и после приложения тепловой нагрузки меняется по известному закону  $\Delta T = \Delta T(r)$  в радиальном направлении. При этом в пределах слоя пренебрегаем влиянием ее градиента на физико-механические характеристики материала. Это условие всегда можно выполнить путем введения дополнительных слоев с уточненными характеристиками материала.

Рассмотрим решение поставленной задачи в предположении упругой работы ортотропных материалов слоев.

## §2. Общее решение задачи.

Учитывая условие  $h \gg b$ , пренебрегаем изменением компонент НДС по толщине  $b$  поперечного сечения диска, что позволяет использовать для их определения систему уравнений плоской задачи линейной теории упругости в полярной системе координат  $rO\theta$ :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \Sigma_r^V = 0; \quad \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Sigma_\theta^V = 0; \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{\mu_r^E} - \frac{\mu_{\theta r}^V \sigma_\theta}{\mu_\theta^E} + \mu_r^g \Delta T; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\mu_\theta^E} - \frac{\mu_{r\theta}^V \sigma_r}{\mu_r^E} + \mu_\theta^g \Delta T; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{\mu_{r\theta}^G} \tau_{r\theta}; \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}. \quad (2.3)$$

Решения уравнений (2.1) – (2.3) для диска с отверстием (рис. 1, *a*) и сплошного диска (рис. 1, *б*) будут отличаться только на этапе учета граничных условий. Поэтому построим общий ход решения задачи для этих двух случаев, разделяя только частные решения для компонент НДС.

В соответствии с принятой системой внешних нагрузок (рис. 1, *a, б*), на внешней цилиндрической поверхности  $\Pi_2$  диска должны выполняться статические граничные условия:

$$\sigma_r |_{r=r_2} = p_r^{\Pi_2}; \quad \tau_{r\theta} |_{r=r_2} = p_\theta^{\Pi_2}. \quad (2.4)$$

Компоненты  $\Sigma_r^V$  и  $\Sigma_\theta^V$  объемных сил будут равны составляющим сил инерции, которые связаны с угловой скоростью  $\omega$  известными соотношениями

$$\Sigma_r^V = \mu^\rho \omega^2 r; \quad \Sigma_\theta^V = -\mu^\rho \frac{d\omega}{dt} r. \quad (2.5)$$

С учетом принятых условий можно сделать предположение об осесимметричном распределении компонент НДС, чему соответствует их функциональная зависимость только от координаты  $r$ :

$$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{\theta r}, u_\theta, u_r = f(r). \quad (2.6)$$

Решая систему уравнений равновесия (2.1) относительно напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{\theta r}$  с учетом (2.4) – (2.6), получаем

$$\sigma_\theta = \frac{d(r\sigma_r)}{dr} + \mu^\rho \omega^2 r^2; \quad \tau_{\theta r} = \frac{1}{r^2} \left[ r_2^2 p_\theta^{\Pi_2} - \frac{d\omega}{dt} \int_r^{r_2} (r^3 \mu^\rho) dr \right]. \quad (2.7)$$

Для диска с центральным отверстием (рис. 1, *a*):  $p_\theta^{\Pi_1} = -\tau_{r\theta} |_{r=r_1}$ . Тогда, используя решение для касательных напряжений в (2.7), получаем

$$p_\theta^{\Pi_1} = -\tau_{r\theta} |_{r=r_1} = -\frac{1}{r_1^2} \left[ r_2^2 p_\theta^{\Pi_2} - \frac{d\omega}{dt} \int_{r_1}^{r_2} (r^3 \mu^\rho) dr \right].$$

Это соотношение выражает условие равновесия между касательными нагрузками  $p_\theta^{\Pi_1}$ ,  $p_\theta^{\Pi_2}$  и силами инерции при вращении диска с ускорением (замедлением), которое в случае равномерного вращения диска преобразуется к ожидаемому виду равенства их моментов

$$r_1^2 p_\theta^{\Pi_1} = -r_2^2 p_\theta^{\Pi_2}.$$

Для диска со сплошным сердечником (рис. 1, *б*) второе соотношение (2.7) в центральной точке приводит к неопределенности. Этого можно избежать, изменив пределы при интегрировании второго уравнения (2.1)

$$\tau_{\theta r} = \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{r^2} \int_0^r (r^3 \mu^\rho) dr. \quad (2.8)$$

Подставив (2.8) во второе условие (2.4), получаем

$$p_\theta^{\Pi_2} = \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{r_2^2} \int_0^{r_2} (r^3 \mu^\rho) dr.$$

Это соотношение выражает условие равновесия между касательной нагрузкой  $p_{\theta}^{\Pi_2}$  на внешней поверхности сплошного диска и силами инерции.

Подставляя выражения (2.7) в соответствующие соотношения закона Гука (2.2), получаем деформации в диске с отверстием

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= -\frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_{\theta}^E} \left[ \frac{d(r\sigma_r)}{dr} + \mu^{\rho} \omega^2 r^2 \right] + \frac{\sigma_r}{\mu_r^E} + \mu_r^{\theta} \Delta T ; \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{\mu_{\theta}^E} \left[ \frac{d(r\sigma_r)}{dr} + \mu^{\rho} \omega^2 r^2 \right] - \frac{\mu_{r\theta}^v \sigma_r}{\mu_r^E} + \mu_{\theta}^{\theta} \Delta T ;\end{aligned}\quad (2.9)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{\mu_{r\theta}^G r^2} \left[ r_2^2 p_{\theta}^{\Pi_2} - \frac{d\omega}{dt} \int_r^{r_2} (r^3 \mu^{\rho}) dr \right].$$

Для сплошного диска соотношения для линейных деформаций будут аналогичны (2.9), а угловые деформации, с учетом (2.8), примут такой вид:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\mu_{r\theta}^G r^2} \int_0^r (r^3 \mu^{\rho}) dr. \quad (2.10)$$

Геометрические зависимости Коши (2.3) с учетом (2.6) преобразуются в уравнения для определения перемещений  $u_r$ ,  $u_{\theta}$  и неизвестного напряжения  $\sigma_r$ :

$$\frac{du_r}{dr} = \varepsilon_r; \quad u_r = r\varepsilon_{\theta}; \quad \frac{du_{\theta}}{dr} - \frac{u_{\theta}}{r} = \gamma_{r\theta}. \quad (2.11)$$

Подставляя во второе соотношение (2.11) окружные деформации из (2.9), получим зависимость между радиальными перемещениями и радиальными нормальными напряжениями

$$u_r = r \left[ \frac{1}{\mu_{\theta}^E} \left( \frac{d(r\sigma_r)}{dr} + \mu^{\rho} \omega^2 r^2 \right) - \frac{\mu_{r\theta}^v \sigma_r}{\mu_r^E} + \mu_{\theta}^{\theta} \Delta T \right]. \quad (2.12)$$

Решив третье дифференциальное соотношение (2.11) с учетом (2.9), получим распределение окружных перемещений в диске с центральным отверстием

$$u_{\theta} = r \left\{ r_2^2 p_{\theta}^{\Pi_2} \int_{r_1}^r \frac{1}{\mu_{r\theta}^G r^3} dr - \frac{d\omega}{dt} \int_{r_1}^r \left[ \frac{1}{\mu_{r\theta}^G r^3} \int_r^{r_2} (r^3 \mu^{\rho}) dr \right] dr \right\} + \frac{u_{\theta}|_{r=r_1}}{r_1} r.$$

В случае жесткого соединения диска с валом окружные перемещения точек цилиндрической поверхности отверстия ( $\Pi_1$ ) равны нулю:  $u_{\theta}|_{r=r_1} = 0$ , т.е. отсутствует проскальзывание диска относительно вала, на котором он закреплен, и решение примет следующий вид:

$$u_{\theta} = r \left\{ r_2^2 p_{\theta}^{\Pi_2} \int_{r_1}^r \frac{1}{\mu_{r\theta}^G r^3} dr - \frac{d\omega}{dt} \int_{r_1}^r \left[ \frac{1}{\mu_{r\theta}^G r^3} \int_r^{r_2} (r^3 \mu^{\rho}) dr \right] dr \right\}. \quad (2.13)$$

Аналогично, с использованием (2.10), для сплошного диска получено

$$u_{\theta} = \frac{d\omega}{dt} r \int_0^r \left[ \frac{1}{\mu_{r\theta}^G r^3} \int_0^r (r^3 \mu^{\rho}) dr \right] dr,$$

где учтено отсутствие относительного поворота центра диска  $(u_{\theta}/r)|_{r=0} = 0$ .

Подставляя второе соотношение (2.11) в первое, получаем дифференциальную зависимость между радиальными и окружными линейными деформациями

$$\frac{d(r\varepsilon_\theta)}{dr} = \varepsilon_r,$$

которая, учитывая (2.9), преобразуется в определяющее уравнение для нормальных радиальных напряжений  $\sigma_r$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\theta^E} r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \left[ \frac{3}{\mu_\theta^E} + \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\mu_\theta^E} \right) r \right] r \frac{d\sigma_r}{dr} + \left[ \frac{1}{\mu_\theta^E} - \frac{1}{\mu_r^E} + \frac{d}{dr} \left( \frac{1 - \mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \right) r \right] \sigma_r = \\ = - \left[ \frac{(3 + \mu_{\theta r}^v) \mu^\rho}{\mu_\theta^E} + \frac{d}{dr} \left( \frac{\mu^\rho}{\mu_\theta^E} \right) r \right] \omega^2 r^2 - \frac{d(r\mu_\theta^g \Delta T)}{dr} + \mu_r^g \Delta T, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где учтено равенство  $\mu_\theta^E \mu_{r\theta}^v = \mu_r^E \mu_{\theta r}^v$ .

Введя обозначения

$$\alpha_0 = \frac{1}{\mu_\theta^E} - \frac{1}{\mu_r^E} + \frac{d}{dr} \left( \frac{1 - \mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \right) r; \quad \alpha_1 = \frac{3}{\mu_\theta^E} + \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\mu_\theta^E} \right) r; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\mu_\theta^E}; \quad (2.15)$$

$$\Omega = - \left[ \frac{(3 + \mu_{\theta r}^v) \mu^\rho}{\mu_\theta^E} + \frac{d}{dr} \left( \frac{\mu^\rho}{\mu_\theta^E} \right) r \right] \omega^2 r^2 - \frac{d(r\mu_\theta^g \Delta T)}{dr} + \mu_r^g \Delta T, \quad (2.16)$$

уравнение (2.14) приводится к следующему виду:

$$\alpha_2 r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \alpha_1 r \frac{d\sigma_r}{dr} + \alpha_0 \sigma_r = \Omega. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) является неоднородным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, скачкообразно изменяющимися на границах слоев диска. В случае однородного диска, когда  $\alpha_{0,1,2} = \text{const}$ , его решение совпадает с известным решением для вращающегося однородного диска [8].

Для диска, состоящего из нескольких слоев, аналитическое решение уравнения (2.17) возможно лишь в пределах отдельных слоев  $P_k$ . При этом форма решения будет зависеть от вида упругой симметрии материала слоя.

### §3. Частные случаи решения определяющего уравнения.

Рассмотрим некоторые случаи решения уравнения (2.17) в контексте свойств отдельного слоя.

*Однородный слой.* В этом случае в пределах  $k$ -го слоя при  $r \in (r_{bd,k-1}, r_{bd,k})$ , физико-механические характеристики материала будут постоянными  $S_a^{[k]} = \text{const}$ , а соотношения (2.15) и (2.16) примут вид

$$\alpha_2^{[k]} = \frac{1}{E_\theta^{[k]}}; \quad \alpha_1^{[k]} = \frac{3}{E_\theta^{[k]}}; \quad \alpha_0^{[k]} = \frac{1}{E_\theta^{[k]}} - \frac{1}{E_r^{[k]}}; \quad (3.1)$$

$$\Omega^{[k]} = - \frac{3 + \nu_{\theta r}^{[k]}}{E_\theta^{[k]}} \rho^{[k]} r^2 \omega^2 - g_\theta^{[k]} r \frac{d\Delta T^{[k]}}{dr} + (g_r^{[k]} - g_\theta^{[k]}) \Delta T^{[k]}. \quad (3.2)$$

С учетом (3.1) дифференциальное уравнение (2.17) преобразуется к частному виду уравнения Коши – Эйлера

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r^{[k]}}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r^{[k]}}{dr} + \left(1 - \frac{E_\theta^{[k]}}{E_r^{[k]}}\right) \sigma_r^{[k]} = E_\theta^{[k]} \Omega^{[k]}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (3.3)$$

Его общее решение можно представить в таком виде:

$$\sigma_r^{[k]} = \frac{1}{r} \left\{ C_1^{[k]} r^{\lambda^{[k]}} + \frac{C_2^{[k]}}{r^{\lambda^{[k]}}} + \frac{\lambda^{[k]} E_r^{[k]}}{2} \left[ r^{\lambda^{[k]}} \int \left( \frac{\Omega^{[k]}}{r^{\lambda^{[k]}}} \right) dr - \frac{1}{r^{\lambda^{[k]}}} \int \left( r^{\lambda^{[k]}} \Omega^{[k]} \right) dr \right] \right\}, \quad (3.4)$$

где  $C_1^{[k]}, C_2^{[k]}$  – неизвестные постоянные интегрирования;  $\lambda^{[k]}$  – безразмерная величина, зависящая от отношения модулей упругости материала слоя:

$$\lambda^{[k]} = \sqrt{\frac{E_\theta^{[k]}}{E_r^{[k]}}}. \quad (3.5)$$

Определение напряжений  $\sigma_r^{[k]}$  (3.4) в окончательном виде возможно, если известно распределение разности температуры  $\Delta T^{[k]}$  в пределах рассматриваемого слоя. В данном случае применим подход, использованный в [26], где изменение температуры диска предполагалось по полиномиальной зависимости произвольного порядка.

Представим функцию  $\Delta T^{[k]}$  в пределах рассматриваемого  $k$ -го слоя в виде полинома порядка  $n$

$$\Delta T^{[k]} = \sum_{i=0}^n (\beta_i^{[k]} r^i), \quad (3.6)$$

где  $\beta_i^{[k]}$  – постоянные для  $k$ -го слоя.

С учетом (3.6) соотношение (3.2) преобразуется к виду

$$\Omega^{[k]} = -\frac{3 + \nu_{\theta r}^{[k]}}{E_\theta^{[k]}} \rho^{[k]} r^2 \omega^2 + \sum_{i=0}^n \left[ \beta_i^{[k]} r^i \left( \mathcal{G}_r^{[k]} - (i+1) \mathcal{G}_\theta^{[k]} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Подставляя это соотношение в решение (3.4), после преобразования с учетом (3.5) и (3.1) получим

$$\sigma_r^{[k]} = \frac{1}{r} \left[ C_1^{[k]} r^{\lambda^{[k]}} + \frac{C_2^{[k]}}{r^{\lambda^{[k]}}} - \frac{(3 + \nu_{\theta r}^{[k]}) \omega^2 \rho^{[k]} r^3}{(3 - \lambda^{[k]})(3 + \lambda^{[k]})} + E_\theta^{[k]} \sum_{i=0}^n \frac{r^{i+1} \beta_i^{[k]} \left( \mathcal{G}_r^{[k]} - (i+1) \mathcal{G}_\theta^{[k]} \right)}{(i+1 - \lambda^{[k]})(i+1 + \lambda^{[k]})} \right]. \quad (3.8)$$

В частном случае равномерного изменения температуры во всех точках диска

$$\Delta T^{[k]} = \beta_0^{[k]} = \beta_0 = \text{const}$$

и решение (3.8) преобразуется к виду

$$\sigma_r^{[k]} = \frac{1}{r} \left[ C_1^{[k]} r^{\lambda^{[k]}} + \frac{C_2^{[k]}}{r^{\lambda^{[k]}}} - \frac{(3 + \nu_{\theta r}^{[k]}) \omega^2 \rho^{[k]} r^3}{(3 - \lambda^{[k]})(3 + \lambda^{[k]})} + \frac{E_\theta^{[k]} \left( \mathcal{G}_r^{[k]} - \mathcal{G}_\theta^{[k]} \right) \beta_0}{(1 - \lambda^{[k]})(1 + \lambda^{[k]})} r \right]. \quad (3.9)$$

Если слой является изотропным или трансотропным (плоскость изотропии, совпадает с плоскостью диска), то  $E_r^{[k]} = E_\theta^{[k]} = E^{[k]}$ ,  $\nu_{r\theta}^{[k]} = \nu_{\theta r}^{[k]} = \nu^{[k]}$ ,  $\mathcal{G}_r^{[k]} = \mathcal{G}_\theta^{[k]} = \mathcal{G}^{[k]}$  и уравнение (3.3) упрощается

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r^{[k]}}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r^{[k]}}{dr} = E^{[k]} \Omega^{[k]}, \quad k = \overline{1, m}.$$



Общее решение данного уравнения получено в виде

$$\sigma_r^{[k]} = -\frac{C_1^{[k]}}{2r^2} + C_2^{[k]} + E_\theta^{[k]} \int \left[ \frac{1}{r^3} \int (r\Omega^{[k]}) dr \right] dr. \quad (3.10)$$

С учетом (3.7) решение (3.10) приобретает вид:

$$\sigma_r^{[k]} = -\frac{C_1^{[k]}}{2r^2} + C_2^{[k]} - \frac{3+\nu^{[k]}}{8} \rho^{[k]} \omega^2 r^2 - E^{[k]} g^{[k]} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^{[k]} r^i}{i+2}. \quad (3.11)$$

В случае равномерного изменения температуры во всех точках диска, в его изотропных слоях температурная составляющая напряжений исчезает из (3.11)

$$\sigma_r^{[k]} = -\frac{C_1^{[k]}}{2r^2} + C_2^{[k]} - \frac{3+\nu^{[k]}}{8} \rho^{[k]} \omega^2 r^2. \quad (3.12)$$

Следует отметить, что решение (3.8) в случае отсутствия изменения температуры ( $\Delta T^{[k]} = 0$ ) совпадает с известным решением [5] для ортотропного диска постоянной толщины, а (3.11) соответствует решению для изотропного диска [8], что подтверждает правильность полученного аналитического решения.

*Непрерывно-неоднородный слой.* Уравнение (2.17), полученное в предположении однородности материалов слоев, без нарушения математической корректности выводов позволяет также учитывать их непрерывную неоднородность. В этом случае в пределах  $k$ -го непрерывно-неоднородного в радиальном направлении слоя физико-механические характеристики и, как следствие, коэффициенты  $\alpha_{0,1,2}^{[k]}$  будут непрерывными функциям координаты  $r$ . В случае произвольной зависимости  $\alpha_i^{[k]} = \alpha_i^{[k]}(r)$  решение уравнения (2.17) в общем виде вызывает значительные математические затруднения. Поэтому его точные аналитические решения можно получить только в частных случаях непрерывной неоднородности.

В известных исследованиях, посвященных теоретическому исследованию НДС изотропных ортотропных дисков, рассматривались такие законы изменения физико-механических характеристик материала: степенной [10, 12, 17 – 19, 23, 24, 28], экспоненциальный [14, 29], полиномиальный [26] и смешанный [15]. Как для отдельных слоев, так и для диска в целом, они могут быть использованы при построении решения уравнения (2.17), которое описывает общий случай дискретной или непрерывной неоднородности свойств материала. Однако это составляет уже отдельную задачу, поэтому здесь рассмотрим лишь простейший случай, когда в пределах  $k$ -го слоя все коэффициенты  $\alpha_i^{[k]}$  являются линейно-зависимыми

$$\alpha_i^{[k]} = c_i^{[k]} \varphi^{[k]}(r) \quad (i = 0, 1, 2), \quad (3.13)$$

где  $\varphi^{[k]} = \varphi^{[k]}(r)$  – некоторая функция координаты  $r$ ;  $c_i^{[k]}$  – постоянная.

С учетом (2.15) это возможно, если для материала слоя коэффициенты Пуассона постоянны ( $\nu_{\theta r}^{[k]}, \nu_{r\theta}^{[k]} = \text{const}$ ), а модули упругости изменяются по некоторому закону:

$$E_\theta^{[k]} = c_\theta^{E[k]} \frac{1}{\varphi^{[k]}}; \quad E_r^{[k]} = c_r^{E[k]} \frac{1}{\varphi^{[k]}}. \quad (3.14)$$

Подставив (3.13) и (3.14) в (2.15) в пределах  $k$ -го слоя, получим

$$c_0^{[k]} = \frac{c_r^{E[k]} - c_\theta^{E[k]}}{c_\theta^{E[k]} c_r^{E[k]}} + \frac{1 - \nu_{\theta r}^{[k]}}{c_\theta^{E[k]}} \frac{d\varphi^{[k]}}{dr} \frac{r}{\varphi^{[k]}}; \quad c_1^{[k]} = \frac{3}{c_\theta^{E[k]}} + \frac{1}{c_\theta^{E[k]}} \frac{d\varphi^{[k]}}{dr} \frac{r}{\varphi^{[k]}}; \quad c_2^{[k]} = \frac{1}{c_\theta^{E[k]}}.$$

Эти соотношения будут справедливы в случае

$$r \frac{d\varphi^{[k]}}{dr} = n_k \varphi^{[k]},$$

откуда

$$\varphi^{[k]} = r^{n_k}; \quad c_0^{[k]} = \frac{1}{c_\theta^{E[k]}} - \frac{1}{c_r^{E[k]}} + \frac{1 - c_r^{E[k]} v_{\theta r}^{[k]}}{c_\theta^{E[k]} c_r^{E[k]}} n_k; \quad c_1^{[k]} = \frac{3 + n_k}{c_\theta^{E[k]}}; \quad c_2^{[k]} = \frac{1}{c_\theta^{E[k]}}, \quad (3.15)$$

где  $n$  – произвольное действительное число.

С учетом (3.13) и (3.15) уравнение (2.17) в пределах  $k$ -го слоя преобразуется к виду

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r^{[k]}}{dr^2} + (3 + n_k) r \frac{d\sigma_r^{[k]}}{dr} + \left( 1 - \frac{c_r^{E[k]}}{c_\theta^{E[k]}} + \frac{1 - c_r^{E[k]} v_{\theta r}^{[k]}}{c_r^{E[k]}} n_k \right) \sigma_r^{[k]} = \frac{c_\theta^{E[k]} \Omega^{[k]}}{r^{n_k}},$$

а его общее решение будет иметь вид

$$\sigma_r^{[k]} = \frac{1}{r^{\frac{\lambda^{[k]} + n_k + 1}{2}}} \left\{ r^{\lambda^{[k]}} C_1^{[k]} + C_2^{[k]} + \frac{c_\theta^{E[k]}}{\lambda^{[k]}} \left[ r^{\lambda^{[k]}} \int \left( \frac{\Omega^{[k]}}{r^{\frac{\lambda^{[k]} + n_k}{2}}} \right) dr - \int \left( r^{\frac{\lambda^{[k]} - n_k}{2}} \Omega^{[k]} \right) dr \right] \right\}, \quad (3.16)$$

где показатели степени определяются соотношением

$$\lambda^{[k]} = \sqrt{c_\theta^{E[k]} - n_k + \frac{1 + 2v_{\theta r}^{[k]}}{2} n_k + \frac{n_k^2}{4}}.$$

Функция  $\Omega^{[k]}$  в (3.16), которая учитывает силы инерции и температурную нагрузку, согласно (2.16) и с учетом (3.6), (3.14) и (3.15) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Omega^{[k]} = & -\frac{\omega^2}{c_\theta^{E[k]}} \left[ (3 + v_{\theta r}^{[k]} + n_k) \mu^{\rho^{[k]}} + \frac{d\mu^{\rho^{[k]}}}{dr} r \right] r^{n_k + 2} + \\ & + \sum_{i=0}^n \left[ \beta_i^{[k]} r^i \left( \mu_r^{\rho^{[k]}} - \mu_\theta^{\rho^{[k]}} (i+1) - \frac{d\mu_\theta^{\rho^{[k]}}}{dr} r \right) \right]. \end{aligned}$$

Следует отметить, что к задаче с непрерывно-неоднородными слоями относится случай, когда в пределах слоя имеет место резкое изменение температурного поля, например, в дисках роторов газотурбинных установок. Это приводит к необходимости учета изменения физико-механических характеристик с изменением температуры.

Также к таким типам задач может быть отнесена и задача определения НДС диска с плавным изменением толщины в радиальном направлении.

#### §4. Решение для всего диска.

После определения решений  $\sigma_r^{[k]}$  с помощью (3.4), (3.11) или (3.16), функцию напряжений  $\sigma_r$  для диска в целом, по аналогии с функциями упругих постоянных (1.2), можно представить в виде

$$\sigma_r = \sum_{k=1}^m \left\{ \sigma_r^{[k]} \left[ H(r - r_{bd,k-1}) - H(r - r_{bd,k}) \right] \right\}. \quad (4.1)$$

Однако полученное соотношение будет содержать  $2m$  неизвестных постоянных интегрирования, две из которых можно определить из краевых условий на цилиндрических поверхностях, а остальные – из принятого предположения об абсолютной жесткости контакта слоев.

Исходя из условий равновесия на границе слоев, напряжения  $\sigma_r$  должны быть непрерывны, т.е. справедливо равенство

$$\sigma_r^{[k]} \Big|_{r=r_{bd,k}} = \sigma_r^{[k+1]} \Big|_{r=r_{bd,k}}, \quad k = \overline{1, m-1}. \quad (4.2)$$

Кроме того, должно выполняться условие непрерывности перемещений  $u_r$  и  $u_\theta$  на границах слоев  $P_k$ . Согласно с (2.13) для перемещений  $u_\theta$  непрерывность обеспечена, а перемещения  $u_r$  будут непрерывными при выполнении равенства

$$u_r^{[k]} \Big|_{r=r_{bd,k}} = u_r^{[k+1]} \Big|_{r=r_{bd,k}}, \quad k = \overline{1, m-1},$$

которое с учетом (2.12) и (4.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left( \frac{r}{E_\theta^{[k]}} \frac{d\sigma_r^{[k]}}{dr} + \frac{1-\nu_{\theta r}^{[k]}}{E_\theta^{[k]}} \sigma_r^{[k]} + \frac{\rho^{[k]} \omega^2 r^2}{E_\theta^{[k]}} + g_\theta^{[k]} \Delta T^{[k]} \right) \Big|_{r=r_{bd,k}} = \\ & = \left( \frac{r}{E_\theta^{[k+1]}} \frac{d\sigma_r^{[k+1]}}{dr} + \frac{1-\nu_{\theta r}^{[k+1]}}{E_\theta^{[k+1]}} \sigma_r^{[k+1]} + \frac{\rho^{[k+1]} \omega^2 r^2}{E_\theta^{[k+1]}} + g_\theta^{[k+1]} \Delta T^{[k+1]} \right) \Big|_{r=r_{bd,k}}, \quad k = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Условия (4.2) и (4.3) после подстановки соответствующих общих решений для слоев диска преобразуются в  $2m-2$  уравнений для определения неизвестных постоянных. Для определения  $2m$  неизвестных эти уравнения необходимо дополнить условиями на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях диска, которые отличаются для диска с отверстием и сплошного диска.

*Диск с отверстием* (рис. 1, а). В этом случае условия (4.2) и (4.3) необходимо дополнить граничным условием на внешней цилиндрической поверхности (2.4) и условием на поверхности отверстия

$$\sigma_r \Big|_{r=r_1} = -p_r^{II}. \quad (4.4)$$

В ряде практически важных случаев на поверхности отверстия диска необходимо задать кинематические условия для радиальных перемещений  $u_r$ . В таких случаях, используя соотношение (2.12), условия для перемещений  $u_r$  можно преобразовать в условия для напряжений  $\sigma_r$ .

Например, при рассмотрении диска, жестко соединенного с абсолютно жестким валом, будем иметь условие:  $u_r \Big|_{r=r_1} = 0$ , которое после подстановки (2.12) принимает вид

$$\left( r \frac{d\sigma_r^{[I]}}{dr} \right) \Big|_{r=r_1} + (1-\nu_{\theta r}^{[I]}) \sigma_r^{[I]} \Big|_{r=r_1} = -(\rho^{[I]} \omega^2 r^2 + E_\theta^{[I]} g_\theta^{[I]} \Delta T^{[I]}) \Big|_{r=r_1}. \quad (4.5)$$

В случае посадки диска на вал с гарантированным натягом радиальное перемещение, возникающее в диске, при его деформировании, будет уменьшать усилие  $p_r^{II}$ . Поэтому на определенном режиме вращения оно будет неизвестной величиной, которая должна определяться из условий совместного деформирования вала и диска.

*Сплошной диск* (рис. 1, б). Для сплошного диска условия (4.2) и (4.3) необходимо дополнить условием на внешней цилиндрической поверхности (2.4) и естественным условием в центральной точке диска:  $\sigma_r \Big|_{r=0} = \sigma_\theta \Big|_{r=0}$ . Это условие с использованием (2.7) преобразуется к виду

$$\left( r \frac{d\sigma_r}{dr} \right) \Big|_{r=0} = 0. \quad (4.6)$$

Подставляя в условие (4.5) решение (3.11), получаем  $C_2^{[I]} \equiv 0$ .

### §5. Пример реализации полученного решения.

Рассмотрим композитный многослойный диск с поперечным сечением, изображенным на рис. 2.

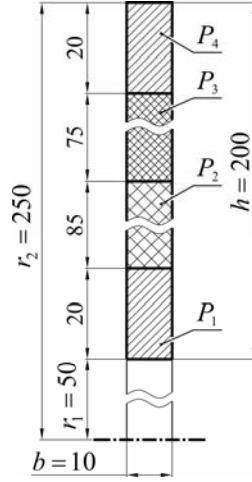


Рис. 2

Радиус отверстия и внешний радиус диска, соответственно:  $r_1 = 50$  мм,  $r_2 = 250$  мм. Диск включает 4 слоя из таких материалов:  $P_1$  – сталь 30ХГСА;  $P_2$  – стеклопластик;  $P_3$  – углепластик;  $P_4$  – титановый сплав BT3-1. Принятые физико-механические характеристики материалов слоев диска представлены в таблице.

Физико-механическая характеристика $S_a^{[k]}$	Слой диска			
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$E_r^{[k]}$ , ГПа	215	26,8	103,4	115
$E_\theta^{[k]}$ , ГПа		36,80	142,80	
$G_{r\theta}^{[k]}$ , ГПа	82,7	4,50	5,49	43,6
$\nu_{\theta r}^{[k]}$	0,3	0,351	0,32	0,32
$\rho^{[k]}$ , кг/м <sup>3</sup>	7850	1900	1550	4580
$\vartheta_r^{[k]}$ , 10 <sup>-6</sup> /К	11,7	12,4	5,5	8,6
$J_\theta^{[k]}$ , 10 <sup>-6</sup> /К		8,00	0	

Функции распределения физико-механических характеристик  $\mu_a^S$  для рассматриваемого диска согласно (1.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_a^S = & S_a^{[1]} [H(r-0,05) - H(r-0,07)] + S_a^{[2]} [H(r-0,07) - H(r-0,155)] + \\ & + S_a^{[3]} [H(r-0,155) - H(r-0,23)] + S_a^{[4]} [H(r-0,23) - H(r-0,25)]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Диск вращается с постоянным ускорением  $d\omega/dt = 1200$  рад/с<sup>2</sup>, достигая частоты вращения  $n = 8000$  мин<sup>-1</sup>. При этом температура диска во всех его точках возрастает на  $\Delta T = \beta_0 = 150$  К относительно начальных нормальных условий.

На поверхности отверстия и внешней цилиндрической поверхности действуют нагрузки:  $p_r^{\Pi_1} = 15$  МПа,  $p_r^{\Pi_2} = 95$  МПа,  $p_\theta^{\Pi_2} = 2$  МПа.

В процессе реализации полученного выше решения после определения величин (3.5), с использованием решений (3.9), (3.12) и условий (4.2), (4.3), (2.4) и (4.4) были получены решения для напряжений  $\sigma_r^{[k]}$  для всех слоев диска. В дальнейшем, согласно (4.1), эти решения были собраны в единую функцию  $\sigma_r$  для диска в целом, которая позволила определить другие компоненты НДС, в частности  $\sigma_\theta$  (2.7). При этом касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$  были получены независимо от функции  $\sigma_r$  подстановкой исходных данных и функции распределения плотности  $\mu^p$  (5.1) во второе соотношение (2.7).

Графики распределения напряжений в поперечном сечении диска приведены на рис. 3, б – г. Слева от них приведен график функции  $\mu_\theta^E$  продольного модуля упругости (рис. 3, а). Для сравнения на рисунке также нанесены распределения напряжений для однородных дисков с аналогичными размерами, изготовленных из титанового сплава ВТ3-1 (штриховые линии) и стали 30ХГСА (штрихпунктирные линии).

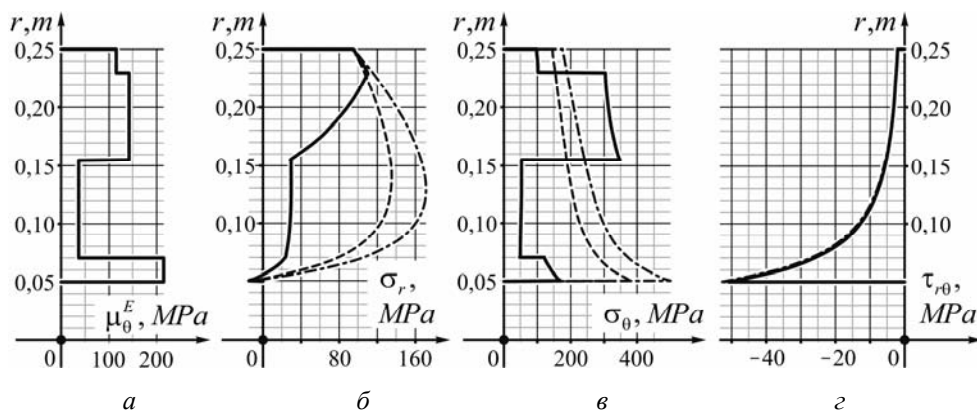


Рис. 3

Графики распределения напряжений (рис. 3, б, г) показывают выполнение условий непрерывности искомых функций  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$  на границе контакта слоев в полученном решении. При этом напряжения  $\sigma_\theta$  (рис. 3, в) скачкообразно изменяются на границе слоев, а в пределах слоя – по сложной зависимости.

Из приведенных результатов следует, что композитный диск имеет значительные изменения в распределении нормальных напряжений по сравнению с однородными изотропными. Максимумы напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  сместились к внешнему контуру диска, причем их значения существенно ниже максимумов напряжения в однородных дисках. С учетом прочностных характеристик существующих волокнистых стекло- и углепластиков можно говорить о значительном повышении запаса статической прочности композитного диска. Кроме того, расчетная масса композитного диска в 1,9 раза меньше, чем у титанового, и в 3,3 раза – чем у стального диска.

Касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$  для всех трех дисков практически совпадают, что объясняется незначительным влиянием объемных сил на их величину и преобладанием составляющей от касательной нагрузки  $p_\theta^{II_2}$ . При этом расчетные значения касательных напряжений для изотропных дисков являются несущественными, однако для композитного диска, ввиду сравнительно малой сдвиговой прочности волокнистых материалов его средних слоев, могут быть определяющими относительно прочности. По приблизительным оценкам запас прочности для стеклопластикового слоя по напряжениям  $\sigma_\theta$  составляет около 12, а по касательным напряжениям  $\tau_{r\theta}$  – только 2.

Характерным для многослойного диска является появление температурных напряжений даже в условиях равномерного изменения температурного поля за счет неравномерного температурного расширения слоев. В значительной мере следствием этого и является «разгрузка» внутренних слоев, которую можно наблюдать на рис. 3. Поэтому механизм уменьшения нормальных напряжений в композитном диске можно раскрыть, рассмотрев распределения их составляющих от температурной нагрузки, приведенные на рис. 4, б, в. Для сравнения на рис. 4, а построен график изменения коэффициента теплового расширения в радиальном направлении, а на графиках напряжений штрихпунктирной линией нанесены напряжения с учетом всех нагрузок.

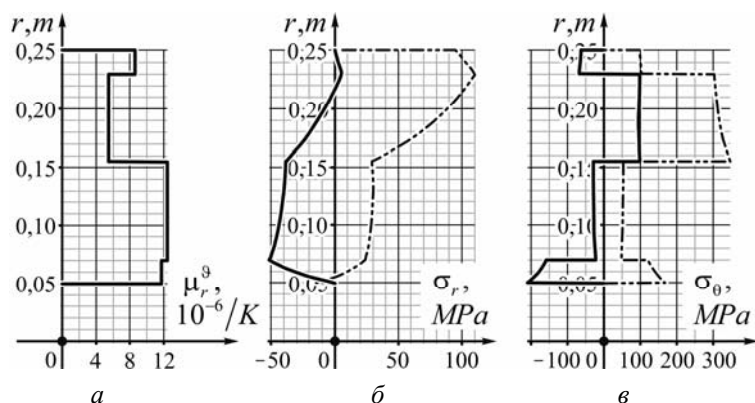


Рис. 4

Графики на рис. 4 показывают, что различие в тепловом расширении слоев диска вызывает ощутимые по величине нормальные напряжения, которые в значительной мере компенсируют напряжения от других видов нагрузки, разгружая 1-й, 2-й и 4-й слои. Такой эффект может быть использован на практике для повышения статической прочности дисков, которые работают в условиях температурного нагрева.

После нахождения напряжений были определены компоненты деформаций и перемещений с применением соотношений (2.9), (2.12) и (2.13). Построенные графики радиальных и окружных перемещений приведены на рис. 5, где штриховой и штрихпунктирной линиями показаны распределения перемещений в титановом и стальном дисках, соответственно.

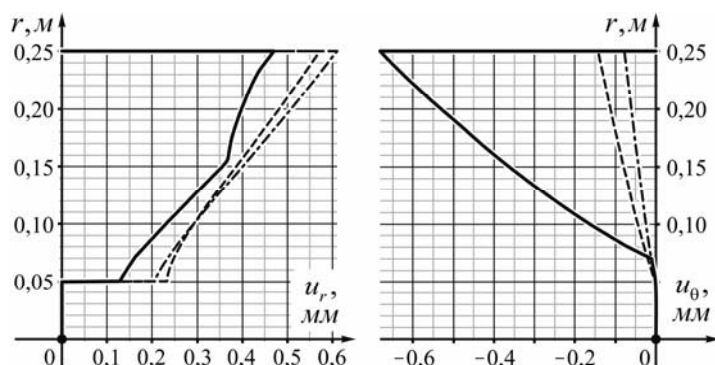


Рис. 5

Как видим, жесткость композитного диска в радиальном направлении оказалась выше жесткости титанового и стального дисков на 21% и на 30%, соответственно. Однако по жесткости в окружном направлении композитный диск значительно уступает титановому и стальному дискам, что можно объяснить большой податливостью волокнистых композитов деформациям сдвига.

### Заклучение.

1. Получено точное решение плоской задачи теории упругости по определению компонент НДС многослойного диска с ортотропными слоями, которое позволяет учитывать равномерно распределенные статические нагрузки на цилиндрических поверхностях, а также температурные деформации. Оно может быть использовано для прогнозирования прочности и жесткости многослойных композитных дисков, разработки методики их оптимального проектирования и расчета многослойных дисков переменной толщины.

2. По результатам выполненных расчетов установлено:

характер распределения и значения расчетных компонент НДС многослойного композитного диска и сплошных однородных титанового и стального дисков, тех же размеров, существенно отличаются. При одинаковых условиях и нагрузках в многослойном диске возникают значительно меньшие максимальные нормальные напряжения со смещением точек их действия по сравнению с изотропным однородным диском. Значительную роль в этом играет компенсация температурными напряжениями, что позволяет соответствующим подбором материалов слоев, достичь значительного увеличения запаса статической прочности многослойного диска при снижении массы;

величина касательных напряжений в основном зависит от касательной нагрузки на периферии диска, а их доля от объемных инерционных сил при ускоренном вращении сравнительно невелика. В то же время полученные результаты не исключают того, что при других исходных данных силы инерции могут значительно влиять на величину касательных напряжений;

жесткость композитного диска в радиальном направлении выше жесткости сплошного титанового и стального дисков, однако, уступает им по окружным перемещениям.

РЕЗЮМЕ. Представлено точний аналітичний розв'язок задачі визначення характеристик напружено-деформованого стану багат шарового вузького диска з радіальним чергування шарів, що обертається із прискоренням в осесиметричному температурному полі під дією рівномірно розподілених на його циліндричних поверхнях нормальних і дотичних навантажень. Співвідношення отримані шляхом розв'язання системи рівнянь плоскої задачі теорії пружності у полярній системі координат з урахуванням дискретно-неоднорідної будови диску. Отриманий розв'язок дає розподіл напружень і переміщень по всьому пакету шарів диска і може бути використаний для вирішення широкого кола прикладних задач і методів оптимального проектування.

1. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
2. Вьюнов С.А., Гусев Ю.И., Карпов А.В. и др. Конструкция и проектирование авиационных газотурбинных двигателей / Под общ. ред. Д.В. Хронина. – М.: Машиностроение, 1989. – 368 с.
3. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
4. Иноземцев А.А., Нихамкин М.А., Сандрацкий В.Л. Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок. Том 2: Компрессоры. Камеры сгорания. Форсажные камеры турбины. Выходные устройства. – М.: Машиностроение, 2008. – 365 с.
5. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. – 355 с.
6. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
7. Скубачевский Г.С. Авиационные газотурбинные двигатели: конструкция и расчет деталей. – М.: Машиностроение, 1969. – 544 с.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. / Под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
9. Ari-Gur J., Stavsky Y. On rotating polar-orthotropic circular disks // Int. J. Solids Struct. – 1981. – 17. – P. 57 – 67.
10. Bayat M., Sahari B.B., Saleem M., Hamouda A.M.S., Mahdi E., Reddy J.N. Thermo elastic analysis of functionally graded rotating disks with temperature-dependent material properties: uniform and variable thickness // Int. J. Mech. Mater. Des. – 2009. – 5. – P. 263 – 279.

11. *Gallioglu H., Topcu M., Altan G.* Stress analysis of curvilinearly orthotropic rotating discs under mechanical and thermal loading // *J. Reinf. Plast. Compos.* – 2005. – **24**. – P. 831 – 838.
12. *Chang C.I.* Stresses and Displacements in Rotating Anisotropic Disks with Variable Densities // *AIAA J.* – 1976. – **14**, N 1. – P. 116 – 118.
13. *Chree C.* The Stresses and Strains in Isotropic Elastic Solid Ellipsoid in Equilibrium under Bodily Forces Derivable from a Potential of the Second Degree // *Proc. Roy. Soc. of London.* – 1995. – **58**. – P. 39 – 59.
14. *Eraslan A.N., Akis T.* On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // *Acta Mech.* – 2006. – **181**. – P. 43 – 63.
15. *Essa S., Argeso H.* Elastic analysis of variable profile and polar orthotropic FGM rotating disks for a variation function with three parameters // *Acta Mech.* – 2017. – **228** (11). – P. 3877 – 3899.
16. *Goryk A.V., Kovalchuk S.B.* Elasticity theory solution of the problem on plane bending of a narrow layered cantilever bar by loads at its end // *Mechanics of Composite Materials.* – 2018. – **54** (2). – P. 179 – 190.
17. *Gurushankar G.V.* Thermal stresses in a rotating, nonhomogeneous, anisotropic disk of varying thickness and density // *J. Strain Anal. Eng.* – 1975. – **10**. – P. 137 – 142.
18. *Horgan C.O., Chan A.M.* The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks // *J. Elast.* – 1999. – **55**. – P. 219 – 230.
19. *Kordkheili S.A.H., Naghdabadi R.* Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk // *Compos. Struct.* – 2007. – **79** (4). – P. 508 – 516.
20. *Koo K.N.* Elastic stresses and failure of rotating cross-ply laminate disks // *J. of Mech. Sci. and Technology.* – 2009. – **23**. – P. 1508 – 1514.
21. *Love A.E.H.* *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1959. – 643 p.
22. *Murthy D.N.S., Sherbourne A.N.* Elastic stresses in anisotropic disks of variable thickness // *Int. J. Mech. Sci.* – 1970. – **12**. – P. 627 – 640.
23. *Peng X.L., Li X.F.* Elastic analysis of rotating functionally graded polar orthotropic disks // *Int. J. Mech. Sci.* – 2012. – **60**. – P. 84 – 91.
24. *Reddy T.Y., Srinath H.* Elastic stresses in a rotating anisotropic annular disk of variable thickness and variable density // *Int. J. Mech. Sci.* – 1974. – **16**. – P. 85 – 89.
25. *Tang R.C., Adams S.F.* Stress in a rotating cylinder and variable thickness disk of anisotropic materials // *J. Comp. Mat.* – 1970. – **4**, N 4. – P. 419 – 421.
26. *Vullo V., Vivio F.* Elastic stress analysis of non-linear variable thickness rotating disks subjected to thermal load and having variable density along the radius // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – **45**. – P. 5337 – 5355.
27. *Wu N.G., Ramsey J.H.* Stresses in a layered rotating disk // *Int. J. Mech. Sci.* – 1966. – **8**. – P. 629 – 639.
28. *You L.H., You X.Y., Zhang J.J., Li J.* On rotating circular disks with varying material properties // *Z. Angew. Math. Phys.* – 2007. – **58**. – P. 1068 – 1084.
29. *Zenkour A.M.* Stress distribution in rotating composite structures of functionally graded solid disks // *J. Mater. Process. Technol.* – 2009. – **209**. – P. 3511 – 3517.

Поступила 10.10.2018

Утверждена в печать 05.11.2019