

А. В. Марчук, С. В. Ренейская, О. Н. Лещук

**ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ
КОМПОЗИТНЫХ ПЛИТ НА ОСНОВЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Национальный транспортный университет,

ул. Омеляновича-Павленко 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: sm_ntu@ukr.net

Abstract. Within the framework of the spatial theory of elasticity, two variants of the semi-analytical finite element method are constructed as applied to the study of the frequencies of free vibrations and the modes of distribution of displacements in them. An analysis by two methods is considered as proof of its reliability. An analysis is carried out of the frequencies of free vibrations and the corresponding modes of distribution of displacements of a laminated composite plate, when the two opposite edges are free and the other two are hinged. A plate with a free bottom surface, a rigidly fixed bottom surface and resting on an elastic base in the form of a layer of finite capacity is considered, taking into account its inertial properties. The high accuracy of the proposed models in the problems under consideration is demonstrated. The inadmissibility of neglecting the inertial properties of bases is pointed.

Key words: 3D analysis, semi-analytical finite elements method, sandwich composite panel, free vibrations.

Введение.

В современной технике увеличивается использование конструктивных систем композитной структуры, в частности слоистых, с высоким уровнем разномодульности составляющих материалов, а также ортотропии. Они находятся в сложных условиях деформирования, имеют различные условия закрепления на контуре и контакта на внешних поверхностях, подвержены воздействию динамических нагрузок, близких к резонансу. Указанные особенности могут вызывать существенно трехмерный характер в процессе динамического деформирования.

Использование прямых точных методов пространственной теории упругости для исследования свободных колебаний указанных конструкций в значительной мере осложнено и ограничено рассмотрением плит с шарнирным опиранием. В частности, такие задачи рассматривались в [2, 26, 29]. Классические направления, построенные на упрощенных гипотезах Кирхгофа – Лява, могут приводить в определенных случаях к существенным погрешностям определения характеристик свободных колебаний. Поэтому продолжают развиваться различные уточненные варианты теорий исследования динамического поведения слоистых конструкций, что отражено в следующих обзорах: [2, 11 – 14, 17, 20, 33, 36 – 38 и др.]. На основе тех или иных вариантов уточненных моделей динамическое деформирование рассматривалось в работах [2, 4 – 10, 18, 19, 22, 23, 25, 33 – 37, 39 – 42 и др.]. Продолжают развиваться различные численно-аналитические методы трехмерного анализа слоистых конструкций, в частности [1, 3, 9, 11, 12, 15, 16, 21, 24, 30 – 32, 43]. Несмотря на обилие работ, посвященных динамическому деформированию слоистых плит, авторы статьи не обнаружили исследований в трехмерной постановке свободных колебаний плит с двумя свободными противоположными кромками при шарнирном закреплении двух других на упругом осно-

вании в виде слоя конечной мощности с учетом его инерционных свойств, а также на абсолютно жестком основании. Такой случай может быть составной частью расчетной схемы транспортных сооружений.

Постановка задачи.

Задачей данной работы является разработка двух вариантов полуаналитического метода конечных элементов, которые позволяют рассматривать свободные колебания слоистых композитных плит. В первом варианте полуаналитического метода конечных элементов для аппроксимации искомым функций по планарной координате X привлекается конечно-элементная аппроксимация, искомые функции по координате Y представляются в виде ряда Фурье, по толщине (координата Z) привлекаются известные полиномы [29]. Во втором варианте для аппроксимации искомым функций в плане по координате X используются полиномы, по координате Y привлекается ряд Фурье, а распределение искомым функций по толщине конструкции находится на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений [28]. Рассмотрение задач двумя методами при исследовании свободных колебаний с отысканием частот и форм распределения перемещений в них, служит дополнительным обоснованием достоверности получаемых результатов расчета. В этом плане они не конкурируют, а дополняют друг друга. При определении частот свободных колебаний в модели с аналитическим решением соответствующей системы дифференциальных уравнений относительно искомым функций по толщине плиты в качестве отправных привлекаются частоты, полученные по модели с полиномиальной аппроксимацией искомым функций по толщине.

Привлечение для аппроксимации в плане по координате Y тригонометрических рядов Фурье в обоих вариантах предлагаемых подходов вводит известные ограничения на рассматриваемые граничные условия на соответствующем контуре. По координате X привлекается конечно-элементная аппроксимация, что существенно расширяет круг граничных условий, которые можно рассмотреть (шарнирный, свободный, жестко защемленный край). Возможно рассмотрение жесткого контакта слоев, проскальзывающего контакта слоев по части поверхности перпендикулярно координате X . Комбинирование условий на поверхности слоев и на контуре позволяет рассмотрение композитных конструкций со сложным строением по толщине перпендикулярно координате X . В силу ограниченного объема статьи в данном сообщении ограничимся рассмотрением свободных колебаний плит со сводным краем по координате X (распространенный случай в расчетных схемах транспортных сооружений). Рассматриваются варианты конструкции со свободной нижней поверхностью, с запрещенными перемещениями на нижней поверхности и опиранием на основание, которое моделируется слоем конечной мощности (учитываются инерционные свойства основания).

Рассмотрим слоистую конструкцию с композитными слоями с тремя плоскостями упругой симметрии (ортотропными слоями). Физико-механические характеристики ортотропных слоев связаны следующими соотношениями:

$$e_{11}^{(k)} = \frac{\sigma_{11}^{(k)}}{E_1^{(k)}} + \frac{\nu_{21}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)}}{E_2^{(k)}} + \frac{\nu_{31}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}}{E_3^{(k)}}; \quad e_{22}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)}}{E_1^{(k)}} + \frac{\sigma_{22}^{(k)}}{E_2^{(k)}} + \frac{\nu_{32}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}}{E_3^{(k)}};$$

$$e_{33}^{(k)} = \frac{\nu_{13}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)}}{E_1^{(k)}} + \frac{\nu_{23}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)}}{E_2^{(k)}} + \frac{\sigma_{33}^{(k)}}{E_3^{(k)}}; \quad 2e_{23}^{(k)} = \frac{\sigma_{23}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}; \quad 2e_{13}^{(k)} = \frac{\sigma_{13}^{(k)}}{G_{13}^{(k)}}; \quad 2e_{12}^{(k)} = \frac{\sigma_{12}^{(k)}}{G_{12}^{(k)}}.$$

Верхний индекс (k) обозначает номер слоя. Направление 1 тождественно направлению X , 2 – Y , 3 – Z . Ось Z направлена вниз. Во втором разделе проводится суммирование по нижним индексам l и p ($l = 1, 2, 3$; $p = 1, 2, 3$).

§1. Построение варианта полуаналитического метода конечных элементов для исследования свободных колебаний на основе полиномиальной аппроксимации по толщине конструкции (В1).

Представим вектор искомых перемещений следующим образом:

$$\begin{aligned} U_1^{(k)}(x, y, z, t) &= U_{1l}^{(k)}(x, y, t) f_{1l}^{(k)}(z); & U_2^{(k)}(x, y, z, t) &= U_{2l}^{(k)}(x, y, t) f_{2l}^{(k)}(z); \\ U_3^{(k)}(x, y, z, t) &= W_p^{(k)}(x, y, t) \beta_p^{(k)}(z). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $U_{11}^{(k)}(x, y, t)$ – тангенциальные перемещения на верхней поверхностях k -го слоя конструкции в направлении оси X ; $U_{12}^{(k)}(x, y, t)$ – тангенциальные перемещения на нижней поверхности k -го слоя конструкции в направлении оси X ; $U_{13}^{(k)}(x, y, t)$ – функции сдвига в направлении оси X ; $U_{21}^{(k)}(x, y, t)$, $U_{22}^{(k)}(x, y, t)$, $U_{23}^{(k)}(x, y, t)$ – тангенциальные перемещения на лицевых поверхностях k -го слоя и функция сдвига в направлении осей Y ; $W_1^{(k)}(x, y, t)$, $W_2^{(k)}(x, y, t)$ – нормальные перемещения на лицевых поверхностях k -го слоя конструкции; $W_3^{(k)}(x, y, t)$ – функция обжатия; $f_{11}^{(k)}(z)$, $f_{12}^{(k)}(z)$, $f_{21}^{(k)}(z)$, $f_{22}^{(k)}(z)$, $\beta_1^{(k)}(z)$, $\beta_2^{(k)}(z)$ – заданные полиномы первой степени; $\beta_3^{(k)}(z)$ – полином второй степени; $f_{13}^{(k)}(z)$, $f_{23}^{(k)}(z)$ – полиномы третьей степени [27].

Компоненты тензора деформаций слоя конструкции с использованием введенной аппроксимации (1.1) определяются на основе следующих соотношений:

$$\begin{aligned} e_{11}^{(k)} &= \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)}; & e_{22}^{(k)} &= \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)}; & e_{33}^{(k)} &= W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z}; & 2e_{12}^{(k)} &= \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial y} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)}; \\ 2e_{13}^{(k)} &= U_{1l}^{(k)} \frac{\partial f_{1l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial x} \beta_p^{(k)}; & 2e_{23}^{(k)} &= U_{2l}^{(k)} \frac{\partial f_{2l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial y} \beta_p^{(k)}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Напряжения с учетом выражений для деформаций (1.2) записаны на основе закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= C_{11}^{(k)} \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + C_{12}^{(k)} \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + C_{13}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z}; \\ \sigma_{22}^{(k)} &= C_{21}^{(k)} \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + C_{22}^{(k)} \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + C_{23}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z}; \\ \sigma_{33}^{(k)} &= C_{31}^{(k)} \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + C_{32}^{(k)} \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + C_{33}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z}; \\ \sigma_{12}^{(k)} &= G_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial y} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)} \right); \\ \sigma_{13}^{(k)} &= G_{13}^{(k)} \left(U_{1l}^{(k)} \frac{\partial f_{1l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial x} \beta_p^{(k)} \right); & \sigma_{23}^{(k)} &= G_{23}^{(k)} \left(U_{2l}^{(k)} \frac{\partial f_{2l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial y} \beta_p^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Вариация потенциальной энергии деформации с использованием выражений для деформаций (1.2) и напряжений (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = & \iint_S \int_{a_{k-1}}^{a_k} \int_{t_1}^{t_2} \left[\left[C_{11}^{(k)} \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + C_{12}^{(k)} \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + C_{13}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z} \right] \delta \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + \right. \\
& + \left[C_{21}^{(k)} \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + C_{22}^{(k)} \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + C_{23}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z} \right] \delta \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)} + \\
& + \left[C_{31}^{(k)} \frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial x} f_{1l}^{(k)} + C_{32}^{(k)} \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial y} f_{2l}^{(k)} + C_{33}^{(k)} W_p^{(k)} \frac{\partial \beta_p^{(k)}}{\partial z} \right] \delta W_{\bar{p}}^{(k)} \frac{\partial \beta_{\bar{p}}^{(k)}}{\partial z} + \\
& + \left[G_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial y} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)} \right) \right] \delta \left(\frac{\partial U_{1l}^{(k)}}{\partial y} f_{1l}^{(k)} + \frac{\partial U_{2l}^{(k)}}{\partial x} f_{2l}^{(k)} \right) + \\
& + \left[G_{13}^{(k)} \left(U_{1l}^{(k)} \frac{\partial f_{1l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial x} \beta_p^{(k)} \right) \right] \delta \left(U_{1l}^{(k)} \frac{\partial f_{1l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial x} \beta_p^{(k)} \right) + \\
& + \left. \left[G_{23}^{(k)} \left(U_{2l}^{(k)} \frac{\partial f_{2l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial y} \beta_p^{(k)} \right) \right] \delta \left(U_{2l}^{(k)} \frac{\partial f_{2l}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W_p^{(k)}}{\partial y} \beta_p^{(k)} \right) \right\} dt dz dS . \quad (1.4)
\end{aligned}$$

Вариация кинетической энергии может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta T^{(k)} = & - \iint_S \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^{(k)} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[(\ddot{U}_{1l}^{(k)} f_{1l}^{(k)}) \delta (U_{1l}^{(k)} f_{1l}^{(k)}) + (\ddot{U}_{2l}^{(k)} f_{2l}^{(k)}) \delta (U_{2l}^{(k)} f_{2l}^{(k)}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (\ddot{W}_p^{(k)} \beta_p^{(k)}) \delta (W_{\bar{p}}^{(k)} \beta_{\bar{p}}^{(k)}) \right] dt - \right. \\
& \left. - [(\dot{U}_{1l}^{(k)} f_{1l}^{(k)}) \delta (U_{1l}^{(k)} f_{1l}^{(k)}) + (\dot{U}_{2l}^{(k)} f_{2l}^{(k)}) \delta (U_{2l}^{(k)} f_{2l}^{(k)}) + (\dot{W}_p^{(k)} \beta_p^{(k)}) \delta (W_{\bar{p}}^{(k)} \beta_{\bar{p}}^{(k)})] \Big|_{t_1}^{t_2} \right\} dz dS . \quad (1.5)
\end{aligned}$$

Искомые функции в плане конструкции по оси X представляются линейными, по оси Y тригонометрическими функциями.

$$\begin{aligned}
U_{1l}^{(k)}(x, y, t) &= (U_{1l1}^{(k)} f_{u1}^{(k)}(x) + U_{1l2}^{(k)} f_{u2}^{(k)}(x)) \sin \frac{\pi n y}{b} e^{-i\omega t} ; \\
U_{2l}^{(k)}(x, y, t) &= (U_{2l1}^{(k)} f_{u1}^{(k)}(x) + U_{2l2}^{(k)} f_{u2}^{(k)}(x)) \cos \frac{\pi n y}{b} e^{-i\omega t} ; \\
W_p^{(k)}(x, y, t) &= (W_{p1}^{(k)} f_{u1}^{(k)}(x) + W_{p2}^{(k)} f_{u2}^{(k)}(x)) \sin \frac{\pi n y}{b} e^{-i\omega t} ,
\end{aligned} \quad (1.6)$$

где $f_{u1}(x) = 1 - x/L$; $f_{u2}(x) = x/L$; L – длина конечного элемента вдоль оси X ; ω – частота свободных колебаний.

Уравнения движения конечного элемента получаются на основе следующего вариационного уравнения:

$$\delta \Pi - \delta T = 0 . \quad (1.7)$$

С учетом выражений для потенциальной (1.4) и кинетической (1.5) энергий, а также введенной аппроксимации (1.6), после соответствующих преобразований уравнения (1.7) получаем алгебраические уравнения движения конечного элемента

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[B11_{\bar{l}l}^{(k)} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} + TU1_{\bar{l}l}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) + B611_{\bar{l}l}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right] U_{1ls}^{(k)} + \\
& \quad + \left(B612_{\bar{l}l}^{(k)} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} f_{us}(x) - B12_{\bar{l}l}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \right) \left(\frac{\pi n}{b} \right) U_{2ls}^{(k)} + \\
& \quad + \left(CUW1_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} f_{u\bar{s}}(x) + SD1_{\bar{l}p}^{(k)} f_{us}(x) \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} \right) W_{ps}^{(k)} - \omega^2 BT1_{\bar{l}l}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) U_{1ls}^{(k)} \Big] dx = 0 ; \\
& \int_0^L \left[\left(B612_{\bar{l}l}^{(k)} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} f_{us}(x) - B12_{\bar{l}l}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \right) \left(\frac{\pi n}{b} \right) U_{1ls}^{(k)} + \right. \\
& \quad + \left. \left(B22_{\bar{l}l}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + TU2_{\bar{l}l}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) + B622_{\bar{l}l}^{(k)} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \right) U_{2ls}^{(k)} + \right. \\
& \quad + \left. \left(CUW2_{\bar{l}p}^{(k)} - SD2_{\bar{l}p}^{(k)} \right) \left(\frac{\pi n}{b} \right) f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) W_{ps}^{(k)} - \omega^2 BT2_{\bar{l}l}^{(k)} f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) U_{2ls}^{(k)} \right] dx = 0 ; \\
& \int_0^L \left[\left(SD1_{\bar{p}l}^{(k)} f_{w\bar{s}}(x) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} + CUW1_{\bar{p}l}^{(k)} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} f_{us}(x) \right) U_{1ls}^{(k)} + \right. \\
& \quad + \left. \left(CUW2_{\bar{p}l}^{(k)} - SD2_{\bar{p}l}^{(k)} \right) \left(\frac{\pi n}{b} \right) f_{u\bar{s}}(x) f_{us}(x) U_{2ls}^{(k)} + \right. \\
& \quad + \left. \left(\left(CC2_{\bar{p}p}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + ZZ_{\bar{p}p}^{(k)} \right) f_{w\bar{s}}(x) f_{ws}(x) + CC1_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{df_{w\bar{s}}(x)}{dx} \frac{df_{ws}(x)}{dx} \right) W_{ps}^{(k)} - \right. \\
& \quad \left. - \omega^2 ZT_{\bar{p}p}^{(k)} f_{w\bar{s}}(x) f_{ws}(x) W_{ps}^{(k)} \right] dx = 0 .
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Построенная система алгебраических уравнений движения равновесия конечного элемента записана относительно амплитудных значений тангенциальных перемещений вдоль оси X на внешних поверхностях слоя в узлах конечного элемента (в первом узле $U_{111}^{(k)}, U_{121}^{(k)}$; во втором узле $U_{112}^{(k)}, U_{122}^{(k)}$); амплитудных значений тангенциальных перемещений вдоль оси Y на внешних поверхностях слоя в узлах конечного элемента (в первом узле $U_{211}^{(k)}, U_{221}^{(k)}$; во втором узле $U_{212}^{(k)}, U_{222}^{(k)}$); амплитудных значений нормальных перемещений в узлах конечного элемента (в первом узле $W_{11}^{(k)}, W_{21}^{(k)}$; во втором узле $W_{12}^{(k)}, W_{22}^{(k)}$); амплитудных значений сдвиговых функций в направлении оси X (в первом узле $U_{131}^{(k)}$; во втором узле $U_{132}^{(k)}$); амплитудных значений сдвиговых функций в направлении оси Y (в первом узле $U_{231}^{(k)}$; во втором узле $U_{232}^{(k)}$); амплитудных значений функций обжатия (в первом узле $W_{31}^{(k)}$; во втором узле $W_{32}^{(k)}$). В общем для одного элемента имеем систему восемнадцати уравнений с восемнадцатью неизвестными. Расположение искоемых узловых амплитуд перемещений на внешних поверхно-

стях конечного элемента позволяет моделировать конструкцию не только в плане, но и по толщине.

В матричном виде уравнение для слоя с учетом торцевых граничных условий имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}^{(k)}] & [k_{12}^{(k)}] & [k_{13}^{(k)}] \\ [k_{21}^{(k)}] & [k_{22}^{(k)}] & [k_{23}^{(k)}] \\ [k_{31}^{(k)}] & [k_{32}^{(k)}] & [k_{33}^{(k)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_2^{(k)}\} \\ \{v_3^{(k)}\} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [m_{11}^{(k)}] & [m_{12}^{(k)}] & [m_{13}^{(k)}] \\ [m_{21}^{(k)}] & [m_{22}^{(k)}] & [m_{23}^{(k)}] \\ [m_{31}^{(k)}] & [m_{32}^{(k)}] & [m_{33}^{(k)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_2^{(k)}\} \\ \{v_3^{(k)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (1.9)$$

где $\{v_1^{(k)}\}$ – амплитудные значения перемещений на верхней поверхности слоя; $\{v_2^{(k)}\}$ – амплитудные значения перемещений на нижней поверхности слоя; $\{v_3^{(k)}\}$ – амплитудные значения сдвиговых функций и функций обжатия слоя.

Далее в статье будут исследованы свободные колебания трехслойной плиты. Для этого случая уравнения свободных колебаний будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} [k_{11}^{(1)}] & [k_{12}^{(1)}] & 0 & 0 & [k_{13}^{(1)}] & 0 & 0 \\ [k_{21}^{(1)}] & [k_{22}^{(1)}] + [k_{11}^{(2)}] & [k_{12}^{(2)}] & 0 & [k_{23}^{(1)}] & [k_{13}^{(2)}] & 0 \\ 0 & [k_{12}^{(2)}] & [k_{22}^{(2)}] + [k_{11}^{(3)}] & [k_{12}^{(3)}] & 0 & [k_{23}^{(2)}] & [k_{13}^{(3)}] \\ 0 & 0 & [k_{12}^{(3)}] & [k_{22}^{(3)}] & 0 & 0 & [k_{23}^{(3)}] \\ [k_{31}^{(1)}] & [k_{32}^{(1)}] & 0 & 0 & [k_{33}^{(1)}] & 0 & 0 \\ 0 & [k_{31}^{(2)}] & [k_{32}^{(2)}] & 0 & 0 & [k_{33}^{(2)}] & 0 \\ 0 & 0 & [k_{31}^{(3)}] & [k_{32}^{(3)}] & 0 & 0 & [k_{33}^{(3)}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [m_{11}^{(1)}] & [m_{12}^{(1)}] & 0 & 0 & [m_{13}^{(1)}] & 0 & 0 \\ [m_{21}^{(1)}] & [m_{22}^{(1)}] + [m_{11}^{(2)}] & [m_{12}^{(2)}] & 0 & [m_{23}^{(1)}] & [m_{13}^{(2)}] & 0 \\ 0 & [m_{12}^{(2)}] & [m_{22}^{(2)}] + [m_{11}^{(3)}] & [m_{12}^{(3)}] & 0 & [m_{23}^{(2)}] & [m_{13}^{(3)}] \\ 0 & 0 & [m_{12}^{(3)}] & [m_{22}^{(3)}] & 0 & 0 & [m_{23}^{(3)}] \\ [m_{31}^{(1)}] & [m_{32}^{(1)}] & 0 & 0 & [m_{33}^{(1)}] & 0 & 0 \\ 0 & [m_{31}^{(2)}] & [m_{32}^{(2)}] & 0 & 0 & [m_{33}^{(2)}] & 0 \\ 0 & 0 & [m_{31}^{(3)}] & [m_{32}^{(3)}] & 0 & 0 & [m_{33}^{(3)}] \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.10)$$

С учетом того, что плита разбивается на 100 конечных элементов, в этой задаче будет такое количество неизвестных: $101(3+1)*3+101*3*3=2121$. При наличии основания, которое моделируется слоем конечной мощности количество неизвестных незначительно возрастает $101*(4+1)*3+101*4*3=2727$. Возможности современных машин, а также наличие стандартных программ реализации уравнений (1.10) позволяет справиться с этой задачей.

При разбиении слоя на 64 подслоя количество неизвестных существенно увеличивается $101*(64*3+1)*3+101*64*3*3=116655$; при наличии основания $101*(64*4+1)*3+101*64*4*3=155439$. Для этого случая используем следующий алгоритм. Уравнения (1.9) для подслоя запишем так:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}^{(k)}] - \omega^2 [m_{11}^{(k)}] & [k_{12}^{(k)}] - \omega^2 [m_{12}^{(k)}] & [k_{13}^{(k)}] - \omega^2 [m_{13}^{(k)}] \\ [k_{21}^{(k)}] - \omega^2 [m_{21}^{(k)}] & [k_{22}^{(k)}] - \omega^2 [m_{22}^{(k)}] & [k_{23}^{(k)}] - \omega^2 [m_{23}^{(k)}] \\ [k_{31}^{(k)}] - \omega^2 [m_{31}^{(k)}] & [k_{32}^{(k)}] - \omega^2 [m_{32}^{(k)}] & [k_{33}^{(k)}] - \omega^2 [m_{33}^{(k)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_2^{(k)}\} \\ \{v_3^{(k)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} [K_{11}^{(k)}] & [K_{12}^{(k)}] & [K_{13}^{(k)}] \\ [K_{21}^{(k)}] & [K_{22}^{(k)}] & [K_{23}^{(k)}] \\ [K_{31}^{(k)}] & [K_{32}^{(k)}] & [K_{33}^{(k)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_2^{(k)}\} \\ \{v_3^{(k)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \quad (1.11)$$

Амплитудные значения сдвиговых аналогов перемещений слоя являются внутренними, они не совмещаются с другими слоями при расчете слоистой конструкции. От них можно избавиться по процедуре, аналогичной широко известной суперэлементной технологии. Запишем вектор амплитудных значений сдвиговых аналогов перемещений слоя с использованием уравнений (1.11)

$$\{v_3^{(k)}\} = -[K_{33}^{(k)}]^{-1} [K_{31}^{(k)}] \{v_1^{(k)}\} - [K_{33}^{(k)}]^{-1} [K_{32}^{(k)}] \{v_2^{(k)}\},$$

далее уравнения (1.9) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{bmatrix} [[K_{11}^{(k)}] - [K_{13}^{(k)}][K_{33}^{(k)}]^{-1}[K_{31}^{(k)}]] & [[K_{12}^{(k)}] - [K_{13}^{(k)}][K_{33}^{(k)}]^{-1}[K_{32}^{(k)}]] \\ [[K_{21}^{(k)}] - [K_{23}^{(k)}][K_{33}^{(k)}]^{-1}[K_{31}^{(k)}]] & [[K_{22}^{(k)}] - [K_{23}^{(k)}][K_{33}^{(k)}]^{-1}[K_{32}^{(k)}]] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_2^{(k)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \quad (1.12)$$

Уравнения (1.12) запишем таким образом:

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}^{(k)}] & [\bar{K}_{12}^{(k)}] \\ [\bar{K}_{21}^{(k)}] & [\bar{K}_{22}^{(k)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1^{(k)}\} \\ \{v_2^{(k)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \quad (1.13)$$

Далее, соединяем соседние слои по два. Разрешающая система уравнений равновесия для них имеет вид аналогичный (1.11), но теперь $\{v_3^{(k)}\}$ – амплитудные значения перемещений на поверхности сопряжения двух рассматриваемых слоев. Редуцируем перемещения $\{v_3^{(k)}\}$, аналогично изложенной выше процедуре. Так повторяем до тех пор, пока не приходим к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{K}_{11}] & [\tilde{K}_{12}] \\ [\tilde{K}_{21}] & [\tilde{K}_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_1\} \\ \{v_{n+1}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (1.14)$$

где теперь $\{v_1^{(k)}\}$ – амплитудные значения перемещений на верхней поверхности пакета слоев; $\{v_{n+1}\}$ – амплитудные значения перемещений на нижней поверхности пакета слоев.

Частоты свободных колебаний получаем из системы (1.14) методом последовательного сгущения интервала поиска, используя в качестве начальных частоты, полученные по уравнениям (1.10).

Такой подход значительно снижает количество операций при решении разрешающей системы уравнений (существенно исключаются операции с нулями). Выгода его становится особенно очевидной при разбиении слоя на подслои (2, 4, 8, 16, 32, 64 и т.д.), а также если конструкция состоит из взаимно чередующихся одинаковых сло-

ев с разным направлением. Достоверность получаемых результатов подтверждается альтернативным расчетом по методике, излагаемой ниже.

§2. Построение варианта полуаналитического метода конечных элементов для исследования свободных колебаний с отысканием распределения искомым функций по толщине конструкции на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений (B2).

Введем следующую аппроксимацию искомым функций перемещений и напряжений в плане конечного элемента:

$$\begin{aligned}
U_1^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\varphi_1(x, t) u_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) u_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b}; \\
U_2^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\varphi_1(x, t) u_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) u_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b}; \\
U_3^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\varphi_1(x, t) w_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) w_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b}; \\
\sigma_{13}^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\varphi_1(x, t) \tau_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) \tau_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b}; \\
\sigma_{23}^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\varphi_1(x, t) \tau_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) \tau_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b}; \\
\sigma_{33}^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\varphi_1(x, t) \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) \sigma_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\varphi_1(x, t) = e^{-i\omega t}(1 - x/L)$; $\varphi_2(x, t) = e^{-i\omega t}(x/L)$; L – длина конечного элемента; $u_{11}^{(k)}(z)$, $u_{12}^{(k)}(z)$, $u_{21}^{(k)}(z)$, $u_{22}^{(k)}(z)$, $w_1^{(k)}(z)$, $w_2^{(k)}(z)$, $w^{(k)T} = \{w_1^{(k)}(z), w_2^{(k)}(z)\}$, $\tau_{21}^{(k)}(z)$, $\tau_{22}^{(k)}(z)$, $\sigma_1^{(k)}(z)$, $\sigma_2^{(k)}(z)$ – искомые функции распределения перемещений и напряжений по толщине в узлах конечного элемента.

Используя выражения для перемещений (2.1), находим деформации на основе известных соотношений Коши.

$$\begin{aligned}
e_{11}^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} u_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} u_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b}; \\
e_{22}^{(k)}(x, y, z, t) &= -\frac{\pi n}{b} \left(\varphi_1(x, t) u_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) u_{22}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b}; \\
e_{33}^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\varphi_1(x, t) \frac{\partial w_1^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x, t) \frac{\partial w_2^{(k)}(z)}{\partial z} \right) \sin \frac{\pi n y}{b}; \\
2e_{23}^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\varphi_1(x, t) \frac{\partial u_{21}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x, t) \frac{\partial u_{22}^{(k)}(z)}{\partial z} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi n}{b} \left(\varphi_1(x, t) w_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) w_2^{(k)}(z) \right) \right) \cos \frac{\pi n y}{b};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2e_{13}^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\varphi_1(x, t) \frac{\partial u_{11}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x, t) \frac{\partial u_{12}^{(k)}(z)}{\partial z} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} w_1^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} w_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b}; \\
2e_{12}^{(k)}(x, y, z, t) &= \left(\frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x, t) u_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) u_{12}^{(k)}(z)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} u_{21}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} u_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b}.
\end{aligned}$$

Напряжения и деформации связаны следующими соотношениями:

$$\sigma_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)} e_{11}^{(k)} + B_{12}^{(k)} e_{22}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}; \quad \sigma_{22}^{(k)} = B_{21}^{(k)} e_{11}^{(k)} + B_{22}^{(k)} e_{22}^{(k)} + B_{23}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)};$$

$$B_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} = B_{13}^{(k)} e_{11}^{(k)} + B_{23}^{(k)} e_{22}^{(k)} + e_{33}^{(k)}; \quad \sigma_{23}^{(k)} = G_{23}^{(k)} 2e_{23}^{(k)}; \quad \sigma_{13}^{(k)} = G_{13}^{(k)} 2e_{13}^{(k)}; \quad \sigma_{12}^{(k)} = G_{12}^{(k)} 2e_{12}^{(k)}.$$

Разрешающую систему уравнений и соответствующие граничные условия получим на основе вариационного уравнения

$$\delta R^{(k)} - \delta T^{(k)} = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\delta R^{(k)} &= \iint_S \int_{a_{k-1} t_1}^{a_k t_2} \left\{ \left[B_{11}^{(k)} \left(\frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} u_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} u_{12}^{(k)}(z) \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - B_{12}^{(k)} \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x, t) u_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) u_{22}^{(k)}(z)) + B_{13}^{(k)} (\varphi_1(x, t) \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) \sigma_2^{(k)}(z)) \right] \sin \frac{\pi n y}{b} \right\} \times \\
&\quad \times \delta \left(\left(\frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} u_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} u_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) + \\
&\quad + \left[\left(B_{21}^{(k)} \left(\frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} u_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} u_{12}^{(k)}(z) \right) - B_{22}^{(k)} \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x, t) u_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) u_{22}^{(k)}(z)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{23}^{(k)} (\varphi_1(x, t) \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) \sigma_2^{(k)}(z)) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right] \times \\
&\quad \times \delta \left(-\frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x, t) u_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x, t) u_{22}^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) + \\
&\quad + \left[G_{12}^{(k)} \left(\frac{\pi n}{b} \varphi_1(x, t) u_{11}^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x, t) u_{12}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} u_{21}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} u_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b} \right] \times \\
&\quad \times \delta \left(\left(\frac{\pi n}{b} \varphi_1(x, t) u_{11}^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x, t) u_{12}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} u_{21}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} u_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(\varphi_1(x,t)\sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)\sigma_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b} \right] \delta \left(\left(\varphi_1(x,t) \frac{\partial w_1^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x,t) \frac{\partial w_2^{(k)}(z)}{\partial z} \right) \sin \frac{\pi ny}{b} \right) + \\
& + \left[\left(B_{13}^{(k)} \left(\frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial x} u_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x,t)}{\partial x} u_{12}^{(k)}(z) \right) - B_{23}^{(k)} \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x,t) u_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t) u_{22}^{(k)}(z)) + \right. \right. \\
& + \left. \left(\varphi_1(x,t) \frac{\partial w_1^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x,t) \frac{\partial w_2^{(k)}(z)}{\partial z} \right) - B_{33}^{(k)} (\varphi_1(x,t)\sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)\sigma_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b} \right] \times \\
& \quad \times \delta \left((\varphi_1(x,t)\sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)\sigma_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b} \right) + \\
& + \left[(\varphi_1(x,t)\tau_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)\tau_{22}^{(k)}(z)) \cos \frac{\pi ny}{b} \right] \delta \left(\varphi_1(x,t) \frac{\partial u_{21}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x,t) \frac{\partial u_{22}^{(k)}(z)}{\partial z} + \right. \\
& \quad + \left. \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x,t)w_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)w_2^{(k)}(z)) \cos \frac{\pi ny}{b} \right) + \\
& + \left[\left(\varphi_1(x,t) \frac{\partial u_{21}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x,t) \frac{\partial u_{22}^{(k)}(z)}{\partial z} + \frac{\pi n}{b} \varphi_1(x,t)w_1^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x,t)w_2^{(k)}(z) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\varphi_1(x,t)\tau_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)\tau_{22}^{(k)}(z)) / G_{23}^{(k)} \right) \cos \frac{\pi ny}{b} \right] \times \\
& \quad \times \delta \left((\varphi_1(x,t)\tau_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)\tau_{22}^{(k)}(z)) \cos \frac{\pi ny}{b} \right) + \\
& + \left[(\varphi_1(x,t)\tau_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)\tau_{12}^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b} \right] \delta \left(\varphi_1(x,t) \frac{\partial u_{11}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x,t) \frac{\partial u_{12}^{(k)}(z)}{\partial z} + \right. \\
& \quad + \left. \frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial x} w_1^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x,t)}{\partial x} w_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi ny}{b} + \\
& + \left[(\varphi_1(x,t) \frac{\partial u_{11}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x,t) \frac{\partial u_{12}^{(k)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial x} w_1^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x,t)}{\partial x} w_2^{(k)}(z) - \right. \\
& \quad \left. - (\varphi_1(x,t)\tau_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)\tau_{12}^{(k)}(z)) / G_{13}^{(k)} \right) \sin \frac{\pi ny}{b} \right] \times \\
& \quad \times \delta \left((\varphi_1(x,t)\tau_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t)\tau_{12}^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi ny}{b} \right) \Big\} dt dz dS
\end{aligned}$$

– вариация функционала Рейсснера;

$$\begin{aligned}
\delta T^{(k)} = & - \iint_S \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_1(x,t)}{\partial t^2} u_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial^2 \varphi_2(x,t)}{\partial t^2} u_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right] \times \right. \\
& \times \delta \left(\left(\varphi_1(x,t) u_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t) u_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) + \\
& + \left(\left(\frac{\partial^2 \varphi_1(x,t)}{\partial t^2} u_{21}^{(k)}(z) + \frac{\partial^2 \varphi_2(x,t)}{\partial t^2} u_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b} \right) \times \\
& \times \delta \left(\left(\varphi_1(x,t) u_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t) u_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b} \right) + \\
& + \left(\left(\frac{\partial^2 \varphi_1(x,t)}{\partial t^2} w_1^{(k)}(z) + \frac{\partial^2 \varphi_2(x,t)}{\partial t^2} w_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) \times \\
& \times \delta \left(\left(\varphi_1(x,t) w_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t) w_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) \Big] dt + \\
& + \rho^{(k)} \left[\left(\left(\frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial t} u_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x,t)}{\partial t} u_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) \times \right. \\
& \times \delta \left(\left(\varphi_1(x,t) u_{11}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t) u_{12}^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) + \\
& + \left(\left(\frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial t} u_{21}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x,t)}{\partial t} u_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b} \right) \times \\
& \times \delta \left(\left(\varphi_1(x,t) u_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t) u_{22}^{(k)}(z) \right) \cos \frac{\pi n y}{b} \right) + \\
& + \left(\left(\frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial t} w_1^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x,t)}{\partial t} w_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) \times \\
& \left. \times \delta \left(\left(\varphi_1(x,t) w_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x,t) w_2^{(k)}(z) \right) \sin \frac{\pi n y}{b} \right) \right] \Bigg|_{t_1}^{t_2} \Big\} dz dS
\end{aligned}$$

– вариация кинетической энергии.

Разрешающая система уравнений для одного конечного элемента имеет следующий вид:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -k_{01} & \frac{1}{G_{13}^{(k)}} k_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} k_{00} & 0 & \frac{1}{G_{23}^{(k)}} k_{00} & 0 \\ -B_{15}^{(k)} k_{00} & \frac{\pi n}{b} B_{25}^{(k)} k_{00} & 0 & 0 & 0 & B_{33}^{(k)} k_{00} \\ B_{11}^{(k)} k_{11} + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 G_{12}^{(k)} - \rho^{(k)} \omega^2 k_{00} & \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} k_{01} - B_{12}^{(k)} k_{10}) & 0 & 0 & 0 & B_{13}^{(k)} k_{10} \\ \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} k_{01} - B_{12}^{(k)} k_{10}) & G_{12}^{(k)} k_{11} + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 B_{22}^{(k)} - \rho^{(k)} \omega^2 k_{00} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} B_{23}^{(k)} k_{00} \\ 0 & 0 & -\rho^{(k)} \omega^2 k_{00} & k_{10} & \frac{\pi n}{b} k_{00} & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccccc} k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} u_1^{(k)}(z) \\ u_2^{(k)}(z) \\ w^{(k)}(z) \\ \tau_1^{(k)}(z) \\ \tau_2^{(k)}(z) \\ \sigma^{(k)}(z) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]. \quad (2.2)$$

$$\text{Здесь } k_{00} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}; \quad k_{10} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}; \quad k_{11} = \begin{bmatrix} 1/l & -1/l \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix};$$

$$k_{01} = k_{10}^T; \quad u_1^{(k)T} = \{u_{11}^{(k)}(z), u_{12}^{(k)}(z)\}; \quad u_2^{(k)T} = \{u_{21}^{(k)}(z), u_{22}^{(k)}(z)\};$$

$$w^{(k)T} = \{w_1^{(k)}(z), w_2^{(k)}(z)\}; \quad \tau_1^{(k)T} = \{\tau_{11}^{(k)}(z), \tau_{12}^{(k)}(z)\};$$

$$\tau_2^{(k)T} = \{\tau_{21}^{(k)}(z), \tau_{22}^{(k)}(z)\}; \quad \sigma^{(k)T} = \{\sigma_1^{(k)}(z), \sigma_2^{(k)}(z)\}.$$

Далее, с использованием уравнений (2.2), формируем разрешающую систему дифференциальных уравнений для слоя с учетом кинематических граничных условий на контуре конструкции.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -K_{01} & \frac{1}{G_{13}^{(k)}} K_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} K_{00} & 0 & \frac{1}{G_{23}^{(k)}} K_{00} & 0 \\ -B_{15}^{(k)} K_{00} & \frac{\pi n}{b} B_{25}^{(k)} K_{00} & 0 & 0 & 0 & B_{33}^{(k)} K_{00} \\ B_{11}^{(k)} K_{11} + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 G_{12}^{(k)} - \rho^{(k)} \omega^2 K_{00} & \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} K_{01} - B_{12}^{(k)} K_{10}) & 0 & 0 & 0 & B_{13}^{(k)} K_{10} \\ \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} K_{01} - B_{12}^{(k)} K_{10}) & G_{12}^{(k)} K_{11} + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 B_{22}^{(k)} - \rho^{(k)} \omega^2 K_{00} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} B_{23}^{(k)} K_{00} \\ 0 & 0 & -\rho^{(k)} \omega^2 K_{00} & K_{10} & \frac{\pi n}{b} K_{00} & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1i}^{(k)}(z) \\ u_{2i}^{(k)}(z) \\ w_i^{(k)}(z) \\ \tau_{1i}^{(k)}(z) \\ \tau_{2i}^{(k)}(z) \\ \sigma_i^{(k)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\{u_{1i}^{(k)}(z)\}^T &= \{\dots, u_{1i}^{(k)}(z), \dots\}; \quad \{u_{2i}^{(k)}(z)\}^T = \{\dots, u_{2i}^{(k)}(z), \dots\}; \\
\{w_i^{(k)}(z)\}^T &= \{\dots, w_i^{(k)}(z), \dots\}; \quad \{\tau_{1i}^{(k)}(z)\}^T = \{\dots, \tau_{1i}^{(k)}(z), \dots\}; \\
\{\tau_{2i}^{(k)}(z)\}^T &= \{\dots, \tau_{2i}^{(k)}(z), \dots\}; \quad \{\sigma_i^{(k)}(z)\}^T = \{\dots, \sigma_i^{(k)}(z), \dots\},
\end{aligned}$$

где i – номер точки, в которой определяются искомые функции.

Вектор искомых функций может быть представлен таким образом:

$$\begin{pmatrix} \{u_{1i}^{(k)}\} \\ \{u_{2i}^{(k)}\} \\ \{w_i^{(k)}\} \\ \{\tau_{1i}^{(k)}\} \\ \{\tau_{2i}^{(k)}\} \\ \{\sigma_i^{(k)}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(J) \\ \mu_{i5}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(J) \\ \mu_{i6}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(J) \end{pmatrix} [C^{(k)}],$$

где $[C^{(k)}]^T = [C_1^{(k)} e^{z\beta_1^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{z\beta_j^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{z\beta_j^{(k)}}]$; $\beta_j^{(k)}$ – корни характеристического уравнения разрешающей системы дифференциальных уравнений, которые могут быть комплексными; $\mu_{i1}^{(k)}(j)$, $\mu_{i2}^{(k)}(j)$, $\mu_{i3}^{(k)}(j)$, $\mu_{i4}^{(k)}(j)$, $\mu_{i5}^{(k)}(j)$, $\mu_{i6}^{(k)}(j)$ – её собственные вектора; $C_j^{(k)}$ – постоянные интегрирования, определяемые из условий контакта слоев и условий на лицевых поверхностях в каждом узле сетки разбиения конструкции на конечные элементы; J – общее количество искомых функций в слое. Частоты свободных колебаний определяются методом последовательного сгущением интервала поиска. В качестве начальных используются частоты, полученные по модели с полиномиальной аппроксимацией искомых функций по толщине конструкции.

§3. Результаты числовых исследований.

Предлагаемые модели тестировались для случая шарнирного опирания по контуру путем сопоставлений результатов расчета, полученных по предлагаемым методикам и аналитической модели [26, 29]. Получено близкое совпадение результатов расчета. С целью сокращения объема статьи такой расчет не приводим.

В качестве исследовательской задачи рассмотрим свободные колебания трехслойной плиты с композитными слоями, со следующими физико-механическими ха-

раактеристиками: $E_1^{(1)} / E_2^{(1)} = 25 / 1$; $E_2^{(1)} = E_3^{(1)}$; $G_{12}^{(1)} / E_3^{(1)} = 0,5 / 1$; $G_{23}^{(1)} / E_3^{(1)} = 0,2 / 1$; $G_{13}^{(1)} = G_{12}^{(1)}$; $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{13}^{(1)} = \nu_{23}^{(1)} = 0,25$; $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)} = \rho$. Второй слой повернут на 90° . Толщина второго слоя равна сумме одинаковых толщин внешних слоев.

Плита квадратная в плане $a = b = L$ с соотношением $L / h = 5$. Опора на контуре при $Y = 0, Y = b$ шарнирно-подвижная, при $X = 0, X = a$ край свободный, такое опирание часто встречается в расчетных схемах мостовых конструкций. Расчеты проводились по предлагаемым полуаналитическим методикам с полиномиальной аппроксимацией искомых функций по толщине плиты (В1) и с аналитическим их отысканием (В2). По стороне в направлении оси X плита разбивалась на 100 элементов.

В табл. 1 приведены три низшие частоты колебания плиты со свободными внешними поверхностями. Они возникают при $n = 1$ в аппроксимации (1.6) ($\pi n y / b$).

Таблица 1

$\bar{\omega}^2 = \omega^2 (\rho h^2 / E_3^{(1)})$			
Номер частоты	Расчет по модели В1, с рассмотрением каждого слоя в рамках одного подслоя	Расчет по модели В1, когда каждый слой разбивается на 64 подслоя	Расчет по модели В2,
1	3,39394e-002	3,38903e-002	3,38885e-002
2	5,16716e-002	5,13323e-002	5,13305e-002
3	1,705426e-001	1,69176e-001	1,69176e-001

На рис 1. представлены их формы в таких колебаниях. (Рассматривать не только частоты, но и формы свободных колебаний очень важно. В частности, в работе [27] показано, что коэффициент динамики в вынужденных колебаниях существенно зависит не только от близости частот свободных и вынужденных колебаний, но и от степени совпадения формы распределения перемещений при статическом приложении нагрузки с распределением перемещений на соответствующей частоте свободных колебаний.). На левых частях рисунка показаны перемещения при $Y = b / 2$, на правых частях рисунка перемещения при $X = a$. Для удобства представления на рисунках максимальным считается перемещение равное $h * 0,3$.

На первой частоте плита совершает поперечные изгибные колебания, на второй – колебания кручения, на третьей изгибные колебания в плане плиты. Расчет, проведенный по двум рассматриваемым методикам, свидетельствуют о близком их соответствии. Для получения достоверных результатов по модели В1 достаточно расчета в рамках одного подслоя как для вычисления частот, так и для получения распределения перемещений.

Расчет по модели В1 с разбиением каждого слоя на 64 подслоя и по модели В2 выполнялся методом последовательного сгущения интервала поиска с использованием в качестве начальных частот, полученных по модели В1, с рассмотрением каждого слоя в рамках одного подслоя. Рисунки для трех вариантов расчета не отличаются. При разбиении каждого слоя на 64 подслоя результаты расчета по модели В1 стремятся к результатам расчета, полученным по модели В2, практически не отличаются (абсолютно совпадают при округлении до четырех значащих цифр), что является косвенным подтверждением их достоверности

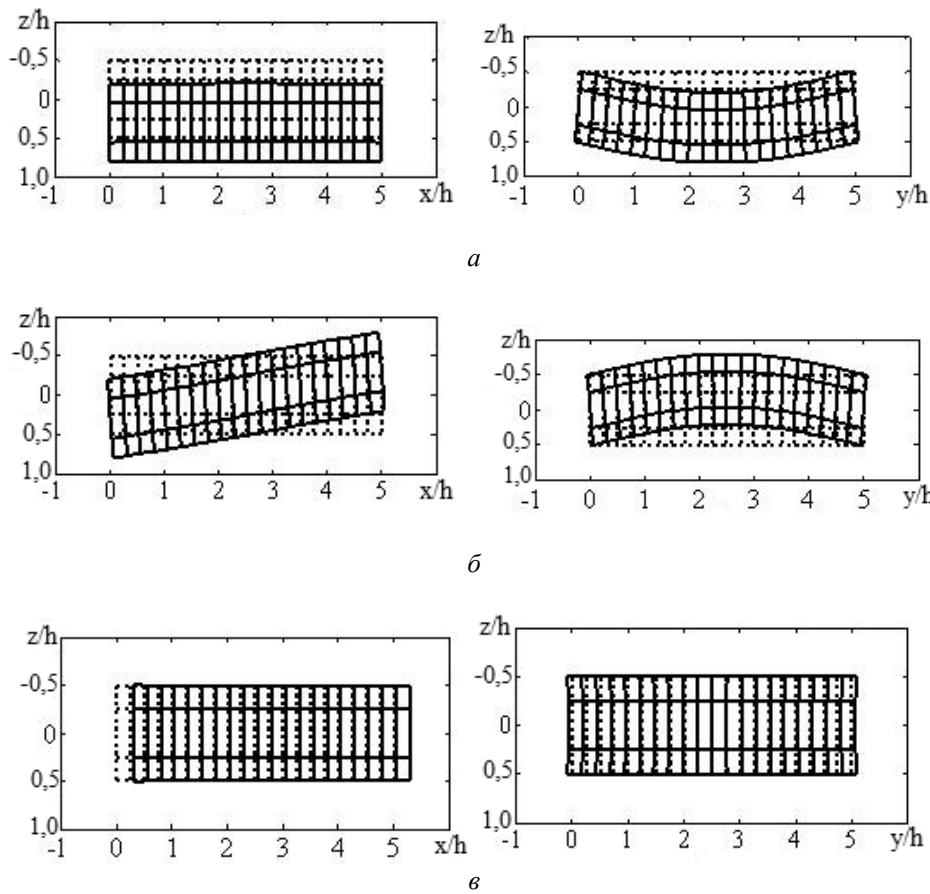


Рис. 1

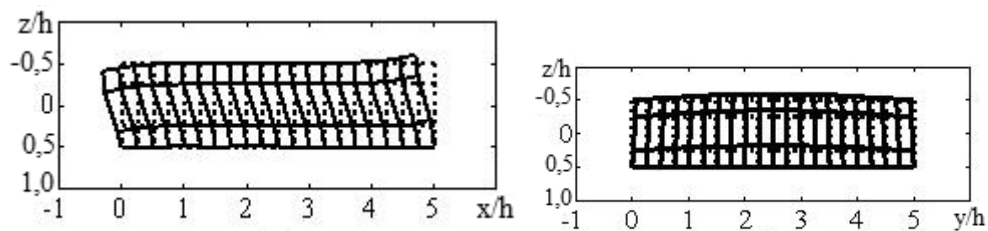
В табл. 2 представлены результаты расчета такой же конструкции, но с запрещенными перемещениями на нижней поверхности (расчетная модель дорожной одежды на мостах и скальных породах).

Таблица 2

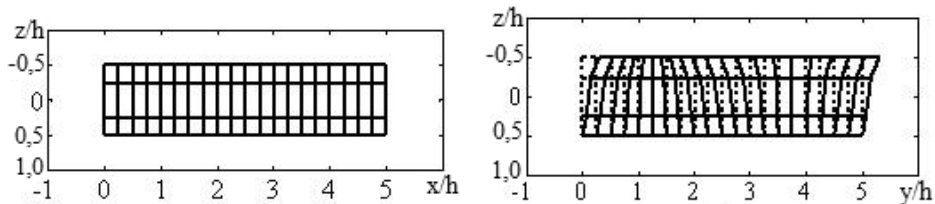
$\bar{\omega}^2 = \omega^2 (\rho h^2 / E_3^{(1)})$			
Номер частоты	Расчет по модели В1, с рассмотрением каждого слоя в рамках одного подслоя	Расчет по модели В1, когда каждый слой разбивается на 64 подслоя	Расчет по модели В2,
1	8,24258e-001	8,04085e-001	8,03912e-001
2	1,38257e+000	1,35819e+000	1,35801e+000
3	2,32489e+000	2,29406e+000	2,29387e+000

На рис. 2 представлены формы таких колебаний.

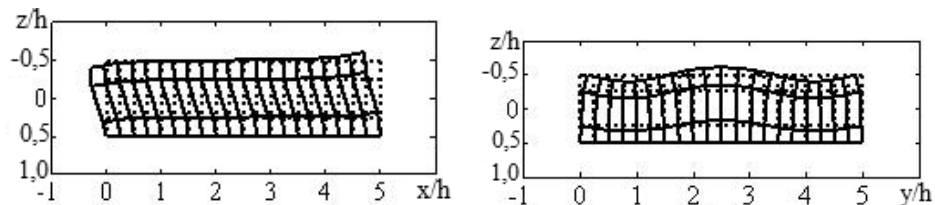
Колебания на первой низшей частоте происходят при $n=1$, на второй частоте при $n=2$, на третьей – при $n=3$. На первой и третьей частотах конструкция раскачивается в плане в направлении оси X с присутствием небольшого изгиба. На второй частоте плита совершает чисто планарные колебания в направлении оси Y . Если погрешность вычисления по модели В1 с рассмотрением каждого слоя в рамках одного подслоя в предыдущем случае не превышала одного процента, то в данном случае она несколько выше, но вполне приемлема. Расчет по модели В1 при разбиении каждого слоя на 64 подслоя и по модели В2 практически совпадает и подтверждает достоверность полученных результатов.



a



б



в

Рис.2

В табл. 3 представлены три низших частоты свободных колебаний выше рассматриваемой плиты на упругом основании, которое моделируется слоем конечной мощности со следующими физико-механическими характеристиками: $E^{(4)} = E_3^{(1)} / 6,07$; $\nu^{(4)} = 0,25$ $\rho^{(4)} = \rho$. Толщина основания равна толщине плиты. Нижняя поверхность основания жестко закреплена.

Таблица 3

$\bar{\omega}^2 = \omega^2(\rho h^2 / E_3^{(1)})$			
Номер частоты	Расчет по модели В1, когда каждый слой рассматривается в рамках одного подслоя	Расчет по модели В1, когда каждый слой разбивается на 64 подслоя	Расчет по модели В2,
1	1,67454e-001	1,60512e-001	1,60498e-001
2	1,72637e-001	1,61355e-001	1,61345e-001
3	2,08077e-001	1,89205e-001	1,89189e-001

На рис. 3 представлены формы таких колебаний (они возникают при $n = 1$).

Особенностью такого вида конструкции является то, что две первые частоты отличаются незначительно. При колебании такой плиты без основания (первый пример) плита на первой нижней частоте совершает изгибные колебания, а на второй – крутильные. В данном случае на первое место выходят крутильные колебания, изгибные колебания на втором месте. На третьей частоте происходят крутильные колебания, но с противоположным раскачиванием плиты в плане в сравнении с колебаниями на пер-

вой частоте. Погрешность модели В1 при рассмотрении каждого слоя и основания в рамках одного подслоя выше, чем в предыдущих случаях, но ее можно считать приемлемой в инженерных расчетах. Уточненный расчет по моделям В1 и В2 практически совпадает, что является подтверждением их достоверности.

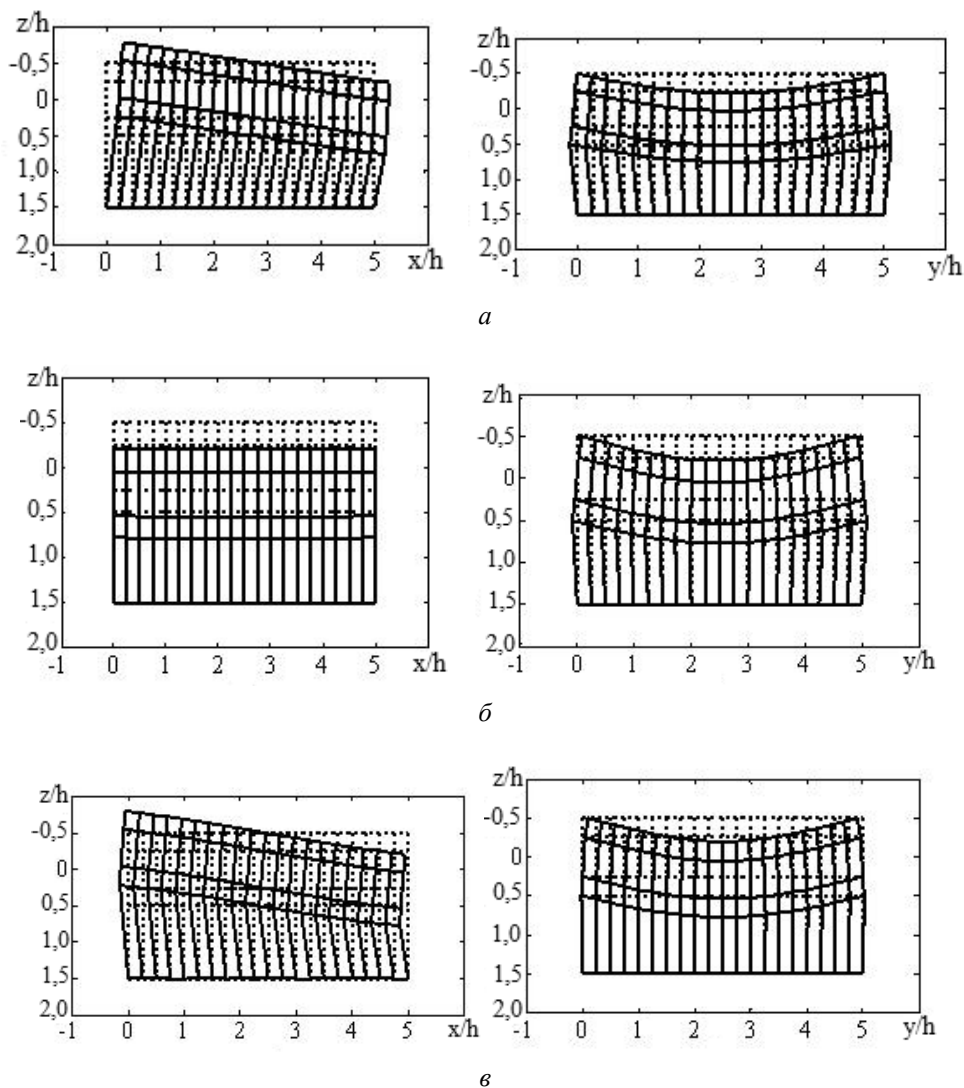


Рис.3

Для обоснования необходимости учета инерционных свойств основания в динамических задачах произведем расчет по модели В1 с рассмотрением каждого слоя в рамках одного подслоя, если $\rho^{(4)} = 0$. Квадрат первой частоты свободных колебаний $\bar{\omega}^2 = \omega^2 (\rho h^2 / E_3^{(1)})$ составил $2,07700e-001(\text{Гц})^2$. На ней плита совершает крутильные колебания. Квадрат второй частоты свободных колебаний составил $2,26554e-001(\text{Гц})^2$. На этой частоте плита совершает изгибные колебания. На третьей частоте ($\bar{\omega}^2 = 2,88945e-001(\text{Гц})^2$) плита совершает крутильные колебания. Пренебрежение учетом инерционных свойств материала основания может существенно завышать квадраты низших собственных частот. (Сравнивать со второй колонкой табл. 3).

Заклучение.

В данной статье разработано два варианта полуаналитического метода конечных элементов для исследования свободных колебаний слоистых композитных плит. Нижняя поверхность плиты может быть свободной, жестко закрепленной, опираться на слой конечной мощности. Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки. Они весьма точны. Недостатки (в варианте с полиномиальной аппроксимацией по толщине – значительное количество жесткостных характеристик и высокий порядок разрешающих уравнений; в варианте с аналитическим определением искомых функций по толщине плиты – необходимость отыскания корней характеристической системы уравнений и её собственных векторов) в свете современных возможностей вычислительной техники в рассматриваемом классе задач незначительны. В модели с полиномиальной аппроксимацией искомых функций по толщине конструкции при разбиении каждого слоя на 64 подслоя и в модели с аналитическим отысканием искомых функций по толщине частоты свободных колебаний находят методом последовательного сгущения интервала поиска, с определением начальных частот, полученных по модели с полиномиальной аппроксимацией искомых функций по толщине конструкции при рассмотрении каждого слоя в рамках одного слоя. Эти подходы дополняют друг друга, обосновывая достоверность получаемых результатов. Проведенные исследования показывают, что для достижения приемлемой точности при расчете по первому варианту полуаналитического метода конечных элементов достаточно каждый слой рассматривать в рамках одного подслоя, значения частот и распределения перемещений в таких колебаниях являются приемлемыми. Попытка расчета плиты на основании без учета его инерционных свойств привела к неприемлемым результатам.

РЕЗЮМЕ. В рамках просторової теорії пружності побудовано два варіанти напіваналітичного методу скінченних елементів стосовно дослідження частот вільних коливань і форм розподілу переміщень в них. Розрахунок двома методами служить доказом достовірності аналізу. Проаналізовано частоти вільних коливань і відповідних форм розподілу переміщень шаруватої композитної плити, коли дві протилежні кромки вільні, а дві інші шарнірно закріплені. Розглянуто плиту з вільною нижньою поверхнею, яка жорстко закріплена нижньою поверхнею і що спирається на пружну основу у вигляді шару скінченної потужності з урахуванням його інерційних властивостей. Продемонстровано високу точність запропонованих моделей в даних задачах. Вказано на неприпустимість нехтування інерційними властивостями основ.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл. – Київ: КНУБА, 2012. – 248 с.
2. *Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Київ: Наук. думка, 1986. – 172 с.
3. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
4. *Панков С.О., Мелешко В.В.* Изгибные колебания прямоугольной пластинки со свободными краями // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – 46. – С. 104 – 111.
5. *Aghababaei R., Reddy J.* Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibrations of plates // J. Sound and Vibr. – 2009. – 326, N1. – С. 227 – 286.
6. *Akgoz B., Civalek O.* Nonlinear vibration analysis of laminated plates resting on nonlinear two – parameters elastic foundations // Steel and Composite Structures. – 2011. – 11, N 5. – P. 403 – 421.
7. *Altukhov A.V., Fomenko M.V.* Elastic Vibrations of Sandwich Plates with Diaphragms at the Edges // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N2. – P. 179 – 186.
8. *Azarafza R.* Fabrication, experimental modal testing, and a numerical analysis of composite sandwich structures with a grid-stiffened core // Mechanics of Composite Materials. – 2018. – 54, N 4. – P. 537 – 544.
9. *Barta R.C., Qian L.F., Chen L.M.* Natural frequencies of thick square plates made of orthotropic, trigonal, monoclinic, hexagonal and triclinic materials // J. Sound and Vibr. – 2004. – 270, N 4 – 5. – P. 1074 – 1086.

10. *Bessaim A., et al.* A new third-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets // *J. Sandwich Struct. Mater.* – 2013. – **15**, N 6 – P. 671 – 703.
11. *Bespalova E.I.* Determining the Natural Frequencies an Elastic Parallelepiped by the Advanced Kantorovich – Vlasov Method // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 4. – P. 410 – 421.
12. *Bespalova E.I., Urusova G.P.* Three-Dimensional Analysis of the Lower Frequencies of a Cantilevered Anisotropic Parallelepiped // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 4. – P. 367 – 377.
13. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **60**, N 5. – P. 195 – 216.
14. *Carrera E., Brischetto S.* A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates // *Appl. Mech. Rev.* – 2009. – **62**, N 1. – P. 1 – 17.
15. *Gorman D.J., Singhal R.* Free vibration analysis of cantilever plates with step discontinuities in properties by the method of superposition // *J. Sound and Vibr.* – 2002. – **253**, N 3. – P. 631 – 652.
16. *Grigorenko Ya.M., Bergulev A.S., Yaremchenko S.N.* Numerical Solution of Bending Problems for Rectangular Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 1. – P. 81 – 94.
17. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
18. *Gupta A.P.* Vibration of rectangular orthotropic elliptic plates on quadratically varying thickness on elastic foundation // *Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust.* – 2004. – **126**, N 1. – P. 132 – 140.
19. *Güler K.* Circular Elastic Plate Resting on Tensionless Pasternak Foundation // *J. Eng. Mech., ASCE.* – 2004. – **130**, N 10. – P. 1251 – 1254.
20. *Guz' A.N., Shul'ga N.A.* Dynamics of laminated and fibrous composites // *Appl. Mech. Rev.* – 1992. – **45**, N 2. – P. 35 – 60.
21. *Houmat A.* Three-dimensional free vibration analysis of plates using the *h-p* version of the finite element method // *J. Sound and Vibr.* – 2006. – **290**, N 3–5. – P. 690 – 704.
22. *Karnaukhova T.V., Pyatetskaya E.V.* Resonant Vibrations of a Clamped Viscoelastic Rectangular Plate // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 8. – P. 904 – 917.
23. *Levchenko V.V.* Effect of Boundary Conditions on the Natural Frequencies and Vibration Modes of Piezoelectric Plates with Radially Cut Electrodes // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 2. – P.187-195.
24. *Liew K.M., Hung K.C., Lim K.M.* A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates // *Int. J. Solids and Struct.* – 1993. – **30**. – P. 3357 – 3379.
25. *Liu L., Bhattacharya K.* Wave propagation in a sandwich structure // *Int. J. Solids and Struct.* – 2009. – **46**, N 17. – P. 3290 – 3300.
26. *Marchuk A.V.* Determination of the Natural Frequencies of Vibration of Nonuniform Slabs // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N2. – P. 152 – 158.
27. *Marchuk A.V., Gnedash S.V., Shandyba D.O.* Free and forced vibrations of thick walled laminated anisotropic cylindrical shells with account for energy dissipation at frequencies close to resonance ones // *Composites: Mechanics, Computations, Applications.* – 2017. – **8**, N 3. – P. 239 – 65
28. *Marchuk A.V., Nishchota A.V.* On the Strain-Stress State of Locally Loaded Layered Composite Slabs // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 3. – P.315 – 330.
29. *Marchuk A.V., Piskunov V.G.* Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // *Mechanics of Composite Materials.* – 1999. – **35**, N 4. – P. 285 – 292.
30. *McGee O.G., Giaimo G.T.* Three-dimensional vibrations of cantilevered right triangular plates // *J. Sound and Vibr.* – 1992. – **159**, N 2. – P. 279 – 293.
31. *Nagino I.H., Mikami T., Mizusawa T.* Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – **317**, N 1–2. – P. 329 – 353.
32. *Qu Y., Meng G.* Three-dimensional elasticity solution for vibration analysis of functionally graded hollow and solid bodies of revolution. Part I: Theory // *Europ. J. Mech. A / Solids.* – 2014. – **44**. – P. 222 – 233.
33. *Qatu M.S.* *Vibration of Laminated Shells and Plates.* – Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2004. – 430 p.
34. *Rao M., Desai Y* Analytical solution for vibrations of laminated and sandwich plates using mixed theory // *Composite Struct.* – 2004. – **63**, N 3. – P.373 – 330.
35. *Shul'ga N.A.* Mixed Systems of Equations in Kirchhoff's Theory of the Transverse Vibrations of Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 194 – 202.

36. *Skosarenko Yu.V.* Free Vibrations of Ribbed Cylindrical Shell Interacting with an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 5. – P. 575 – 581.
37. *Shimpi R.P., Patel H.G.* Free vibrations of plate using two variable refined plate theory // *J. Sound and Vibr.* – 2006. – **296**. – P. 979 – 999.
38. *Soedel W.* *Vibrations of Shells and Plates.* – New York: Marcel Dekker, Inc., 2004. – 532 p.
39. *Stephen N.G.* The second spectrum of Timoshenko beam theory – Further assessment // *J. Sound and Vibr.* – 2006. – **292**, N 1 – 2. – P. 372 – 389.
40. *Stephen, N.G., Puchegger S.* On the valid frequency range of Timoshenko beam theory // *J. Sound and Vibr.* – 2006. – **297**, N 3 – 5. – P. 1082 – 1087.
41. *Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Reddy J.N.* Winkler-Pasternak Foundation Effect on the Static and Dynamic Analyses of Laminated Doubly-Curved and Degenerate Shells and Panels // *Composites. Part B. Engineering.* – 2014. – **57**, N 1. – P. 269 – 296.
42. *Tu T.M., Quoc N.H.* Finite element modeling for bending and vibration analysis of laminated and sandwich composite plates based on higher-order theory // *Computational Material Sci.* – 2010. – **49**, N 4. – P. 390 – 394.
43. *Woodcock Roland L., Bhat Rama B., Stiharu Ion G.* Effect of ply orientation on the in-plane vibration of single-layer composite plates // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – **312**, N 1 – 2. – P. 94 – 108.

Поступила 12.02.2019

Утверждена в печать 03.03.2020