

В. С. Ловейкин<sup>1</sup>, Ю. А. Ромасевич<sup>1</sup>, А. С. Хорошун<sup>2</sup>

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ  
ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА С МАХОВИКОМ. ЧАСТЬ 1**

<sup>1</sup>Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины,  
ул. Героев обороны, 12 в, Киев, Украина; e-mail: romasevichyuriy@ukr.net

<sup>2</sup>Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Петра Нестерова, 3, Киев, Украина; e-mail: center@inmech.kiev.ua

**Abstract:** The problem of optimal control of stabilization of inverted pendulum with a flywheel is stated. The criterion of the problem is presented in the form of the linear-quadratic integral functional. The constraint on the control is used as well. To solve the problem, the calculus of variations and numerical synthesis of the controller is used. For the first variant, the problem is isoperimetric. Its solution is found, and an algorithm was developed for taking into account the changing the duration of the control system motion. For the second variant, the initial problem is reduced to the problem of minimization of a nonlinear function, which is solved by the modified particle swarm method. A brief comparative analysis of the results is carried out and the advantages and disadvantages of optimal controls are given.

**Keywords:** inverted pendulum, optimal control, constraint, numerical optimization, controller.

**Введение.**

Задача стабилизации маятника с маховиком, которая была впервые поставлена и решена в работе [13], привлекает внимание многих исследователей. Она позволяет оценить эффективность разных методов синтеза управлений движением систем, в которых количество степеней свободы больше, чем число управляемых переменных (управлений). Такие системы довольно распространены в сферах робототехники, грузоподъемных машин, летательных аппаратов, электрических средств индивидуального передвижения (сигвеев, гиросборды) и так далее.

Для решения задачи были предложены различные формы управлений [3 – 6, 10, 14]. Все они являются нелинейными функциями фазовых координат системы, поскольку в этих исследованиях использована нелинейная модель перевернутого маятника с маховиком.

С позиций практической реализации управления важно учитывать ограничения на управление и фазовые координаты системы. Ограничения на управление в задаче стабилизации маятника с маховиком были использованы в работе [12].

В работе [2] получено уравнение Рикатти, из решения которого следует решение задачи оптимальной стабилизации системы. Критерием является линейно-квадратичный интегральный функционал, который включает вектор фазовых координат и управление. Решение задачи получено в численном виде.

Задача определения коэффициентов оптимального регулятора для стабилизации системы решена в работе [9]. Для этого использованы методы роя частиц и генетический алгоритм. С точки зрения необходимого времени для решения задачи первый метод оказался более эффективным.

В данном исследовании решена задача оптимального управления стабилизацией перевернутого маятника с маховиком. В постановке задачи использованы интеграль-

ный критерий и ограничение на управление, а решение задачи получено в виде программного управления и обратной связи.

### §1. Модель перевернутого маятника с маховиком.

Рассмотрим систему, динамическая модель которой представлена на рис. 1. В данном исследовании примем предположение о малом отклонении маятника от вертикали. Это предположение основано на том, что динамическую систему, которая представлена на рис. 1, можно перевести в окрестность положения равновесия системы (вертикальное расположение маятника). Например, если начальное положение системы описывается условиями  $\varphi(0) = \pi$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\omega(0) = 0$ , то ее можно перевести из этого положения путем «накачки» энергии [13].

После того, как система зашла в область, где  $\sin(\varphi) \approx \varphi$  появляется возможность с достаточной степенью точности использовать линейные уравнения ее движения. Отметим, что при этом должны быть учтены ограничения на управление, которые будут указаны в дальнейшем изложении.

При составлении системы дифференциальных уравнений движения системы также не будем учитывать силы трения и электромагнитную инерционность привода. Все эти предположения дают возможность описать движение перевернутого маятника с маховиком с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 \ddot{\varphi} + J \dot{\omega} = \alpha_2 \varphi; \\ J(\ddot{\varphi} + \dot{\omega}) = M, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\varphi$  – обобщенная координата угла отклонения маятника от вертикали;  $\omega$  – угловая скорость движения маховика маятника;  $g$  – ускорение свободного падения;  $l$  – расстояние от центра масс маятника до оси его поворота;  $L$  – эквивалентная длина маятника;  $J$  – момент инерции маховика и ротора электродвигателя;  $M$  – электромагнитный момент, создаваемый электродвигателем;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты, определяемые из следующих соотношений:  $\alpha_1 = J_p + m_w L^2$ ,  $\alpha_2 = (m_p l + m_w L)g$ ;  $m_p$  – масса маятника;  $m_w$  – масса маховика и электродвигателя;  $J_p$  – момент инерции маятника. Точка над символом в уравнениях (1.1) и в последующем изложении означает дифференцирование по времени.

### §2. Постановка задачи оптимального управления.

Для того, чтобы выполнить постановку задачи оптимального управления необходимо задать краевые условия движения элементов системы. Предположим, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) маятник уже отклонен от вертикали на угол  $\varphi_0$  и имеет угловую скорость  $\dot{\varphi}_0$ , а маховик вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ :

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0, \omega(0) = \omega_0; \\ \varphi(T) = 0, \dot{\varphi}(T) = 0, \omega(T) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $T$  – длительность управляемого режима движения системы.

Из краевых условий (2.1) следует, что управление движением системы должно переводить ее из точки фазового пространства  $\Phi = [\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \omega_0]^T$  в начало координат.

Существует бесконечное множество таких управлений, которые удовлетворяют условия (2.1). Из этого множества необходимо выбрать одно, которое бы удовлетво-

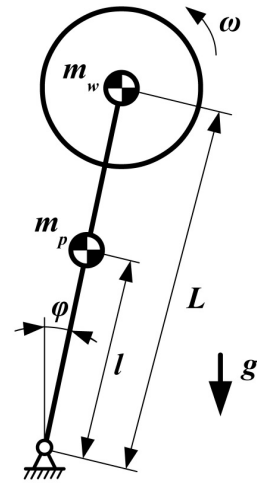


Рис. 1

ряло условие минимизации оптимизационного критерия. В рамках данного исследования он представляет собой переменные электрические потери в двигателе постоянного тока независимого возбуждения  $E$  (предполагается, что такой двигатель приводит в движение маховик). Минимизация такого критерия позволит управлять движением системы в энергетически-эффективном режиме, что особенно важно при ограниченной емкости источника питания (как правило, аккумуляторной батареи). С учетом выражения, которое описывает электромагнитный момент двигателя постоянного тока независимого возбуждения, а также системы уравнений (1.1), оптимизационный критерий  $E$  можем представить в следующем виде:

$$E = \frac{R}{c^2 F^2} \int_0^T ((J - \alpha_1)\ddot{\varphi} + \alpha_2 \dot{\varphi})^2 dt \rightarrow \min, \quad (2.2)$$

где  $R$  – сопротивление якоря двигателя;  $c$  – коэффициент двигателя, определяемый его конструкцией;  $F$  – постоянный магнитный поток двигателя.

Проверка критерия (2.2) на тип экстремума по условию Лежандра позволяет определить, что он может достигать минимума. Действительно, всегда выполняется усиленное условие Лежандра:

$$\frac{\partial^2 ((J - \alpha_1)\ddot{\varphi} + \alpha_2 \dot{\varphi})^2}{\partial \ddot{\varphi}^2} = 2(J - \alpha_1)^2 > 0. \quad (2.3)$$

Практическая реализация оптимального управления связана с учетом ограничений на управление. В данном исследовании ограничения на управление представляются в классическом виде:

$$|M| \leq M_{\max}, \quad (2.4)$$

где  $M_{\max}$  – максимальный электромагнитный момент двигателя.

Для решения задачи (1.1), (2.1), (2.2), (2.4) используем вариационное исчисление [1], а также численный метод оптимизации [11].

### §3. Вариационный подход.

Отметим, в критерий (2.2) входит лишь функция  $\varphi(t)$  и ее вторая производная по времени. Для остановки маховика к концу управляемого режима движения маятника  $\omega(T) = 0$  необходимо это условие выразить через функцию  $\varphi(t)$ . Для этого из первого уравнения системы (1.1) найдем угловое ускорение маховика и проинтегрируем полученное по времени:

$$\int_0^T \dot{\omega} dt = \frac{\alpha_2}{J} \int_0^T \varphi dt - \frac{\alpha_1}{J} \int_0^T \dot{\varphi} dt. \quad (3.1)$$

Проведя последующие преобразования выражения (3.1) и учитывая краевые условия (2.1), получаем

$$\int_0^T \varphi dt = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \dot{\varphi}_0 - \frac{J}{\alpha_2} \omega_0. \quad (3.2)$$

Таким образом, на экстремаль функционала (2.2) налагается изопериметрическое условие (3.2). Для того, чтобы учесть его в расчетах введем в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$L = ((J - \alpha_1)\ddot{\varphi} + \alpha_2 \dot{\varphi})^2 + \lambda \varphi, \quad (3.3)$$

где  $\lambda$  – неопределенный множитель Лагранжа.

Необходимым условием минимума интегрального критерия (1.3) при учете изопериметрического условия (3.3) является уравнение Эйлера – Пуассона, которое записывается следующим образом:

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial^i L}{\partial \varphi^i} = \overset{IV}{\varphi} + 2\Omega^2 \dot{\varphi} + \Omega^4 \varphi = A, \quad (3.4)$$

где  $\Omega$  – частота собственных колебаний маятника, определяемая следующим образом  $\Omega = \sqrt{\alpha_2/(J - \alpha_1)}$ ;  $A$  – коэффициент, который включает неизвестный множитель Лагранжа  $A = (-\lambda)/(J - \alpha_1)^2$ .

Решение неоднородного дифференциального уравнения (3.4) представим в таком виде:

$$\varphi = (C_1 + C_2 t) \cos(\Omega t) + (C_3 + C_4 t) \sin(\Omega t) + \frac{A}{\Omega^4}, \quad (3.5)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  – постоянные интегрирования. Для расчета  $C_1, \dots, C_4$  и коэффициента  $A$  используем краевые условия (2.1), а также изопериметрическое условие (3.2): они формируют систему линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы представляется в таком виде:

$$\begin{aligned} C_1 &= (\Omega(\dot{\varphi}_0 T(\Omega^2 \alpha_1 + \alpha_2) + (\Omega^2 T^2 - 2)\alpha_2 \varphi_0 + J\Omega^2 T \omega_0 + 2\alpha_2 \varphi_0 \cos(\Omega T)) + \\ &+ (\dot{\varphi}_0(\Omega^2 \alpha_1 - \alpha_2) + \Omega^2(T\alpha_2 \varphi_0 + J\omega_0)) \sin(\Omega T))(\Omega\alpha_2(\Omega^2 T^2 - 4 + 4\cos(\Omega T) + \Omega T \sin(\Omega T)))^{-1}, \\ C_2 &= (-\Omega(\dot{\varphi}_0 T(2\Omega^2 \alpha_1 + 3\alpha_2) + 2(\Omega^2 T^2 - 1)\alpha_2 \varphi_0 + 2J\Omega^2 T \omega_0) + 2\Omega T(\dot{\varphi}_0(\Omega^2 \alpha_1 + \alpha_2) + \\ &+ J\Omega^2 \omega_0) \cos(\Omega T) + \Omega\alpha_2(\dot{\varphi}_0 T - 2\varphi_0) \cos(2\Omega T) + 2(\dot{\varphi}_0 \Omega^2 \alpha_1 + 3\dot{\varphi}_0 \alpha_2 + J\Omega^2 \omega_0) \sin(\Omega T) - \\ &- (\dot{\varphi}_0(\Omega^2 \alpha_1 + 3\alpha_2) + \Omega^2(T\alpha_2 \varphi_0 + J\omega_0)) \sin(2\Omega T))(\alpha_2(2\Omega^3 T^3 - 9\Omega T + \Omega T(8\cos(\Omega T) - \\ &- 4\sin(2\Omega T) + \cos(2\Omega T) + 8\sin(\Omega T)))^{-1}, \\ C_3 &= (2\Omega(\dot{\varphi}_0 T(-3\alpha_2 + \Omega^2(\alpha_1 + T^2 \alpha_2)) + (T^2 \Omega^2 - 1)\alpha_2 \varphi_0 + J\Omega^2 T \omega_0) - 2T\Omega(\dot{\varphi}_0 \Omega^2 \alpha_1 - \\ &- 3\dot{\varphi}_0 \alpha_2 + J\Omega^2 \omega_0) \cos(\Omega T) + 2\Omega\alpha_2 \varphi_0 \cos(2\Omega T) - 2(\dot{\varphi}_0 \Omega^2 \alpha_1 - \dot{\varphi}_0 \alpha_2 + J\Omega^2 \omega_0) \sin(\Omega T) + \\ &+ (\dot{\varphi}_0(\Omega^2 \alpha_1 - \alpha_2) + \Omega^2(T\alpha_2 \varphi_0 + J\omega_0)) \sin(2\Omega T))(\Omega\alpha_2(2T^3 \Omega^3 - 9\Omega T + \Omega T(8\cos(\Omega T) + \\ &+ \cos(2\Omega T)) + 8\sin(\Omega T) - 4\sin(2\Omega T)))^{-1}, \\ C_4 &= (\dot{\varphi}_0 \alpha_2(3 - T^2 \Omega^2 - 4\cos(\Omega T) + \cos(2\Omega T)) + \Omega(\dot{\varphi}_0 T(\Omega^2 \alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_2 \varphi_0 + J\Omega^2 T \omega_0 + \\ &+ \alpha_2(\dot{\varphi}_0 T - 2\varphi_0) \cos(\Omega T)) \sin(\Omega T) - (\dot{\varphi}_0(\Omega^2 \alpha_1 + \alpha_2) + \Omega^2(T\alpha_2 \varphi_0 + J\omega_0) \sin^2(\Omega T))(\alpha_2 \times \\ &\times (\Omega T - \sin(\Omega T))(\Omega^2 T^2 - 4 + 4\cos(\Omega T) + \Omega T \sin(\Omega T)))^{-1}, \\ A &= \Omega^3(\Omega(\dot{\varphi}_0 T(\Omega^2 \alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_2 \varphi_0 + J\Omega^2 T \omega_0 - 2\alpha_2 \varphi_0 \cos(\Omega T)) + (\dot{\varphi}_0 \Omega^2 \alpha_1 - \dot{\varphi}_0 \alpha_2 + \\ &+ J\Omega^2 \omega_0) \sin(\Omega T))(\alpha_2(T^2 \Omega^2 - 4 + 4\cos(\Omega T) + \Omega T \sin(\Omega T)))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Следующим шагом в решении задачи является нахождение угловой скорости маховика. Это важно с точки зрения реализации управления на практике: управляемым параметром в современных электроприводах может быть как угловая скорость, так и электромагнитный момент. Для определения  $\omega(t)$  необходимо проинтегрировать угловое ускорение маховика, полученное из первого уравнения системы (1.1). В результате получим:

$$\begin{aligned} \omega &= B + J^{-1} \Omega^{-4} (-A t \alpha_2 + \Omega^2 (-(C_2(\Omega^2 \alpha_1 - \alpha_2) + \Omega(C_3 + C_4 t)(\Omega^2 \alpha_1 + \alpha_2)) \cos(\Omega T) + \\ &+ (C_4(\alpha_2 - \Omega^2 \alpha_1) + \Omega(C_1 + C_2 t)(\Omega^2 \alpha_1 + \alpha_2)) \sin(\Omega T))), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $B$  – постоянная интегрирования, которую необходимо найти из начального условия (2.1). В результате решения этого алгебраического уравнения имеем

$$B = J^{-1}((C_2 + C_3)\Omega)\alpha_1 + \Omega^{-2}(C_3\Omega - C_2)\alpha_2 + \omega_0. \quad (3.8)$$

Таким образом, задача оптимального управления движением маятника решена. Полученный результат не дает возможности непосредственно учитывать ограничение (2.4). Для этой цели необходимо изменять длительность режима управления  $T$ . Аналитическое решение задачи нахождения такого минимального значения  $T_{\min}$ , при котором ограничение (2.4) не нарушается не представляется возможным в силу того, что при этом необходимо решать трансцендентные уравнения, которые имеют несколько корней. Проблема усложняется также необходимостью проверки ограничений в начале и конце управляемого режима движения системы. Возможным вариантом решения указанных проблем является использование алгоритма, который состоит в следующем:

1) задают значения параметров системы  $L, l, J, J_p, m_p, m_w$ , а также вектор начальных значений фазовых переменных  $\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \omega_0$ ;

2) задают значение  $T$  немного большим нуля (в рамках данного исследования 0,01 с) и численно находят значение максимального  $M_{\max T}$  и минимального  $M_{\min T}$  электромагнитных моментов электродвигателя на промежутке  $t \in [0, T]$ ;

3) если  $\max(M_{\max T}, -M_{\min T}) > M_{\max}$ , то увеличивают значение  $T$  на величину  $\Delta T$  (в рамках данного исследования принято  $\Delta T = 0,01$  с) до тех пор, пока не будет выполнено условие  $\max(M_{\max T}, -M_{\min T}) \leq M_{\max}$ .

Для иллюстрации работы алгоритма зададимся определенными значениями параметров динамической системы, которые занесены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Параметр	Значение
Эквивалентная длина маятника $L$ , м	$2,9 \cdot 10^{-1}$
Расстояние от центра масс маятника до оси его поворота $l$ , м	$2,6 \cdot 10^{-1}$
Момент инерции маховика и ротора электродвигателя $J$ , кгм <sup>2</sup>	$1,5 \cdot 10^{-3}$
Момент инерции маятника $J_p$ , кгм <sup>2</sup>	$4,2 \cdot 10^{-2}$
Масса маятника $m_p$ , кг	$3,0 \cdot 10^{-1}$
Масса маховика и электродвигателя $m_w$ , кг	$2,8 \cdot 10^{-1}$
Начальный угол отклонения маятника $\varphi_0$ , рад	$-1,5 \cdot 10^{-1}$
Начальная угловая скорость маятника $\dot{\varphi}_0$ , рад/с	$-1,5 \cdot 10^{-1}$
Начальная угловая скорость маховика $\omega_0$ , рад/с	0
Максимальный электромагнитный момент двигателя $M_{\max}$ , Нм	$6,0 \cdot 10^{-1}$

В результате работы алгоритма было найдено значение  $T_{\min} = 3,99$  с.

Для графического представления полученных результатов построим графики функций (рис. 2 и рис. 3). Серая точка на рис. 2 обозначает начало координат. Отметим влияние значений начальных фазовых координат на оптимальное управление. Например, при одновременном изменении знаков  $\varphi_0$  и  $\dot{\varphi}_0$  график электромагнитного момента двигателя (рис. 3) симметрично отображается относительно оси времени.

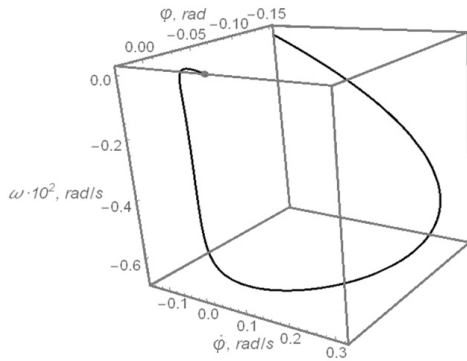


Рис. 2

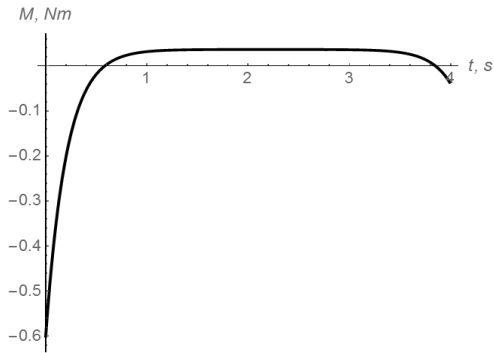


Рис. 3

#### §4. Численная оптимизация управления (синтез оптимального регулятора).

В предыдущем пункте найден закон оптимального программного управления. Однако, такой вид закона не учитывает текущее фазовое состояние объекта управления: управление (электромагнитный момент двигателя) есть функцией времени. Для того, чтобы учесть возможные воздействия, которые априори неизвестны и которые могут помешать попаданию системы в желаемое конечное состояние (2.1), необходимо синтезировать управление в виде обратной связи (оптимального регулятора). Первым этапом такого синтеза является задание формы оптимального закона управления

$$M = \begin{cases} A_0\omega + A_1\varphi + A_2\dot{\varphi}, & \text{если } |A_0\omega + A_1\varphi + A_2\dot{\varphi}| \leq M_{\max}; \\ M_{\max}, & \text{если } A_0\omega + A_1\varphi + A_2\dot{\varphi} > M_{\max}; \\ -M_{\max}, & \text{если } A_0\omega + A_1\varphi + A_2\dot{\varphi} < -M_{\max}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $A_0, A_1, A_2$  – коэффициенты, которые необходимо найти. Закон (4.1) можно рассматривать как нелинейную функцию фазового вектора  $\Phi$ , вектора коэффициентов  $\mathbf{A} = [A_0, A_1, A_2]^T$  и ограничения (2.4).

Для того, чтобы найти компоненты вектора  $\mathbf{A}$  будем рассматривать уравнения (1.1) в виде MISO-системы. При этом входными параметрами являются компоненты вектора  $\mathbf{A}$ , а выходная величина представлена в виде суммы:

$$Cr = \|\Phi(T)\| \cdot \psi + E \rightarrow \min, \quad (4.2)$$

где  $\psi$  – весовой коэффициент, который определяет важность достижения конечных условий (2.1). В рамках данного исследования это значение принято равным  $\psi = 10^6$ , поскольку при этом (в ходе работы алгоритма) сохраняется баланс между уменьшением значения исходного критерия  $E$  и обеспечением конечных условий (2.1). Численное значение критерия  $Cr$  (4.2) было найдено путем численного интегрирования уравнений (1.1) при учете управления (4.1).

Таким образом, мы свели задачу оптимального управления к задаче минимизации функции (4.2) с ограничением (2.5). Для ее решения используем модифицированный метод роя частиц (ME-PSO), который описан в работе [11]. Отметим, что метод ME-PSO относится к классу метаэвристических методов, которые успешно применяются для решения многих оптимизационных задач [7].

Число частиц в рое принято равным 5000, при работе алгоритма выполнено 20 итераций. Кроме того, примем, что длительность управляемого режима  $T_{\min} = 3,99$  с.

В результате решения задачи (4.2) получены следующие значения компонентов вектора  $\mathbf{A}$ :  $A_0 = 0,37$ ;  $A_1 = 171,98$ ;  $A_2 = 38,98$ . Графическое представление полученных результатов показано на рис. 4 и рис. 5.

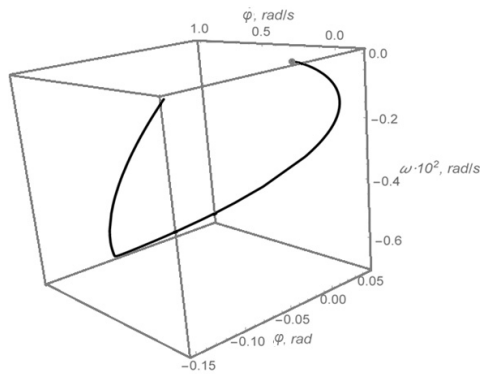


Рис. 4

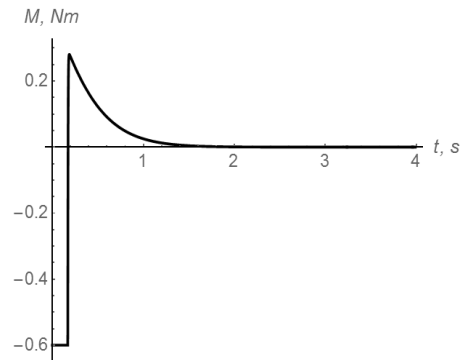


Рис. 5

В следующем разделе проведем короткий анализ полученных результатов.

### §5. Краткий сравнительный анализ результатов.

Для определения преимуществ и недостатков синтезированных оптимальных законов управления системой, которые получены в §3 и §4, выполним их сравнительный анализ. Для этого занесем в табл. 5.1 численные значения оценочных показателей, которые характеризуют найденные оптимальные законы управления. Для проведения более полного анализа все численные показатели рассчитаны для разных начальных условий фазового состояния маятника: 1)  $\varphi_0 = -0,15$  рад,  $\dot{\varphi}_0 = -0,15$  рад/с; 2)  $\varphi_0 = -0,15$  рад,  $\dot{\varphi}_0 = 0,15$  рад/с.

Таблица 5.1

Оценочный показатель	Вид управления	
	программное	оптимальный регулятор
Значение критерия оптимизации $E^*$ , $(\text{Нм})^2\text{с}^{-1}$	$3,66 \cdot 10^{-2}$	$7,70 \cdot 10^{-2}$
	$1,60 \cdot 10^{-2}$	$4,10 \cdot 10^{-2}$
Максимальное абсолютное значение угловой скорости маховика $ \omega_{\max} $ , рад/с	$6,78 \cdot 10^1$	$6,94 \cdot 10^1$
	$4,46 \cdot 10^1$	$4,08 \cdot 10^1$
Максимальное абсолютное значение угловой скорости маятника $ \dot{\varphi}_{\max} $ , рад/с	$3,16 \cdot 10^{-1}$	$1,00 \cdot 10^0$
	$3,04 \cdot 10^{-1}$	$8,24 \cdot 10^{-1}$
Максимальное абсолютное отклонение маятника от вертикали $ \varphi_{\max} ^{**}$ , рад	$2,32 \cdot 10^{-2}$	$4,47 \cdot 10^{-2}$
	$1,52 \cdot 10^{-2}$	$2,98 \cdot 10^{-2}$

\* приведены значения определенного интеграла, который входит в критерий  $E$ ;

\*\* указаны значения обратного к  $\varphi_0$  знака, что соответствует абсолютному значению перерегулирования угла отклонения маятника от вертикали.

В табл. 5.1 первая и вторая строчки соответствуют рассматриваемым вариантам начальных условий движения маятника. Отметим, что при одновременном изменении знаков  $\varphi_0$  и  $\dot{\varphi}_0$  оценочные показатели движения системы не изменяются.

Анализ данных, которые приведены в табл. 5.1, показывает преимущество программного закона управления, поскольку (нежелательные) оценочные показатели, которые ему соответствуют, меньше. Недостатки оптимального регулятора могут быть объяснены тем, что система относительно длительно находится под действием граничного управления  $M_{\max}$ . Это может быть результатом: 1) определения лишь локального минимума критерия (2.2) в задаче синтеза оптимального регулятора; 2) неэффективным представлением критерия (2.1) и конечных условий (2.2) в виде кри-

терия  $Cr$  (4.2). Во втором случае проблему можно решить с помощью использования одного из алгоритмов многокритериальной оптимизации.

Принципиальным преимуществом оптимального регулятора является учет фактического состояния системы. Это означает, что в случае действия какого-либо неучтенного в модели (1.1) фактора (например, трения) система будет отклоняться от экстремали. Однако, оптимальный регулятор позволит перевести систему в желаемое конечное состояние (2.1). При этом переход из любого фазового состояния будет происходить оптимально. Для оптимального программного управления утверждение относительно перехода системы в желаемое конечное состояние при действии неучтенных динамических факторов не истинно.

Кроме того, оптимальный регулятор позволяет уменьшить длительность управляемого режима движения системы без увеличения  $M_{\max}$ . Например, на рис. 6 и 7 приведены результаты синтеза оптимального регулятора движения системы, аналогичный тому, который был выполнен в §4. При этом  $T = 1,00$  с, другие параметры системы и алгоритма остались без изменений. В результате найдены следующие значения компонентов вектора  $A$ :  $A_0 = 0,56$ ;  $A_1 = 238,48$ ;  $A_2 = 37,36$ .

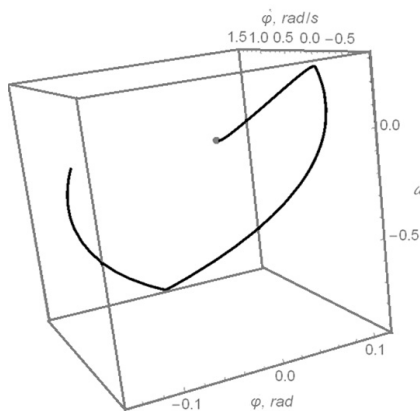


Рис. 6

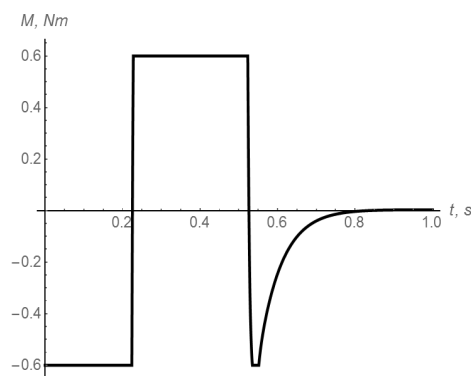


Рис. 7

Из рис. 7 видно, что большую часть времени управление находится на границах допустимой области. «Сильное» управление позволяет уменьшить длительность стабилизации системы. В пределе возможно найти такое граничное значение  $T$ , при котором задача (2.2) превращается в задачу оптимального быстродействия.

Кроме того, преимуществом численной оптимизации регулятора стабилизации системы является принципиальная возможность учета других ограничений, например, на угловую скорость маховика, угол отклонения маятника и другие, а также возможность учета нелинейных эффектов системы (например, использование исходных нелинейных уравнений движения системы, учет вязкого и сухого трения, введение в математическую модель движения динамической системы уравнений электропривода [8]). Эти вопросы будут исследованы в дальнейших работах.

#### Заключение.

В первой части исследования найдено два решения задачи оптимального управления стабилизацией перевернутого маятника с маховиком. Обоснованы критерий оптимизации, который отображает энергетические потери привода, и ограничение на управление. Задача представлена как вариационная с интегральным ограничением. Найдено ее аналитическое решение в виде программного управления. Разработан алгоритм нахождения минимальной длительности управляемого режима, который позволил учесть ограничение на управление системой.

Кроме того, исходная задача была сведена к задаче минимизации нелинейной функции, для решения которой был использован модифицированный метод роя частиц (ME-PSO). Решение задачи получено в виде обратной связи. Сравнение полученных оптимальных управлений (программного и в виде обратной связи) показало



преимущество программного управления. Приведены два возможных объяснения результатов сравнительного анализа, а также рекомендации по улучшению эффективности численного расчета оптимального регулятора.

Очевидно, что между оптимальными управлениями (программным и в виде обратной связи) существует связь, которую необходимо исследовать. Кроме того, выбранные в постановке задачи критерий и ограничение являются довольно частными, хотя и обоснованными. Дальнейшим направлением исследований является разработка комплексного критерия оптимизации и обобщение ограничений на фазовые координаты системы и управление, а также разработка алгоритмов решения задачи оптимального управления стабилизацией маятника с маховиком в нелинейной постановке.

**РЕЗЮМЕ.** Виконано постановку задачі оптимального керування стабілізацією перевернутого маятника з маховиком. Критерій задачі представлено у вигляді лінійно-квадратичного інтегрального функціоналу, використано також обмеження на керування. Для розв'язування задачі використано варіаційне числення і чисельний синтез регулятора. Для першого варіанту задача є ізопериметричною. Знайдено її розв'язок і розроблено алгоритм врахування тривалості керування рухом системи. Для другого варіанту вихідну задачу зведено до задачі мінімізації нелінійної функції, яку розв'язано з використанням модифікованого методу рою частинок. Проведено короткий порівняльний аналіз отриманих результатів та вказано переваги і недоліки оптимальних керувань.

1. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. – М.: Энергия, 1977. – 280 с.
2. Brevik P. Two-axis reaction wheel inverted pendulum. Thesis for Master of Science in Cybernetics and Robotics. – Trondheim: Norwegian University of Science and Technology, 2017. – 63 p.
3. Haddad N.K., Chemori A., Pena J.J., Belghith S. Stabilization of inertia wheel inverted pendulum by model reference adaptive IDA-PBC: From simulation to real-time experiments / 3rd Int. Conf. on Control, Engineering and Information Technology (CEIT) – Tlemcen. – 2015. – P. 1 – 6.
4. Herniandez V.M., Sira-Ramirez H. Generalized PI Control for swinging up and balancing the inertia wheel pendulum / Proc. American Control Conf. – 2003. – P. 2809 – 2814.
5. Iriarte R., Aguilar L.T., Fridman L. Second order sliding mode tracking controller for inertia wheel pendulum // J. Franklin Institute. – 2013. – **350**, N 1. – P. 92 – 106.
6. Khoroshun A.S. Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum by Spinning an Inertial Flywheel // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 547 – 556.
7. Loveikin V.S., Romasevich Yu.A., Khoroshun S.A., Shevchuck A.G. Time-Optimal Control of a Simple Pendulum with a Movable Pivot. Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 3. – P. 358 – 365.
8. Nikitina N.V. Stability Analysis of Rotary Motions of a Quadcopter // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 648 – 653.
9. Martinez-Soto R., Rodriguez A., Castillo O., Aguilar L.T. Gain optimization for inertia wheel pendulum stabilization using particle swarm optimization and genetic algorithms // Int. J. of Innovative Computing, Information and Control. – 2012. – **8**, N 6. – P. 4421 – 4430.
10. Qaiser N., Iqbal N., Hussain A., Qaiser N. Exponential stabilization of the inertia wheel pendulum using dynamic surface control // J. of Circuits, Systems, and Computers. – 2007. – **16**, N 1 – P. 81 – 92.
11. Romasevych Yu., Loveikin V. A Novel Multi-Epoch Particle Swarm Optimization Technique // Cybernetics and Information Technologies. – 2018. – **18**(3). – P. 62 – 74.
12. Santibanez V., Kelly R., Sandoval J. Control of the Inertia Wheel Pendulum by Bounded Torques / Proc. 44th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. – 2005. – P. 8266 – 8270.
13. Spong M.W., Corke P., Lozano R. Nonlinear control of the inertia wheel pendulum // Automatica. – 2001. – **37**. – P. 1845 – 1851.
14. Zhang A., Yang C., Gong S., Qiu J. Nonlinear stabilizing control of underactuated inertia wheel pendulum based on coordinate transformation and time-reverse strategy // Nonlinear Dynamics. – 2016. – **84**, N 4 – P. 2467 – 2476.

Поступила 25.01.2019

Утверждена в печать 03.03.2020