В . И . О с т р и к

СИММЕТРИЯ ИНВЕРСИИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Институт прикладной физики НАН Украины,
ул. Петропавловская, 58, 40000, Сумы, Украина; e-mail: v.i.ostryk@gmail.com

Abstract. The inversion symmetry of the separate components of the displacement vector and stress tensor in the solution of the first boundary problem of the theory of elasticity for a half-space is studied. The case is considered when one component of loading given at the half-space boundary has the inversion symmetry, and the other two components are equal to zero. The inversion symmetry is also studied for two problems: in the mixed one when on one part of the half-space boundary only the normal forces are given and the tangential forces are equal to zero, while the conditions of smooth contact are prescribed on the other part, and in a problem of torsion of an elastic half-space with the tangential stresses given on its boundary.

Key words: inversion, elastic half-space, Boussinesq and Cerruti problems, torsion, potentials.

Введение.

Преобразование инверсии в некоторых случаях используется в теории упругости [3, 6, 7, 13, 14] и математической физике [8, 13] для получения решений краевых задач в полярных и сферических координатах. Обусловлено это тем, что гармоническая функция двух переменных при преобразовании инверсии остается гармонической [4], а преобразованная гармоническая функции трех переменных является гармонической по отношению к радиальной переменной (теорема Кельвина) [8]. Бигармоническая функция двух переменных при таком преобразовании остается бигармонической по отношению к квадрату радиальной переменной [13]. Последнее обстоятельство позволяет, например, получить решение двумерной задачи теории упругости о действии сосредоточенных сил на упругий диск, используя решение аналогичной задачи для упругой полуплоскости [6, 13, 14]. С помощью преобразования инверсии определяются функции Грина для круга и шара задачи Дирихле для уравнения Лапласа [12].

Если при преобразовании инверсии область, для которой формулируется краевая задача теории потенциала, остается без изменений (например, клин, полупространство, конус) и граничные условия также не изменяются, то решение такой краевой задачи (с определенным функциональным множителем в случае трех переменных) переходит само в себя, т. е. обладает симметрией инверсии. Для любой краевой задачи теории упругости наличие симметрии инверсии в граничных условиях не влечет за собой симметрию инверсии решения. Тем не менее, как показано в работе [15], где исследованы основные граничные двумерные задачи для упругого клина, отдельные компоненты вектора перемещений и тензора напряжений все же имеют симметрию инверсии либо во всей области, либо на гранях клина. В работах [9, 16] при решении двух конкретных смешанных задач теории упругости для клина, в которых граничные условия обладают симметрией инверсии, показано, что нормальные перемещения и нормальные напряжения на одной из граней клина также обладают свойством симметрии инверсии.

Далее устанавливается симметрия инверсии отдельных компонент вектора перемещений и тензора напряжений в решениях первой основной задачи, смешанной задачи и задачи кручения для упругого полупространства.

§1. Первая краевая задача. Нормальное нагружение.

Вначале рассмотрим задачу Буссинеска о действии сосредоточенной силы P в точке $x = x_0$, $y = y_0$ границы $z = 0$ упругого полупространства $z \geq 0$. Декартовы компоненты вектора перемещений имеют вид [10]

$$u_x = \frac{P}{4\pi G}\frac{x - x_0}{\rho_0}\left(\frac{z}{\rho_0^2} - \frac{1-2\nu}{\rho_0 + z}\right); \quad u_y = \frac{P}{4\pi G}\frac{y - y_0}{\rho_0}\left(\frac{z}{\rho_0^2} - \frac{1-2\nu}{\rho_0 + z}\right);$$

$$u_z = \frac{P}{4\pi G}\frac{1}{\rho_0}\left(2(1-\nu) + \frac{z^2}{\rho_0^2}\right); \quad \rho_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2, \tag{1.1}$$

где G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

В сферических координатах ρ, ϑ, φ, которые связаны с декартовыми x, y, z следующим образом:

$$x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi; \quad z = \rho\cos\vartheta$$

$$(\, 0 \leq \rho < \infty, \ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \ 0 \leq \varphi < 2\pi \,),$$

из (1.1) получим

$$u_\rho = \frac{P}{4\pi G}\left[\frac{\rho\cos\vartheta}{\rho_0^3}\left(\rho - l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right) + 2(1-\nu)\frac{\cos\vartheta}{\rho_0} - \frac{(1-2\nu)\sin\vartheta}{\rho_0(\rho_0 + z)}\left(\rho\sin\vartheta - l\cos\varphi_1\right)\right];$$

$$u_\vartheta = -\frac{P}{4\pi G}\left[\frac{l\rho}{\rho_0^3}\cos^2\vartheta\cos\varphi_1 + 2(1-\nu)\frac{\sin\vartheta}{\rho_0} + \frac{(1-2\nu)\cos\vartheta}{\rho_0(\rho_0 + z)}\left(\rho\sin\vartheta - l\cos\varphi_1\right)\right]; \tag{1.2}$$

$$u_\varphi = \frac{P}{4\pi G}\frac{l}{\rho_0}\left(\frac{\rho\cos\vartheta}{\rho_0^2} - \frac{1-2\nu}{\rho_0 + z}\right)\sin\varphi_1; \quad \rho_0^2 = \rho^2 - 2l\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1 + l^2;$$

$$x_0 = l\cos\omega; \quad y_0 = l\sin\omega; \quad \varphi_1 = \varphi - \omega.$$

Определяя напряжения из закона Гука и соотношений Коши на основе (1.2), выпишем их выражения лишь в случае несжимаемого материала:

$$\sigma_\rho = -\frac{3P}{2\pi}\frac{\rho}{\rho_0^5}\left(\rho - l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right)^2\cos\vartheta; \quad \sigma_\vartheta = -\frac{3P}{2\pi}\frac{l^2\rho}{\rho_0^5}\cos^3\vartheta\cos^2\varphi_1;$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{3P}{2\pi}\frac{l^2\rho}{\rho_0^5}\cos\vartheta\sin^2\varphi_1; \quad \tau_{\rho\vartheta} = \frac{3P}{2\pi}\frac{l\rho}{\rho_0^5}\left(\rho - l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right)\cos^2\vartheta\cos\varphi_1; \tag{1.3}$$

$$\tau_{\rho\varphi} = -\frac{3P}{2\pi}\frac{l\rho}{\rho_0^5}\left(\rho - l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right)\cos\vartheta\sin\varphi_1;$$

$$\tau_{\vartheta\varphi} = \frac{P}{2\pi}\frac{l}{\rho_0^3}\left(\frac{1}{\sin\vartheta} + 3\frac{l\rho}{\rho_0^2}\cos\varphi_1\right)\cos^2\vartheta\cos\varphi_1 \quad (\,\nu = 0{,}5\,).$$

В общем случае сжимаемого материала ($\nu \neq 0{,}5$) для дальнейшего достаточно ограничиться следующими выражениями для напряжений:

$$\sigma_\vartheta\big|_{\varphi_1=\pm\pi/2} = (1-2\nu)\frac{P}{2\pi}\left(\frac{\rho\cos\vartheta}{\rho_0^3} - \frac{1}{\rho_0(\rho_0+z)} + \frac{\sin^2\vartheta}{(\rho_0+z)^2}\right);$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi_1=\pm\pi/2} = -\frac{P}{2\pi}\frac{1}{\rho_0^2}\left[3\frac{l^2\rho}{\rho_0^3}\cos\vartheta - (1-2\nu)\left(\frac{\rho\cos\vartheta}{\rho_0} - \frac{\rho^2}{\rho_0(\rho_0+z)} + \frac{l^2}{(\rho_0+z)^2}\right)\right]; \quad (1.4)$$

$$\tau_{\vartheta\varphi}\big|_{\varphi_1=\pm\pi/2} = \pm\frac{P}{2\pi}\frac{l}{\rho_0}\left[\frac{\cos^2\vartheta}{\rho_0^2\sin\vartheta} + (1-2\nu)\left(\frac{\sin\vartheta}{\rho_0^2} - \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\rho(\rho_0+z)} - \frac{\sin\vartheta}{(\rho_0+z)^2}\right)\right].$$

На границе полупространства $\vartheta = \pi/2$ имеем

$$u_\rho\big|_{\vartheta=\pi/2} = -\frac{(1-2\nu)P}{4\pi G}\frac{\rho - l\cos\varphi_1}{\rho_0^2}; \quad u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2} = -\frac{(1-\nu)P}{2\pi G}\frac{1}{\rho_0}; \quad u_\varphi\big|_{\vartheta=\pi/2} = -\frac{(1-2\nu)P}{4\pi G}\frac{l\sin\varphi_1}{\rho_0^2};$$

$$\sigma_\rho\big|_{\vartheta=\pi/2,\ \varphi_1=\pm\pi/2} = -\sigma_\varphi\big|_{\vartheta=\pi/2,\ \varphi_1=\pm\pi/2} = (1-2\nu)\frac{P}{2\pi}\frac{\rho^2-l^2}{\rho_0^4}; \quad (1.5)$$

$$\tau_{\rho\varphi}\big|_{\vartheta=\pi/2} = (1-2\nu)\frac{P}{\pi}\frac{l\sin\varphi_1}{\rho_0^4}\left(\rho - l\cos\varphi_1\right).$$

В решении (1.2) – (1.5) задачи Буссинеска осуществим преобразование инверсии, заменив переменную ρ на l^2/ρ, а величину ρ_0, согласно ее выражению из (1.2), – на $(l/\rho)\rho_0$. В результате для случая несжимаемого материала приходим к тождествам

$$\sqrt{\rho}\,u_\vartheta(\rho,\vartheta,\varphi) \equiv \frac{l}{\sqrt{\rho}}u_\vartheta\left(\frac{l^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right); \quad \sqrt{\rho}\,u_\varphi(\rho,\vartheta,\varphi) \equiv \frac{l}{\sqrt{\rho}}u_\varphi\left(\frac{l^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right);$$

$$\sqrt{\rho^3}\sigma_\vartheta(\rho,\vartheta,\varphi) \equiv \frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}}\sigma_\vartheta\left(\frac{l^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right); \quad \sqrt{\rho^3}\sigma_\varphi(\rho,\vartheta,\varphi) \equiv \frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}}\sigma_\varphi\left(\frac{l^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right); \quad (1.6)$$

$$\sqrt{\rho^3}\tau_{\vartheta\varphi}(\rho,\vartheta,\varphi) \equiv \frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}}\tau_{\vartheta\varphi}\left(\frac{l^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right) \quad (\nu = 0{,}5),$$

которые показывают, что перемещения u_ϑ, u_φ, умноженные на $\sqrt{\rho}$, и напряжения σ_ϑ, σ_φ, $\tau_{\vartheta\varphi}$, умноженные на $\sqrt{\rho^3}$, являются симметричными при преобразовании инверсии относительно точки $\rho = l$ в любом радиальном направлении полупространства. Для сжимаемого материала ($\nu \neq 0{,}5$), как показывают равенства (1.4), тождества (1.6) не являются справедливыми. Вместе с тем, при произвольном значении ν на границе полупространства $\vartheta = \pi/2$, согласно второму равенству (1.5), величина $\sqrt{\rho}\,u_\vartheta$ является симметричной

$$\sqrt{\rho}\,u_\vartheta\left(\rho,\frac{\pi}{2},\varphi\right) \equiv \frac{l}{\sqrt{\rho}}u_\vartheta\left(\frac{l^2}{\rho},\frac{\pi}{2},\varphi\right), \quad (1.7)$$

а согласно третьему равенству (1.5) симметричной является величина ρu_φ,

$$\rho u_\varphi\left(\rho,\frac{\pi}{2},\varphi\right) \equiv \frac{l^2}{\rho}u_\varphi\left(\frac{l^2}{\rho},\frac{\pi}{2},\varphi\right). \quad (1.8)$$

Как показывают остальные равенства (1.5), перемещения u_ρ и напряжения σ_ρ, σ_φ, $\tau_{\rho\varphi}$ не обладают симметрией инверсии на границе полупространства. Напряжения σ_ϑ (кроме точки $\rho = l$, $\varphi = \omega$), $\tau_{\rho\vartheta}$, $\tau_{\vartheta\varphi}$ при $\vartheta = \pi/2$ обращаются в нуль в силу граничных условий задачи.

Перейдем теперь к случаю распределенной нормальной нагрузки, заданной на границе полупространства при отсутствии касательной нагрузки. Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -p(\rho,\, \varphi); \quad \tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0; \quad \tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0. \tag{1.9}$$

Считаем при этом, что нормальная нагрузка, умноженная на $\sqrt{\rho^3}$, является симметричной при преобразовании инверсии

$$\sqrt{\rho^3}\, p(\rho,\, \varphi) \equiv \frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}}\, p\left(\frac{l^2}{\rho},\, \varphi\right) \quad (\vartheta = \pi/2). \tag{1.10}$$

Из решения (1.2) – (1.5) задачи Буссинеска, используя принцип суперпозиции, получаем для несжимаемого материала

$$u_\vartheta = -V_1^{(00)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\sin\vartheta - \rho V_2^{(10)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\cos^2\vartheta; \quad u_\varphi = \rho V_2^{(01)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\cos\vartheta;$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta = -3\rho V_3^{(20)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\cos^3\vartheta; \quad \frac{1}{2G}\sigma_\varphi = -3\rho V_3^{(02)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\cos\vartheta; \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{2G}\tau_{\vartheta\varphi} = \left[V_2^{(01)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\operatorname{cosec}\vartheta + 3\rho V_3^{(11)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\right]\cos^2\vartheta \quad (\nu = 0{,}5)$$

и для сжимаемого материала

$$u_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -2(1-\nu)V_1^{(00)}\left(\rho,\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right); \quad u_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -\frac{1-2\nu}{2\pi}\iint\limits_{r<\infty} p(r,\, \omega)\frac{r^2}{\rho_1^2}\sin\varphi_1\, dr\, d\omega. \tag{1.12}$$

При этом потенциалы $V_j^{(km)}$ представляются в виде

$$V_j^{(km)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r<\infty} p(r,\, \omega)\frac{r^j}{\rho_1^{2j-1}}\omega_{km}\, dr\, d\omega; \quad \rho_1^2 = \rho^2 - 2\rho r\sin\vartheta\cos\varphi_1 + r^2;$$

$$\omega_{km} = \cos^k\varphi_1\sin^m\varphi_1 \quad (j = 1,\, 2,\, 3;\; k,\, m = 0,\, 1,\, \ldots). \tag{1.13}$$

Разбив интеграл из (1.13) на два интеграла по областям $r \le l$ и $r \ge l$ ($0 \le \omega < 2\pi$) и произведя замену r на l^2/r во втором из них, получим

$$V_j^{(km)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r\le l} p(r,\, \omega)\left[\frac{1}{\rho_1^{2j-1}} + \left(\frac{l}{\rho\rho_2}\right)^{2j-1}\right] r^j\omega_{km}\, dr\, d\omega; \tag{1.14}$$

$$\rho_2^2 = \frac{l^4}{\rho^2} - 2\frac{l^2}{\rho} r\sin\vartheta\cos\varphi_1 + r^2.$$

Ввиду того, что при замене ρ на l^2/ρ величина ρ_1 переходит в ρ_2, а величина ρ_2 – в ρ_1, из (1.14) для введенных потенциалов приходим к тождеству

$$\rho^{j-1/2}V_j^{(km)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi) \equiv \left(\frac{l^2}{\rho}\right)^{j-1/2} V_j^{(km)}\left(\frac{l^2}{\rho},\, \vartheta,\, \varphi\right). \tag{1.15}$$

Из выражений (1.11), (1.12) на основании тождества (1.15) вытекает, что симметрия инверсии, выраженная в виде тождеств (1.6), (1.7) в случае сосредоточенной нормальной силы, имеет место также и в случае распределенной нормальной нагрузки, если выполнено условие (1.10). Все остальные компоненты решения, не входящие в тождества (1.6), (1.7), а именно перемещения u_ρ и напряжения σ_ρ, $\tau_{\rho\vartheta}$, $\tau_{\rho\varphi}$, не являются симметричными во всем полупространстве, даже в случае несжимаемого материала. На границе полупространства все компоненты решения, кроме перемещения u_ϑ, также не обладают симметрией инверсии. Можно также показать, что тождество (1.8) будет справедливым в случае, когда функция $\rho^2 p\left(\rho,\, \varphi\right)$ является симметричной.

Получим теперь свойства симметрии (1.6), (1.7) решения задачи с краевыми условиями (1.9), (1.10) иным способом, используя представление компонент вектора перемещений в форме Папковича – Нейбера [5] через гармонические функции Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3:

$$u_x = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1; \quad u_y = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2; \quad u_z = -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3;$$

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 \tag{1.16}$$

и теорему Кельвина об инверсии гармонической функции: если $\Phi(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)$ – гармоническая функция, то функция $\Phi(l^2/\rho,\, \vartheta,\, \varphi)/\rho$ тоже является гармонической [8].

Для удовлетворения второго и третьего граничных условий (1.9) положим [5]

$$\Phi_1 \equiv 0; \quad \Phi_2 \equiv 0; \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \equiv (1-2\nu)\Phi_3 \tag{1.17}$$

и перейдем к сферическим координатам. Получим

$$u_\rho = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} + (3-4\nu)\Phi_3 \cos\vartheta - \rho\frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho}\cos\vartheta;$$

$$u_\vartheta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \vartheta} - (3-4\nu)\Phi_3 \sin\vartheta - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta}\cos\vartheta; \quad u_\varphi = -\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi}\operatorname{ctg}\vartheta. \tag{1.18}$$

Отсюда находим

$$\frac{\sigma_\rho}{2G} = -\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho^2} + 2(1-\nu)\frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho}\cos\vartheta - \frac{2\nu}{\rho}\frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta}\sin\vartheta - \rho\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \rho^2}\cos\vartheta;$$

$$\frac{\sigma_\vartheta}{2G} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \vartheta^2} - (1-2\nu)\frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho}\cos\vartheta - 2(1-\nu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta}\sin\vartheta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \vartheta^2}\cos\vartheta;$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{2G} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta - \frac{1}{\rho^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \varphi^2} - (1-2\nu)\frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho}\cos\vartheta -$$

$$-\left(2\nu + \operatorname{ctg}^2\vartheta\right)\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta}\sin\vartheta - \frac{\cos\vartheta}{\rho\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \varphi^2}; \tag{1.19}$$

$$\frac{\tau_{\rho\vartheta}}{2G} = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \vartheta}\right) - (1-2\nu)\frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho}\sin\vartheta + 2(1-\nu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta}\cos\vartheta - \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \rho\partial \vartheta}\cos\vartheta;$$

$$\frac{\tau_{\rho\varphi}}{2G} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi}\right) + 2(1-\nu)\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\rho}\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \rho\partial \varphi}\operatorname{ctg}\vartheta;$$

$$\frac{\tau_{\vartheta\varphi}}{2G}=-\frac{1}{\rho^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\vartheta\partial\varphi}-\frac{1-2\nu}{\rho}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi}-\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\rho}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\vartheta\partial\varphi}.$$

Первое граничное условие (1.9) с учетом равенств

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\pi/2};\quad \left.\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right|_{z=0}=\left.\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right)\right|_{\vartheta=\pi/2} \tag{1.20}$$

преобразуем к виду

$$\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\pi/2}=\rho p(\rho,\,\varphi). \tag{1.21}$$

Согласно теореме Кельвина функция $\Phi_3^*(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)=(l/\rho)\Phi_3(l^2/\rho,\,\vartheta,\,\varphi)$ является гармонической и на основании соотношений (1.10), (1.21) удовлетворяет граничному условию

$$\left.\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\pi/2}=\rho p(\rho,\,\varphi). \tag{1.22}$$

Т.к. правые части граничных условий (1.21), (1.22) совпадают, то из теоремы единственности решения задачи Неймана для полупространства вытекает, что $\Phi_3^*(\rho,\vartheta,\varphi)\equiv$ $\equiv\Phi_3(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)$, т.е. приходим к тождеству

$$\sqrt{\rho}\,\Phi_3(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)\equiv\frac{l}{\sqrt{\rho}}\Phi_3\left(\frac{l^2}{\rho},\,\vartheta,\,\varphi\right). \tag{1.23}$$

Кроме того, из третьего тождества (1.17) и первого равенства (1.20) следует, что функция $\sqrt{\rho}\,\tilde\Phi_0$, где $\tilde\Phi_0=\rho^{-1}\,\partial\Phi_0/\partial\vartheta$, симметрична на границе полупространства

$$\sqrt{\rho}\,\tilde\Phi_0\left(\rho,\,\frac{\pi}{2},\,\varphi\right)\equiv\frac{l}{\sqrt{\rho}}\tilde\Phi_0\left(\frac{l^2}{\rho},\,\frac{\pi}{2},\,\varphi\right). \tag{1.24}$$

Тождества (1.23), (1.24) позволяют выявить симметрию инверсии отдельных слагаемых в соотношениях (1.18), (1.19). Например, первое и третье слагаемые в выражении для u_ρ из (1.18) не обладают симметрией инверсии в то время как второе слагаемое из этого выражения, умноженное на $\sqrt{\rho}$, является симметричным благодаря тождеству (1.23). Таким образом, опираясь на соотношения (1.23), (1.24), убеждаемся в справедливости тождеств (1.6), (1.7).

§2. Касательное радиальное нагружение.

Используем решение задачи Черрути о действии на упругое полупространство $z\ge 0$ касательной силы Q_x, приложенной в точке $x=0$, $y=0$, $z=0$ и направленной вдоль оси Ox. Компоненты вектора перемещений в декартовых координатах для этой задачи имеют вид [10]:

$$u_x=\frac{Q_x}{4\pi G}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{x^2}{\rho^3}+(1-2\nu)\left(\frac{1}{\rho+z}-\frac{x^2}{\rho(\rho+z)^2}\right)\right];\quad u_y=\frac{Q_x}{4\pi G}\frac{xy}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1-2\nu}{(\rho+z)^2}\right);$$

$$u_z=\frac{Q_x}{4\pi G}\frac{x}{\rho}\left(\frac{z}{\rho^2}+\frac{1-2\nu}{\rho+z}\right);\quad \rho^2=x^2+y^2+z^2. \tag{2.1}$$

Как и в §1, перейдем к сферическим координатам и рассмотрим действие на упругое полупространство касательной радиальной силы Q_ρ, приложенной в точке $\rho=l$, $\vartheta=\pi/2$, $\varphi=\omega$. Из (2.1) получим

$$u_\rho=\frac{Q_\rho}{4\pi G}\left\{\frac{\sin\vartheta\cos\varphi_1}{\rho_0}+\frac{1}{\rho_0^3}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\left(\rho-l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1-2\nu}{\rho_0+z}\left[\sin\vartheta\cos\varphi_1-\frac{1}{\rho_0}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\left(\frac{\rho\sin\vartheta-l\cos\varphi_1}{\rho_0+z}\sin\vartheta-\cos\vartheta\right)\right]\right\};$$

$$u_\vartheta=\frac{Q_\rho}{4\pi G}\left\{\frac{\cos\vartheta\cos\varphi_1}{\rho_0}-\frac{l}{\rho_0^3}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\cos\vartheta\cos\varphi_1+\right. \tag{2.2}$$

$$\left.+\frac{1-2\nu}{\rho_0+z}\left[\cos\vartheta\cos\varphi_1-\frac{1}{\rho_0}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\left(\frac{\rho\sin\vartheta-l\cos\varphi_1}{\rho_0+z}\cos\vartheta+\sin\vartheta\right)\right]\right\};$$

$$u_\varphi=-\frac{Q_\rho}{4\pi G}\left[\frac{1}{\rho_0}-\frac{l}{\rho_0^3}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)+\frac{1-2\nu}{\rho_0+z}\left(1+l\frac{\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l}{\rho_0(\rho_0+z)}\right)\right]\sin\varphi_1.$$

Напряжения в случае несжимаемого материала имеют вид

$$\sigma_\rho=-\frac{3Q_\rho}{2\pi}\frac{1}{\rho_0^5}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\left(\rho-l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right)^2;$$

$$\sigma_\vartheta=-\frac{3Q_\rho}{2\pi}\frac{l^2}{\rho_0^5}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\cos^2\vartheta\cos^2\varphi_1;\quad \sigma_\varphi=-\frac{3Q_\rho}{2\pi}\frac{l^2}{\rho_0^5}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\sin^2\varphi_1;$$

$$\tau_{\rho\vartheta}=\frac{3Q_\rho}{2\pi}\frac{l}{\rho_0^5}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\left(\rho-l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right)\cos\vartheta\cos\varphi_1; \tag{2.3}$$

$$\tau_{\rho\varphi}=-\frac{3Q_\rho}{2\pi}\frac{l}{\rho_0^5}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\left(\rho-l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right)\sin\varphi_1;$$

$$\tau_{\vartheta\varphi}=\frac{Q_\rho}{2\pi}\frac{1}{\rho\rho_0}\left[\frac{l}{\rho_0^2}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)-1\right]\operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi_1\qquad(\nu=0,5).$$

Для сжимаемого материала приведем лишь выражение

$$\tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\varphi_1=\pm\pi/2}=-\frac{Q_\rho}{4\pi}\frac{l\sin\vartheta}{\rho_0^2(\rho_0+z)}\left[\frac{2\rho}{\rho_0}+\cos\vartheta+\frac{2\rho\sin^2\vartheta}{\rho_0+z}\left(\frac{2\rho\cos\vartheta}{\rho_0+z}-1\right)\right]. \tag{2.4}$$

Кроме того, на границе полупространства

$$u_\rho\Big|_{\vartheta=\pi/2}=\frac{Q_\rho}{2\pi G}\left[\frac{1-\nu}{\rho_0}\cos\varphi_1+\frac{\nu}{\rho_0^3}\left(\rho\cos\varphi_1-l\right)\left(\rho-l\cos\varphi_1\right)\right];$$

$$u_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi/2}=-\frac{(1-2\nu)Q_\rho}{4\pi G}\frac{\rho\cos\varphi_1-l}{\rho_0^3};\quad u_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi/2}=-\frac{Q_\rho}{2\pi G}\left[\frac{1-\nu}{\rho_0}-\frac{\nu}{\rho_0^3}l\left(\rho\cos\varphi_1-l\right)\right]; \tag{2.5}$$

$$\tau_{\rho\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2}=\frac{Q_\rho}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{\rho\rho_0}\left(1-\frac{l^2}{\rho_0^2}\right)-\frac{6\nu}{\rho_0^5}l\left(\rho\cos\varphi_1-l\right)\left(\rho-l\cos\varphi_1\right)\right]\sin\varphi_1.$$

Для решения (2.2) – (2.5) имеют место тождества

$$\sqrt{\rho}\,u_\rho\left(\rho,\,\vartheta,\,\varphi\right) \equiv \frac{l}{\sqrt{\rho}}u_\rho\left(\frac{l^2}{\rho},\,\vartheta,\,\varphi\right);\quad \sqrt{\rho^3}\tau_{\rho\vartheta}\left(\rho,\,\vartheta,\,\varphi\right) \equiv \frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}}\tau_{\rho\vartheta}\left(\frac{l^2}{\rho},\,\vartheta,\,\varphi\right);$$
$$\sqrt{\rho^3}\tau_{\rho\varphi}\left(\rho,\,\vartheta,\,\varphi\right) \equiv \frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}}\tau_{\rho\varphi}\left(\frac{l^2}{\rho},\,\vartheta,\,\varphi\right)\quad (\nu = 0{,}5\,), \tag{2.6}$$

справедливые во всем полупространстве, а также тождество

$$\sqrt{\rho}\,u_\rho\left(\rho,\,\frac{\pi}{2},\,\varphi\right) \equiv \frac{l}{\sqrt{\rho}}u_\rho\left(\frac{l^2}{\rho},\,\frac{\pi}{2},\,\varphi\right)\quad (\,0 \le \nu \le 0{,}5\,), \tag{2.7}$$

которое выполняется на границе полупространства.

Пусть теперь на границе полупространства задана распределенная касательная радиальная нагрузка

$$\frac{1}{2G}\tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -p(\rho,\,\varphi)\,;\quad \sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0\,;\quad \tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0\,,$$

удовлетворяющая условию симметрии (1.10).

Из решения (2.2) – (2.5) задачи для сосредоточенной силы Q_ρ находим

$$u_\rho = V_1^{(10)}(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)\sin\vartheta + V_4^{(00)}(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)\,;\quad \frac{1}{2G}\tau_{\rho\vartheta} = 3V_5^{(10)}(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)\cos\vartheta\,;$$
$$\frac{1}{2G}\tau_{\rho\varphi} = -3V_5^{(01)}(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)\quad (\,\nu = 0{,}5\,). \tag{2.8}$$

На границе полупространства

$$u_\rho\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 2(1-\nu)V_1^{(10)}\left(\rho,\,\frac{\pi}{2},\,\varphi\right) + 2\nu V_4^{(00)}\left(\rho,\,\frac{\pi}{2},\,\varphi\right). \tag{2.9}$$

Здесь

$$V_{j+3}^{(km)}(\rho,\,\vartheta,\,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r<\infty} p(r,\,\omega)\frac{r^j}{\rho_1^{2j+1}}(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1 - r)(\rho - r\sin\vartheta\cos\varphi_1)\omega_{km}\,dr\,d\omega$$
$$(\,j = 1,\,2\,;\ k,\,m = 0,\,1,\,\ldots\,). \tag{2.10}$$

Так же, как и в §1, для потенциалов $V_{j+3}^{(km)}$ из (2.10) устанавливаем тождество

$$\rho^{j-1/2}V_{j+3}^{(km)}(\rho,\,\vartheta,\,\varphi) \equiv \left(\frac{l^2}{\rho}\right)^{j-1/2} V_{j+3}^{(km)}\left(\frac{l^2}{\rho},\,\vartheta,\,\varphi\right)\quad (\,j = 1,\,2\,;\ k,\,m = 0,\,1,\,\ldots\,),$$

на основании которого, а также, используя (1.15), из (2.8), (2.9) заключаем, что свойства симметрии (2.6), (2.7) имеют место и в случае распределенной нагрузки.

§3. Касательное окружное нагружение.

Касательная сила Q_φ действует в окружном направлении и приложена в точке $\rho = l$, $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \omega$. Из соотношений (2.1) получаем компоненты вектора перемещений в сферической системе координат:

$$u_\rho = \frac{Q_\varphi}{4\pi G}\left\{\frac{1}{\rho_0} + \frac{\rho}{\rho_0^3}\left(\rho - l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1-2\nu}{\rho_0 + z}\left[1 - \frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{\rho\sin\vartheta - l\cos\varphi_1}{\rho_0 + z}\sin\vartheta - \cos\vartheta\right)\right]\right\}\sin\vartheta\sin\varphi_1\,;$$

$$u_\vartheta=\frac{Q_\varphi}{4\pi G}\left\{\frac{\cos\vartheta}{\rho_0}-\frac{l\rho}{2\rho_0^3}\sin 2\vartheta\cos\varphi_1+\right. \tag{3.1}$$

$$\left.+\frac{1-2\nu}{\rho_0+z}\left[\cos\vartheta-\frac{\rho\sin\vartheta}{\rho_0}\left(\frac{\rho\sin\vartheta-l\cos\varphi_1}{\rho_0+z}\cos\vartheta+\sin\vartheta\right)\right]\right\}\sin\varphi_1;$$

$$u_\varphi=\frac{Q_\varphi}{4\pi G}\left[\frac{\cos\varphi_1}{\rho_0}+\frac{l\rho}{\rho_0^3}\sin\vartheta\sin^2\varphi_1+\frac{1-2\nu}{\rho_0+z}\left(\cos\varphi_1-\frac{l\rho\sin\vartheta\sin^2\varphi_1}{\rho_0(\rho_0+z)}\right)\right].$$

В случае несжимаемого материала напряжения имеют следующий вид:

$$\sigma_\rho=-\frac{3Q_\varphi}{2\pi}\frac{\rho}{\rho_0^5}\left(\rho-l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right)^2\sin\vartheta\sin\varphi_1;\quad \sigma_\vartheta=-\frac{3Q_\varphi}{2\pi}\frac{l^2\rho}{\rho_0^5}\sin\vartheta\cos^2\vartheta\sin\varphi_1\cos^2\varphi_1;$$

$$\sigma_\varphi=-\frac{3Q_\varphi}{2\pi}\frac{l^2\rho}{\rho_0^5}\sin\vartheta\sin^3\varphi_1;\quad \tau_{\rho\vartheta}=\frac{3Q_\varphi}{8\pi}\frac{l\rho}{\rho_0^5}\left(\rho-l\sin\vartheta\cos\varphi_1\right)\sin 2\vartheta\sin 2\varphi_1;$$

$$\tau_{\rho\varphi}=\frac{3Q_\varphi}{2\pi}\frac{l^2}{\rho_0^5}\left(\rho\sin\vartheta\cos\varphi_1-l\right)\sin\vartheta\sin^2\varphi_1; \tag{3.2}$$

$$\tau_{\vartheta\varphi}=\frac{Q_\varphi}{2\pi}\frac{\cos\vartheta}{\rho_0}\left(\frac{\cos\varphi_1}{\rho\sin\vartheta}+\frac{l}{\rho_0^2}\sin^2\varphi_1+3\frac{l^2\rho}{\rho_0^4}\sin\vartheta\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1\right)\quad(\nu=0{,}5).$$

Для сжимаемого материала имеем

$$\sigma_\vartheta\big|_{\varphi_1=\pi/2}=-(1-2\nu)\frac{Q_\varphi}{2\pi}\frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{1}{\rho_0^2}-\frac{3}{(\rho_0+z)^2}+\frac{2\rho_0\sin^2\vartheta}{(\rho_0+z)^3}\right)\sin\vartheta;$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi_1=\pi/2}=-\frac{Q_\varphi}{2\pi}\frac{\rho}{\rho_0^2}\left[3\frac{l^2}{\rho_0^3}+(1-2\nu)\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{\rho^2}{\rho_0(\rho_0+z)^2}+\frac{2l^2}{(\rho_0+z)^3}\right)\right]\sin\vartheta; \tag{3.3}$$

$$\tau_{\vartheta\varphi}\big|_{\varphi_1=0}=\frac{Q_\varphi}{2\pi}\left\{\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\rho\rho_0^2}+\frac{1-2\nu}{\rho_0+z}\left[\frac{\sin\vartheta}{\rho_0}-2\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\rho}+\frac{1}{\rho_0+z}\left(\frac{\rho}{2\rho_0}\sin 2\vartheta-\sin\vartheta+\frac{2l}{\rho_0}\cos\vartheta\right)\right]\right\}.$$

На границе полупространства

$$u_\rho\big|_{\vartheta=\pi/2}=\frac{Q_\varphi}{2\pi G}\left[\frac{1-\nu}{\rho_0}+\nu\frac{\rho}{\rho_0^3}\left(\rho-l\cos\varphi_1\right)\right]\sin\varphi_1;\quad u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2}=-\frac{(1-2\nu)Q_\varphi}{4\pi G}\frac{\rho}{\rho_0^2}\sin\varphi_1;$$

$$u_\varphi\big|_{\vartheta=\pi/2}=\frac{Q_\varphi}{2\pi G}\left(\frac{1-\nu}{\rho_0}\cos\varphi_1+\nu\frac{l\rho}{\rho_0^3}\sin^2\varphi_1\right); \tag{3.4}$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\vartheta=\pi/2}=-\frac{Q_\varphi}{\pi}\frac{l}{\rho_0^3}\left((1-2\nu)\cos\varphi_1+3\nu\frac{l\rho}{\rho_0^2}\sin^2\varphi_1\right)\sin\varphi_1.$$

Выражения (3.1), (3.2) показывают, что для несжимаемого материала выполняются тождества (1.6), как и в случае действия нормальной сосредоточенной силы (§1). При произвольном значении ν на границе полупространства $\vartheta=\pi/2$ имеют место тождества

$$\sqrt{\rho}\, u_\varphi\left(\rho,\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right) \equiv \frac{l}{\sqrt{\rho}} u_\varphi\left(\frac{l^2}{\rho},\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right); \quad \sqrt{\rho^3}\, \sigma_\varphi\left(\rho,\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right) \equiv \frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}} \sigma_\varphi\left(\frac{l^2}{\rho},\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right). \quad (3.5)$$

Кроме того,

$$u_\vartheta\left(\rho,\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right) \equiv u_\vartheta\left(\frac{l^2}{\rho},\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right). \quad (3.6)$$

Если на границе полупространства задана распределенная касательная окружная нагрузка

$$\frac{1}{2G}\tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -p(\rho,\, \varphi)\,; \quad \sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0\,; \quad \tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0\,,$$

подчиненная условию (1.10), из решения (3.1), (3.2) с помощью принципа суперпозиции получаем

$$u_\vartheta = \left[V_1^{(01)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi) - \rho V_2^{(11)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\sin\vartheta\right]\cos\vartheta\,;$$

$$u_\varphi = V_1^{(10)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi) + \rho V_2^{(02)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\sin\vartheta\,;$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta = -3\rho V_3^{(12)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\sin\vartheta\cos^2\vartheta\,; \quad \frac{1}{2G}\sigma_\varphi = -3\rho V_3^{(03)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\sin\vartheta\,; \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{2G}\tau_{\vartheta\varphi} = \left[\frac{1}{\rho}V_1^{(10)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\operatorname{cosec}\vartheta + V_2^{(02)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi) + 3\rho V_3^{(12)}(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)\sin\vartheta\right]\cos\vartheta$$

$$(\nu = 0{,}5\,).$$

При произвольном значении ν на границе полупространства из (3.4) найдем

$$u_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 2(1-\nu)V_1^{(10)}\left(\rho,\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right) + 2\nu\rho V_2^{(02)}\left(\rho,\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right);$$

$$u_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -(1-2\nu)\frac{\rho}{2\pi}\iint\limits_{r<\infty} p(r,\, \omega)\frac{r}{\rho_1^2}\sin\varphi_1\, dr\, d\omega\,; \quad (3.8)$$

$$\sigma_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -2\left[(1-2\nu)V_2^{(11)}\left(\rho,\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right) + 3\nu\rho V_3^{(03)}\left(\rho,\, \frac{\pi}{2},\, \varphi\right)\right].$$

Из (3.7), (3.8) с использованием (1.15) заключаем, что свойства симметрии (1.6), (3.5) также имеют место в случае распределенной касательной окружной нагрузки. Можно также показать, что тождество (3.6) выполняется для симметричной функции $\rho p(\rho,\, \varphi)$.

§4. Смешанная задача.

Пусть на части S границы полупространства заданы условия гладкого контакта, а на другой ее части $S_1 = R^2 \setminus S$ – условия первой задачи при отсутствии касательных усилий ($M(\rho,\, \varphi)$ – точка границы $\vartheta = \pi/2$ полупространства):

$$u_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -g(\rho,\, \varphi) \quad (M \in S\,); \quad \frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -p(\rho,\, \varphi) \quad (M \in S_1);$$

$$\tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0\,; \quad \tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad (M \in R^2). \quad (4.1)$$

При этом считаем, что при преобразовании инверсии, когда всякая точка $M(\rho,\, \varphi)$ переходит в точку $M'(l^2/\rho,\, \varphi)$, область S переходит сама в себя, а значит, и область S_1 переходит также сама в себя, а функции $\sqrt{\rho}g(\rho,\, \varphi)$ и $\sqrt{\rho^3}\, p(\rho,\, \varphi)$ являются симметричными:

$$\sqrt{\rho}g(\rho,\varphi)\equiv\frac{l}{\sqrt{\rho}}g\left(\frac{l^2}{\rho},\varphi\right);\ \sqrt{\rho^3}p(\rho,\varphi)\equiv\frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}}p\left(\frac{l^2}{\rho},\varphi\right). \tag{4.2}$$

Введем неизвестную функцию

$$q(\rho,\varphi)=-\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2}\quad(M\in S).$$

Тогда нормальные перемещения на границе полупространства на основании равенств (1.12), (1.13) примут вид

$$u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2}=\frac{1-\nu}{\pi}\left(\iint_S q(r,\omega)\frac{r}{\rho_1}drd\omega+\iint_{S_1}p(r,\omega)\frac{r}{\rho_1}drd\omega\right). \tag{4.3}$$

Удовлетворив с помощью (4.3) первому граничному условию (4.1), относительно функции $q(r,\omega)$ получим интегральное уравнение

$$\begin{gathered}\iint_S q(r,\omega)\frac{r}{\rho_1}drd\omega=f(\rho,\varphi)\quad(M\in S);\\ f(\rho,\varphi)=-\frac{\pi}{1-\nu}g(\rho,\varphi)-\iint_{S_1}p(r,\omega)\frac{r}{\rho_1}drd\omega.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Ядро $1/\rho_1$ уравнения (4.4) с точностью до множителя $1/(4\pi)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа, а его левая часть − потенциалом простого слоя [12]. Как известно [12], решение уравнения (4.4) является единственным.

Исследуем симметрию решения $q(r,\omega)$ интегрального уравнения (4.4). Произведя замену переменной r на l^2/r в интеграле по области S_1 из правой части уравнения (4.4), с использованием второго тождества (4.2), получаем

$$\iint_{S_1}p(r,\omega)\frac{r}{\rho_1}drd\omega=\frac{l}{\rho}\iint_{S_1}p(r,\omega)\frac{r}{\rho_2}drd\omega.$$

С учетом того, что при замене ρ на l^2/ρ величина ρ_2 из (1.14) переходит в ρ_1 из (1.13), а также первого тождества (4.2), для правой части уравнения (4.4) имеем

$$\sqrt{\rho}f(\rho,\varphi)\equiv\frac{l}{\sqrt{\rho}}f\left(\frac{l^2}{\rho},\varphi\right). \tag{4.5}$$

Заменив в уравнении (4.4) r на l^2/r и ρ на l^2/ρ, преобразуем это уравнение, учитывая (4.5), к виду

$$\iint_S\frac{l^3}{r^3}q\left(\frac{l^2}{r},\omega\right)\frac{r}{\rho_1}drd\omega=f(\rho,\varphi)\quad(M\in S). \tag{4.6}$$

Ввиду эквивалентности интегральных уравнений (4.4) и (4.6), а также их однозначной разрешимости, приходим к выводу, что решение $q(r,\omega)$, умноженное на $\sqrt{r^3}$, является симметричным, т. е. справедливо тождество

$$\sqrt{\rho^3}q(\rho,\varphi)\equiv\frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}}q\left(\frac{l^2}{\rho},\varphi\right). \tag{4.7}$$

Заменив обозначение неизвестной функции $q(\rho,\varphi)$, заданной в области S, на $p(\rho,\varphi)$, замечаем, что второе тождество (4.2) относительно нормальных напряжений σ_ϑ выполнено на всей границе полупространства, как и в случае заданных напряжений σ_ϑ при отсутствии касательных напряжений $\tau_{\rho\vartheta}$, $\tau_{\vartheta\varphi}$ на границе полупространства, рассмотренном в §1 при условии (1.10). Следовательно, решение смешанной задачи при условиях (4.2) имеет симметрию инверсии для тех же компонент, что и в первой основной задаче, рассмотренной в §1. Т. е. имеют место тождества (1.6), (1.7).

§5. Задача кручения.

Деформация кручения упругой среды вокруг оси Oz характеризуется наличием только одной компоненты u_φ вектора перемещений ($u_\rho \equiv 0$, $u_\vartheta \equiv 0$), не зависящей от переменной φ и удовлетворяющей уравнению [2, 10]:

$$\nabla^2 u_\varphi - \frac{1}{\rho^2 \sin^2\vartheta} u_\varphi = 0\,; \quad \nabla^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right]. \tag{5.1}$$

Не равными тождественно нулю являются лишь напряжения

$$\tau_{\rho\varphi} = G\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\varphi}{\rho}\right); \quad \tau_{\vartheta\varphi} = \frac{G}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(u_\varphi \sin\vartheta\right). \tag{5.2}$$

Пусть на границе полупространства заданы напряжения

$$\frac{1}{G}\tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = t(\rho)\,, \tag{5.3}$$

для которых выполняется условие симметрии

$$\sqrt{\rho^3}\,t(\rho) \equiv \frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}}\,t\left(\frac{l^2}{\rho}\right). \tag{5.4}$$

С учетом второго равенства (5.2), граничное условие (5.3) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(u_\varphi \sin\vartheta\right)\Big|_{\vartheta=\pi/2} = \rho t(\rho)\,. \tag{5.5}$$

Можно показать, что для всякой функции $h(\rho,\,\vartheta)$ справедливо равенство

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2 \sin^2\vartheta}\right)\frac{h(\rho,\,\vartheta)}{\sqrt{\rho}} = \frac{\rho'^5}{l^5}\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{\rho'^2 \sin^2\vartheta}\right)\frac{h(\rho,\,\vartheta)}{\sqrt{\rho'}}\,;$$
$$\rho' = \frac{l^2}{\rho}; \quad \nabla_1^2 = \frac{1}{\rho'^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\rho'^2 \frac{\partial}{\partial\rho'}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right]. \tag{5.6}$$

При этом заметим, что из аналогичного (5.6) равенства

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\frac{h_1(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)}{\sqrt{\rho}} = \frac{\rho'^5}{l^5}\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{\rho'^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\frac{h_1(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)}{\sqrt{\rho'}}$$

непосредственно вытекает теорема Кельвина об инверсии гармонической функции $\Phi(\rho,\,\vartheta,\,\varphi) = h_1(\rho,\,\vartheta,\,\varphi)\big/\sqrt{\rho}$ (см. §1).

Обозначив $u_\varphi = h(\rho,\,\vartheta)\big/\sqrt{\rho}$, из (5.1), (5.5) для функции $h(\rho,\,\vartheta)$ получаем краевую задачу

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2 \sin^2\vartheta}\right)\frac{h(\rho,\,\vartheta)}{\sqrt{\rho}} = 0\,; \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(h(\rho,\,\vartheta)\sin\vartheta\right)\Big|_{\vartheta=\pi/2} = \sqrt{\rho^3}\,t(\rho)\,. \tag{5.7}$$

Выполнив в (5.7) преобразовании инверсии $\rho' = l^2\big/\rho$, на основании (5.5), (5.6) получаем

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2 \sin^2\vartheta}\right)\frac{h(\rho',\,\vartheta)}{\sqrt{\rho}} = 0\,; \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(h(\rho',\,\vartheta)\sin\vartheta\right)\Big|_{\vartheta=\pi/2} = \sqrt{\rho^3}\,t(\rho)\,. \tag{5.8}$$

Из соотношений (5.7), (5.8) вытекает тождество

$$h(\rho,\,\vartheta) \equiv h(\rho',\,\vartheta)\,,$$

которое, с учетом замен $u_\varphi = h(\rho,\,\vartheta)\big/\sqrt{\rho}$, $\rho' = l^2\big/\rho$, означает симметричность функции $\sqrt{\rho}\,u_\varphi$:

$$\sqrt{\rho}u_\varphi(\rho) \equiv \frac{l}{\sqrt{\rho}} u_\varphi\left(\frac{l^2}{\rho}\right). \tag{5.9}$$

Из второго равенства (5.2) приходим к симметричности функции $\sqrt{\rho^3}\tau_{\vartheta\varphi}$:

$$\sqrt{\rho^3}\tau_{\vartheta\varphi}(\rho, \vartheta, \varphi) \equiv \frac{l^3}{\sqrt{\rho^3}} \tau_{\vartheta\varphi}\left(\frac{l^2}{\rho}, \vartheta, \varphi\right). \tag{5.10}$$

Из первого равенства (5.2), учитывая (5.9), заключаем, что напряжения $\tau_{\rho\varphi}$ не обладают симметрией инверсии.

§6. Примеры.

1. В точках $\rho = l_j$, $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \omega$ границы полупространства приложены сосредоточенные нормальные силы P_j ($j = 1, 2$). В граничных условиях (1.9) необходимо взять

$$p(\rho, \varphi) = \frac{1}{2G}\left[\frac{P_1}{l_1}\delta(\rho - l_1) + \frac{P_2}{l_2}\delta(\rho - l_2)\right]\delta(\varphi - \omega),$$

где $\delta(\rho)$ – дельта-функция Дирака. Условие симметрии (1.10) будет выполнено, если принять, что $P_1/P_2 = \sqrt{l_1/l_2}$, $l = \sqrt{l_1 l_2}$. Тогда, как показано в §1, будут иметь место тождества (1.6), (1.7).

2. В случае действия на границе полупространства касательных радиальных сил $Q_\rho^{(j)}$, приложенных в точках $\rho = l_j$, $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \omega$ ($j = 1, 2$), при соблюдении условия $Q_\rho^{(1)}/Q_\rho^{(2)} = \sqrt{l_1/l_2}$, как показано в §2, имеют место тождества (2.6), (2.7), в которых $l = \sqrt{l_1 l_2}$.

3. В случае действия на границе полупространства касательных окружных сил $Q_\varphi^{(j)}$, приложенных в точках $\rho = l_j$, $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \omega$ ($j = 1, 2$), при соблюдении условия $Q_\varphi^{(1)}/Q_\varphi^{(2)} = \sqrt{l_1/l_2}$, как показано в §3, выполняются тождества (1.6), (3.5), в которых $l = \sqrt{l_1 l_2}$.

4. Пусть в границу полупространства вдавливается штамп, занимающий в плане область $S = \{l_1 \le \rho \le l_2, \omega_1 \le \varphi \le \omega_2\}$. Поверхность основания штампа задана уравнением $z = -g(\rho, \varphi)$, где $g(\rho, \varphi) \equiv A(\varphi)/\sqrt{\rho}$. Вне области контакта S граница полупространства свободна от напряжений. В частном случае, когда $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2\pi$, $A(\varphi) \equiv \text{const}$, имеем осесимметричную контактную задачу для кольцевого штампа [1]. В пренебрежении силами трения в области контакта граничные условия задачи имеют вид (4.1). При этом $p(\rho, \varphi) \equiv 0$ и выполнены тождества (4.2), в которых $l = \sqrt{l_1 l_2}$. Как показано в §4, решение такой задачи обладает симметрией инверсии, выраженной тождествами (1.6), (1.7).

5. Кольцевой штамп, занимающий в плане область $S = \{l_1 \le \rho \le l_2, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ и имеющий основание, описываемое уравнением $z = -A/\sqrt{\rho}$ ($A = \text{const}$), вдавливается в упругое полупространство и при этом равномерно вращается вокруг своей оси с учетом сил трения в области контакта. В области S возникают касательные окружные напряжения $\tau_{\vartheta\varphi}\big|_{\vartheta=\pi/2} = \mu_0\,\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2}$, где μ_0 – коэффициент трения. Как и в [2, 11], напряжения $\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2}$ определяются из решения осесимметричной задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство. Решение задачи получается наложением решений смешанной задачи о гладком контакте кольцевого штампа и задачи кручения. Симметрия этих двух решений выражается тождествами (1.6), (1.7) и (5.9), (5.10), соответственно. Т.к. перемещения u_φ и напряжения $\tau_{\vartheta\varphi}$, возникающие в задаче кручения, имеют согласно (5.9), (5.10) такую же симметрию инверсии, как и в смешанной задаче (второе и пятое равенство (1.6) при $\nu = 0{,}5$), напряжения $\tau_{\rho\varphi}$ не являются симметричными в обеих задачах, а перемещения u_ϑ и напряжения σ_ϑ, σ_φ, входящие в (1.6), (1.7), в задаче кручения не возникают, то для решения рассматриваемой задачи выполняются те же тождества (1.6), (1.7), что и для смешанной задачи.

Заключение.

Исследована симметрия инверсии отдельных компонент вектора перемещений и тензора напряжений в решении задач Буссинеска и Черрути о действии нормальной и касательной (радиальной и окружной) сосредоточенных сил на упругое полупространство. С использованием принципа суперпозиции установленные свойства решений задач Буссинеска и Черрути перенесены на решение первой краевой задачи теории упругости для полупространства в случаях, когда одна из компонент нагрузки, заданной на границе полупространства, обладает симметрией инверсии, а две другие компоненты принимают нулевые значения. Исследована также симметрия инверсии в смешанной задаче, когда на одной части границы полупространства заданы нормальные усилия при отсутствии касательных усилий, а на другой – условия гладкого контакта, а также в задаче кручения упругого полупространства.

РЕЗЮМЕ. Досліджено симетрію інверсії окремих компонент вектора переміщень та тензора напружень у розв’язку першої крайової задачі теорії пружності для півпростору у випадках, коли одна із компонент навантаження, заданого на межі півпростору, має властивість симетрії інверсії, а дві інші компоненти приймають нульові значення. Досліджено також симетрію інверсії у змішаній задачі, коли на одній частині межі півпростору задано нормальні зусилля за відсутності дотичних зусиль, а на іншій – умови гладкого контакту, а також у задачі кручення пружного півпростору із заданими на його межі дотичними напруженнями.

1. *Антипов Ю.А.* Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А.: Физ.-мат. и техн. науки. – 1987. – № 7. – С. 29 – 33.
2. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. – Москва: Гостехиздат, 1953. – 264 с.
3. *Клячко С.Д.* Об использовании преобразования инверсии для моделирования в некоторых задачах теории упругости и пластичности // Прикл. механика и техн. физика. – 1972. – № 2. – С. 134 – 136.
4. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1951. – 608 с.
5. *Лурье А.И.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
6. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1935. – 674 с.
7. *Максимович В.Н., Пляцко Г.В.* Применение метода инверсии к определению напряжений в неоднородных телах // Прикл. механика. – 1974. – **10**, № 10. – С. 70 – 76.
8. *Милн-Томсон Л.* Теоретическая гидродинамика. – Москва: Мир, 1964. – 660 с.
9. *Некислих К.М., Острик В.І.* Розклинювання пружного клина // Вісн. Київського ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія «Фіз.-мат. науки». – 2009. – № 3. – С. 91 – 96.
10. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
11. *Ростовцев Н.А.* К задаче о кручении упругого полупространства // Прикл. математика и механика. – 1955. – **19**. – 55 – 60.
12. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1977. – 735 с.
13. *Michell J.H.* The inversion of plane stress // Proc. London Math. Soc. – 1902. – **34**. – P. 134.
14. *Michell J.H.* The flexure of a circular plate // Proc. London Math. Soc. – 1902. – **34**. – P. 223 – 238.
15. *Ostrik V.I.* Inversion symmetry of the solutions of basic boundary-value problems of two-dimensional elasticity theory for a wedge // J. of Mathem. Scie. – 2020. – **247**, N 1. – P. 108 – 138.
16. *Ostryk V.I., Shchokotova O.M.* Sliding contact of a punch with elastic wedge // Mater. Sci. – 2012. – **47**, N 4. – P. 514 – 526.

Поступила 16.04.2019 Утверждена в печать 09.07.2020