

О.С.Лимарченко, А.А.Нефедов, Е.А.Семенович

**ПРОЯВЛЕНИЕ ВТОРИЧНЫХ РЕЗОНАНСОВ ПРИ МАЯТНИКОВЫХ  
КОЛЕБАНИЯХ РЕЗЕРВУАРОВ С ЖИДКОСТЬЮ**

*Киевский национальный университет им. Т. Шевченко,  
просп. Глушкова, 4е, 01033, Киев, Украина; e-mail: olelim2010@yahoo.com*

**Abstract.** A problem of oscillation of the reservoir on pendulum suspension with the movable suspension point and partially filled with the ideal incompressible liquid is considered. This problem is studied in the nonlinear joint statement. It is shown that consideration of the compatibility of the system components motion results in the considerable changing of values of frequencies and the order of arrangement the system normal modes of oscillations for their allocation according to ascending order of frequencies. It was ascertained that for the short and medium lengths of pendulum suspensions, the first anti-symmetric mode, which is usually the main in the development of resonant processes, is excited not on its resonant frequency, but the frequency of pendulum oscillations and frequencies of secondary (nonlinear) resonances on the bases of nonlinear redistribution of energy. A correspondence of development of the dynamical processes in the system with fundamental regularities of nonlinear wave generation, ascertained in epy theoretical and experimental publications, is shown.

**Key words:** nonlinear dynamics, combined motion, pendulum suspension, secondary resonances.

**Введение.**

При исследовании задач динамики резервуаров с жидкостью со свободной поверхностью в большинстве случаев предполагается, что движение резервуаров является заданным, а движение жидкости происходит без учета ее обратного влияния на движение несущего тела [5, 6, 16, 17]. Основная группа практически важных задач характеризуется тем, что масса жидкости значительно превосходит массу «сухой» несущей конструкции и это приводит к необходимости переходить к рассмотрению совместного движения резервуаров с жидкостью. В первую очередь, этот переход приводит к необходимости пересмотра собственных частот колебаний системы, что сразу ведет к существенным отличиям поведения системы в режиме совместных колебаний от системы в режиме заданного движения несущего тела. Важным элементом такого изменения частот является не только изменение их величин, но и смена очередности расположения частот при расположении частот по степени их возрастания (а значит и приоритета в проявлении резонансных свойств соответствующих им форм колебаний). Проведенные исследования для случаев поступательного и вращательного движения несущего тела с жидкостью [7 – 14] показывают, что изменения частот могут быть существенными. Так, например, частоты колебаний по первой антисимметричной форме колебаний для случая поступательного движения несущего тела могут увеличиться в 2-2,5 раза, а для случая углового движения несущего тела на маятниковом подвесе – в 4-5 раз, что фундаментально меняет диапазон и форму протекания околорезонансных процессов.

В настоящей работе показан характер изменения частот свободных колебаний резервуаров с жидкостью на основе модели совместного движения составляющих компонент системы для разных вариантов движения несущего тела и показано, что в системе при определенных вариантах маятникового закрепления несущего тела (которые исследуются значительно сложнее, чем случаи поступательного движения несущего тела) наблюдается проявление вторичных резонансов, под которыми понимаются резонансы, устанавливающиеся на основе нелинейных механизмов, которые не проявляются вообще в рамках линейного моделирования системы.

### 1. Определение частот собственных колебаний при разных способах закрепления несущего тела.

Дальнейшие исследования проведены на основе модели резервуара как абсолютно твердого тела, а жидкость рассматривается в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. При этом движение жидкости предполагается безвихревым. В рамках таких предположений можно ввести потенциал скоростей жидкости, что позволяет определить дискретный спектр колебаний жидкости и далее представлять ее движение в виде разложения по формам собственных колебаний. Такой подход к построению нелинейной модели совместного движения системы был развит в работах [2] и на его основе было рассмотрено большой круг теоретических и прикладных задач [7 – 9, 13 – 15]. В дальнейших примерах мы ограничимся случаем вертикального кругового цилиндрического резервуара.

Частотные параметры систем будем определять на основе уравнений движения системы для линейной модели [8], учитывающей только первую антисимметричную форму колебаний свободной поверхности жидкости, движение которой характеризуется амплитудой  $a_1$ . Поступательное движение системы вдоль оси  $Ox$  характеризуется амплитудой отклонения от начального состояния  $\varepsilon_x$ , а угловое движение вокруг оси  $Oy$  характеризуется углом  $\alpha_1$ . Система уравнений совместного движения в рамках таких предположений примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \frac{1}{\alpha_1^v} \ddot{\varepsilon}_x B_{1x}^1 + \frac{1}{2\alpha_1^v} \ddot{\alpha}_1 E_{11}^{1*} + \omega_1^2 a_1 &= 0; \\ \frac{\rho}{M_r + M_l} \ddot{a}_1 B_{1x}^1 + \ddot{\varepsilon}_x + \frac{\rho}{M_r + M_l} \ddot{\alpha}_1 F_2^1 &= 0; \\ \ddot{a}_1 E_{11}^{1*} + 2\ddot{\varepsilon}_x F_2^1 + 2\ddot{\alpha}_1 \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{11} + E_{11}^2 \right) + \alpha_1 \frac{2g}{\rho} [M_r (R_x + H/4) + M_l (R_x + H/2)] &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь остальные обозначения представляют собой коэффициенты уравнений движения, определяемые через квадратуры от форм колебаний свободной поверхности жидкости и потенциала Стокса – Жуковского. Также обозначено  $\rho$  – плотность жидкости;  $J_{res}^{11}$  – момент инерции резервуара относительно оси  $Oy$ , проходящей через центр невозмущенной свободной поверхности жидкости;  $M_r$  и  $M_l$  – массы резервуара и жидкости;  $H$  – глубина заполнения резервуара;  $R_x$  – длина маятникового подвеса, отсчитываемая от точки подвеса к центру невозмущенной свободной поверхности жидкости.

Если предположить, что в системе движение происходит без учета совместного характера движения составляющих компонент, то можно получить следующие парци-

альные частоты  $\omega_a^p = \sqrt{\frac{\mu_1 g}{R} \tanh \frac{\mu_1 g}{R}}$  – для жидкости;  $\omega_a^p = 0$  – для поступательного движения несущего тела и  $\omega_a^p = \sqrt{\frac{M_r h_r + M_l h_l}{J_{res}^{11}}}$  – для углового (маятникового) движе-

ния несущего тела (здесь  $\mu_1$  – волновое число для первой антисимметричной формы колебаний свободной поверхности жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения,  $R$  – радиус цилиндрического резервуара,  $h_r$  и  $h_l$  положения центров масс резервуара и жидкости относительно центра невозмущенной свободной поверхности жидкости). Однако для определения собственных частот колебаний системы в совместном движении резервуара с жидкостью следует воспользоваться таким характеристическим уравнением для определения частот  $\lambda$ , вытекающим из системы (1)

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \omega_1^2 & \frac{1}{\alpha_1^y} B_{1x}^1 \lambda^2 & \frac{1}{2\alpha_1^y} E_{11}^{1*} \lambda^2 \\ \frac{\rho}{M_r + M_l} B_{1x}^1 \lambda^2 & \lambda^2 & \frac{\rho}{M_r + M_l} F_2^1 \lambda^2 \\ E_{11}^{1*} \lambda^2 & 2F_2^1 \lambda^2 & 2\left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{11} + E_{11}^2\right) \lambda^2 + \frac{2g}{\rho} [M_r (R_x + H/4) + M_l (R_x + H/2)] \end{vmatrix} = 0.$$

Приведем некоторые численные результаты определения частот совместных колебаний, полученные для случая  $M_r = 0,1M_l$  для разных длин маятникового подвеса резервуара и  $R = 1$  м. В таблице в первой колонке приведены значения длин подвесов резервуара, во второй колонке приведена частота парциальных колебаний по первой антисимметричной форме, в третьей колонке приведена парциальная частота маятниковых колебаний резервуара для случая неподвижной точки подвеса, в четвертой колонке приведены частоты совместных колебаний резервуара и жидкости для случая точки подвеса маятника, движущейся по заданному закону (верхнее значение соответствует движению близкому к маятниковым колебаниям, нижнее – близкому к колебаниям свободной поверхности жидкости), в пятой колонке представлены результаты для полностью связанной задачи с подвижной точкой подвеса, движение которой наперед неизвестно (верхнее значение соответствует движению близкому к маятниковым колебаниям, нижнее – близкому к колебаниям свободной поверхности жидкости).

1	2	3	4	5
$l = 1R$	4,14431	2,47842	2,24312	2,26729
			6,69986	16,63085
$l = 2R$	4,14431	1,96189	1,85304	1,86112
			6,10821	12,45135
$l = 8R$	4,14431	1,07442	1,05895	1,05934
			5,52733	9,75099

Как видно из результатов табличных данных частоты совместных колебаний системы для маятниковых колебаний имеют тенденцию к незначительному убыванию, а частоты колебаний жидкости сильно возрастают (от 23% до 400%), что соответствует результатам теоремы об изменении частот в механических системах при переходе к связанным колебаниям. Такое существенное изменение частот колебаний жидкости в режиме связанных колебаний в системе показывает, что игнорирование учета фактора совместности колебаний компонент системы является недопустимым.

Известно [3, 4, 8, 13, 14], что при совместном движении резервуара и жидкости связанное движение устанавливается только между параметрами движения резервуара и теми формами, которые приводят к изменению положения центра масс объема жидкости в ее возмущенном движении. Для кругового цилиндрического резервуара это будут только антисимметричные формы (окружной номер  $m = 1$ ), для которых и проявляется существенное изменение частот по сравнению с их парциальными значе-

ниями. В тоже время частоты колебаний жидкости для форм с окружным номером, отличным от 1, не будут меняться при переходе к режиму движения системы с учетом совместности движения ее компонент. Поэтому существенное изменение частот совместных колебаний антисимметричных форм может привести к изменению порядка следования форм колебаний в режиме совместных колебаний по сравнению со случаем заданного движения несущего тела, если располагать формы колебаний в порядке возрастания частот. Проиллюстрируем это на рис. 1, где для случая заданного движения точки подвеса и длины маятникового подвеса  $l = R$  представлена тенденция изменения частот от парциальных к совместным с указанием их расположения на числовой оси.

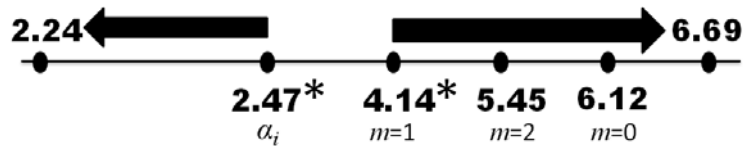


Рис. 1

На рисунке парциальные частоты, соответствующие маятниковым колебаниям резервуара и колебаниям свободной поверхности жидкости по первой антисимметричной форме обозначены звездочкой. При переходе к моделированию в рамках модели совместного движения новые значения частот становятся 2,24 вместо 2,47 (уменьшение минимальной частоты) и 6,69 вместо 4,14 (увеличение максимальной частоты). Как видно из рисунка, теперь частота колебаний свободной поверхности жидкости по первой антисимметричной форме становится уже не второй по порядку возрастания частот (после маятниковой частоты), а четвертой, превосходя частоты колебаний свободной поверхности жидкости по формам колебаний с окружными номерами 2 и 0. Естественно ожидать ослабления проявления ее резонансных свойств по сравнению со случаем заданного движения несущего тела, который соответствует частоте 4,14. Приведенный рисунок соответствует длине подвеса  $l = R$ . Для больших длин подвеса (как это следует из табл. 1) увеличение частоты колебаний свободной поверхности по антисимметричной форме будет проявляться слабее. Соответственно, в зависимости от длины маятникового подвеса поведение системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» можно разбить на такие три диапазона. Первый диапазон (большие длины подвеса), когда частота антисимметричной формы колебаний будет меньше 5,45 и будет занимать второе место после частоты маятниковых колебаний. Второй диапазон (средние длины подвеса), когда частота антисимметричной формы колебаний будет находиться в интервале от 5,45 до 6,12, то есть будет на третьем месте. И третий диапазон (короткие длины подвеса), когда частота антисимметричной формы колебаний будет больше 6,12 (четвертое место в порядке возрастания частот). Исходя из известных свойств проявления резонансных свойств системы в зависимости от положения резонансных частот в общем ряду собственных частот колебаний следует ожидать разные тенденции в поведении системы для разных длин подвесов резервуара. Заметим при этом, что в рамках линейной теории резонансы для форм колебаний с окружными номерами  $m = 2$  и  $m = 0$  вообще не проявляются. Поэтому остается открытым вопрос о поведении системы в рамках нелинейной модели совместного движения.

## 2. Нелинейная математическая модель совместного движения системы.

Моделирование резонансных свойств системы «резервуар – жидкость» будем производить на основе математической модели, выведенной в [3], прошедшей многостороннюю апробацию, включая сравнение с качественными результатами экспериментов [2, 7, 8, 9, 13 – 15]. За независимые параметры, характеризующие движение системы, приняты амплитуда возбуждения форм колебаний свободной поверхности жидкости  $a_i$ , параметры поступательного  $\varepsilon_i$  и вращательного  $\alpha_i$  движения несущей конструкции. Согласно теореме о том, что безвихревое движение идеальной однород-

ной жидкости полностью определяется движением ее границ, выбранные параметры полностью характеризуют динамику системы, а именно,  $a_i$  определяют движение свободной поверхности, а  $\varepsilon_i$  и  $\alpha_i$  – движение твердых границ области, занимаемой жидкостью, При этом по этим параметрам полностью восстанавливаются характеристики движения свободной поверхности жидкости  $\xi$ , поле скоростей жидкости и угловая скорость движения несущего тела  $\omega_i$ .

Математическая модель системы «резервуар – жидкость» представляет собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которой вторые производные неизвестных входят линейно, что создает предпосылки для аналитического приведения рассматриваемой системы уравнений к форме Коши, удобной для последующего численного интегрирования. Система уравнений движения с обозначениями, приведенными в [2] преобразована к форме, соответствующей движению точки маятникового подвеса по заданному закону  $\varepsilon(t)$ , имеет такой вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} = \\
& = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 - \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i \bar{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \bar{B}_{rijk}^4 \right\} + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pij}^{3*} + E_{pij}^{3*} - E_{prij}^{3*} + E_{prji}^{3*}) \right] + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[ E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\
& + \dot{\varepsilon} \cdot \left[ \sum_i \dot{a}_i \bar{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \bar{D}_{ijr}^3 + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \bar{D}_{ijk}^4 \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \bar{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\bar{F}_{pir}^3 + \bar{F}_{pri}^3) + \right. \\
& \left. + \sum_{i,j} a_i a_j (\bar{F}_{pij}^4 + \bar{F}_{pij}^4 + \bar{F}_{prij}^4) \right] + g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) + \\
& + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3); \\
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
& = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left( \omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) - \\
& - 2 \ddot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[ \bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 + \sum_i a_i a_j a_k \bar{F}_{pijk}^4 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \\
& + 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left( \sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \bar{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
& + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[ (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) + \right. \\
& \left. + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \right]. \quad (2)
\end{aligned}$$

Система уравнений движения содержит две группы связанных уравнений:  $N$  уравнений для определения обобщенных амплитудных параметров движения свободной поверхности жидкости  $a_i$ ; три уравнения для определения параметров углового движения конструкции. В целом система содержит  $N + 3$  уравнений, которые описывают совместное движение нелинейной системы «конструкция – жидкость».

В систему уравнений (2) входят индексные выражения, характеризующие динамические связи в системе, инерциальные и статические характеристики конструкции, а также внешние моменты, действующие на конструкцию. При этом все эти коэффициенты определяются в квадратурах от форм колебаний свободной поверхности жидкости и потенциалов Стокса – Жуковского [2]. Далее для численных примеров рассматривается модель движения жидкости, учитывающая  $N = 12$  форм колебаний свободной поверхности жидкости.

### 3. Особенности проявления вторичных резонансов при колебаниях резервуара с жидкостью на маятниковом подвесе.

В системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью на маятниковом подвесе с точкой подвеса», движущейся по заданному закону, основным резонансом является резонанс на частоте близкой к частоте колебаний маятникового подвеса без учета подвижности жидкости. В режиме совместных колебаний собственной формой колебаний будет вид движения, включающий в себя не только маятниковые колебания резервуара, но и противофазные колебания свободной поверхности жидкости по антисимметричной форме. Такой резонанс наиболее чувствителен к кинематическим возмущениям движения точки подвеса.

Для коротких и средних длин подвесов следующей по порядку идет частота колебаний 5,45, соответствующая колебаниям по форме с окружным номером  $m = 2$ . Такой резонанс не проявляется в рамках модели, не учитывающей совместность движения и в рамках линейной теории. Рассмотрим колебания системы при возмущении движения точки подвеса маятника по закону  $\varepsilon_x = A \sin \omega t$ . Для длины подвеса  $l = R$ ,  $A = 0,0022$  и  $\omega = 5,4571$  получим следующую картину развития процессов в системе. На рис. 2 представлены законы изменения возмущения свободной поверхности жидкости на стенке резервуара  $\xi$  и угла отклонения маятника  $\varphi$  во времени.

Обращает на себя внимание существенный рост амплитуд колебаний жидкости и угловых возмущений в системе, а также проявление модуляции колебаний. Законы изменения этих параметров не выходят на установившиеся значения с ростом времени. Анализ изменения внутренних параметров системы показывает, что рост амплитуд колебаний жидкости на стенке резервуара в основном происходит из-за роста ам-

плитуд антисимметричных форм колебаний ( $m = 1$ ), хотя сами колебания происходят на частоте колебаний формы  $m = 2$ . При этом амплитуды колебаний формы  $m = 2$  изменяются незначительно (до  $0,025R$ ). Фактически форма колебаний  $m = 2$  играет в этом случае роль своеобразного катализатора проводника энергии от поступательного движения точки подвеса к форме колебаний  $m = 1$ , а сама возбуждается незначительно.

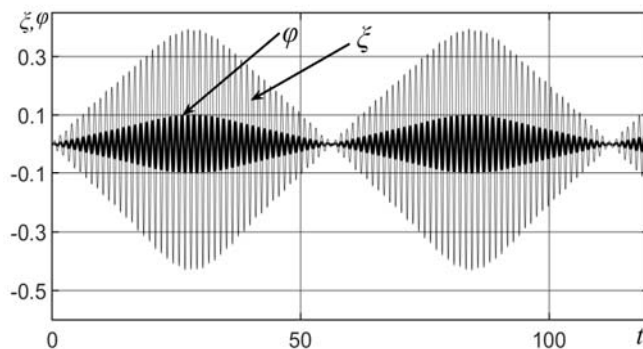


Рис. 2

Анализ развития вторичного резонанса на частоте формы колебаний  $m = 2$  показал, что с увеличением длины подвеса его проявление ослабевает, а для поступательного движения резервуара он не проявляется вообще. Исследования показали, что наблюдаемый в таком резонансе энергообмен полностью определяется коэффициентами уравнений движения  $E_{pi}^*$ ,  $E_{pij}^{2*}$ ,  $E_{pijk}^{3*}$ , которые отвечают за связь волнового движения жидкости и углового движения резервуара. В частности, этими коэффициентами определяется также действие сил Кориолиса на частицы жидкости. Естественно, вклад таких членов при поступательном движении несущего тела не происходит, что и объясняет отсутствие такого резонанса для этого варианта движения несущего тела.

Рассмотрим теперь случай проявления внутреннего резонанса системы. Подберем длину маятникового подвеса таким образом, чтобы частоты форм колебаний для  $m = 1$  и  $m = 2$  совпали. Это происходит для длины маятникового подвеса  $l = 12R$ . При таких же параметрах движения точки маятникового подвеса получим аналогичный закон изменения возмущений свободной поверхности жидкости на стенке резервуара во времени (рис. 3).

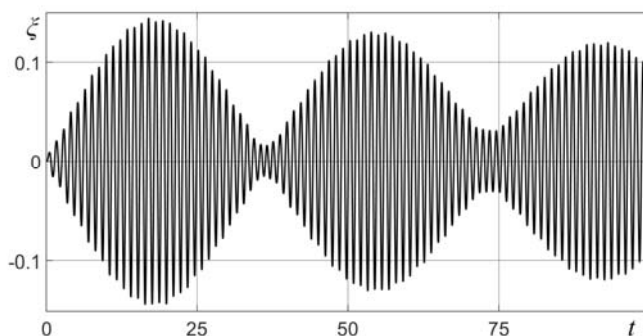


Рис. 3

Анализ изменения амплитуд отдельных форм колебаний показывает, что основной вклад в возмущения свободной поверхности жидкости на стенках резервуара дает форма колебаний  $m = 1$ , а возмущение других форм на порядок меньше. Заметим,

однако, что колебания по осесимметричной форме  $a_3$  ( $m=0$ ) развиваются таким образом, что амплитуда этой формы  $a_3$  всегда больше нуля (рис. 4), что обеспечивает несимметричность профилей волн, когда высота гребня волны выше глубины впадины, подтверждаемую экспериментально.

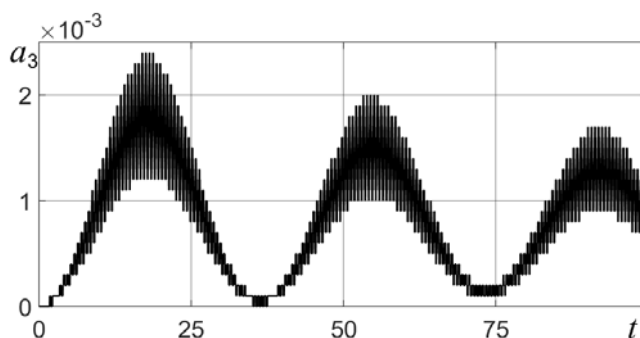


Рис. 4

В целом настройка системы на условия внутреннего резонанса  $l=12R$  не внесла существенных изменений в развитие процессов по сравнению со случаем  $l=R$ .

Таким образом, показано, что в системе «резервуар – жидкость на маятниковом подвесе» в широком диапазоне изменения длин подвеса проявляется резонанс по форме  $m=2$ , который в рамках линейной модели или модели, не учитывающий совместность движения составляющих компонент, не проявляется вообще. Важно также отметить, что в случае поступательного движения несущего тела такого типа резонанс для формы колебаний  $m=2$  не проявляется вообще.

Рассмотрим теперь специфику проявления резонансных свойств формы колебаний  $m=0$ , которая для коротких подвесов является третьей частотой при их размещении в порядке возрастания значений частот. Анализ численных примеров показывает, что практически для всех значений коротких и средних длин подвесов этот резонанс не проявляется. Однако в режиме настройки на внутренний резонанс между формами колебаний, соответствующих  $m=0$  и  $m=1$  удалось обнаружить проявление резонанса. Для значений  $l=1,95R$  (резонансная длина подвеса), амплитуды колебаний точки подвеса маятника  $A=0,01$  и частоты  $\omega=6,1261$  получена такая картина возмущения волн на стенке резервуара (рис. 5).

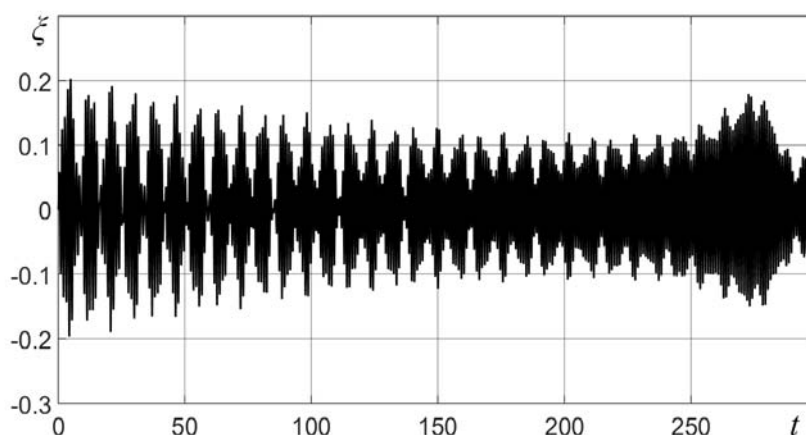


Рис. 5



Причем анализ вклада амплитуд форм колебаний в формирование этого возмущения свободной поверхности жидкости на стенке показывает, что примерно до 200 с это возмущение формируется в основном за счет первой антисимметричной формы колебаний. Однако далее происходит вовлечение в процесс колебаний первой осесимметричной формы, что видно из графика (рис. 6).

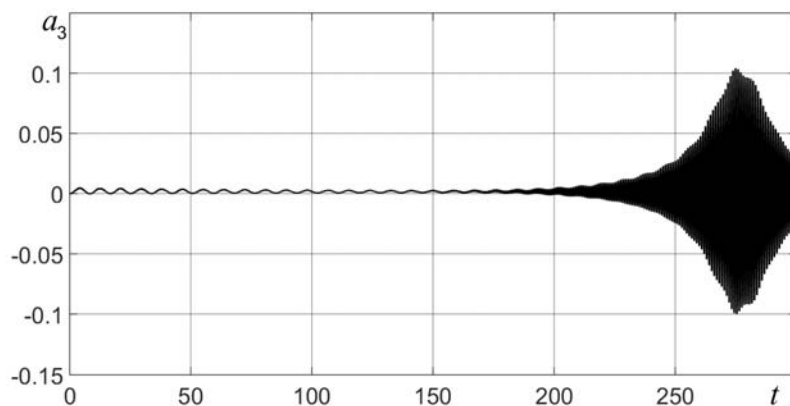


Рис. 6

Наличие такого резонанса подтверждается также спектральной характеристикой системы, построенной за 300 с колебаний (рис. 7). Из этой диаграммы видно наличие двух ярко выраженных пиков для частот 5,45 (форма колебаний  $m = 2$ ) и 6,12 (совмещенная частота, соответствующая формам  $m = 1$  и  $m = 0$ ). Причем из диаграммы следует, что резонанс на частоте 6,12 энергетически выражен сильнее.

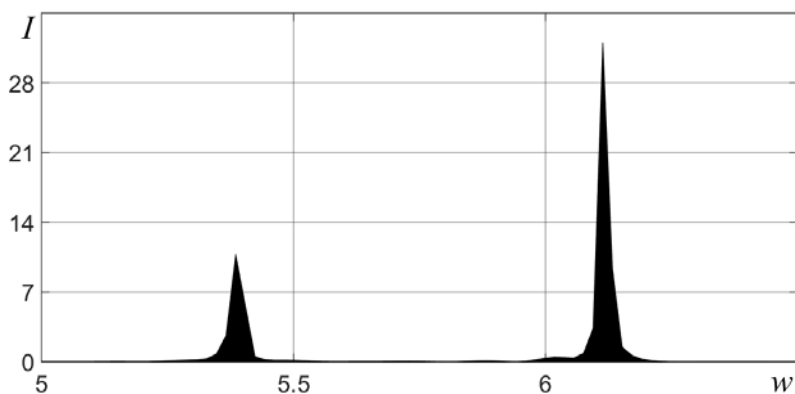


Рис. 7

Таким образом, резонансные свойства третьей по порядку формы колебаний (осесимметричная форма), которая в рамках линейного моделирования или в рамках модели, не учитывающей совместный характер движения компонент, не проявляются вообще, выражены значительно слабее, чем маятниковые колебания системы и колебания в окрестности резонанса по форме  $m = 2$ . Только настройка системы на внутренний резонанс с формой колебаний  $m = 1$  создает условия для проявления этого нелинейного резонанса.

Наконец, для формы колебаний  $m = 1$  (первая антисимметричная форма колебаний) для коротких подвесов, которая является четвертой в последовательности размещения форм колебаний по степеням роста их собственных частот, обнаружить проявление резонансных свойств практически не удастся. В совокупности получается, что применение коротких и средних маятниковых подвесов позволяет избежать резо-

нансов на частоте первой антисимметричной формы, которая в большинстве других случаев является основной при резонансных колебаниях.

Важно отметить общее свойство для всех типов резонансов, проанализированных в данной работе, а также для резонансов по маятниковой форме колебаний [13, 14]: для всех режимов нет асимптотического выхода на постоянное значение амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости, однако сильно проявляется модуляция колебаний. Это отличие от результатов работ [5, 16] в последнее время получило широкое экспериментальное подтверждение [5, 19 – 21] и качественное обоснование на основе парадокса Ферми – Паста – Улама [1], в частности, с применением к многочастотным волновым процессам на поверхности идеальной несжимаемой жидкости [18], где указано, что в многомодовых волновых процессах с трансцендентным соотношением частот волновой процесс никогда не выйдет на периодический режим колебаний. Именно многочастотный характер развивающихся процессов приводит к необходимости исследования нелинейных задач динамики резервуаров с жидкостью на основе многомодовых моделей с учетом совместного движения компонент системы, что в свою очередь может сильно преобразовать частотные характеристики системы.

### **Заключение.**

На основе теоретического моделирования резонансных процессов исследованы закономерности развития угловых колебаний резервуара и частично заполняющей его жидкости в рамках нелинейной модели, учитывающей совместный характер движения составляющих компонент системы. Показано, что учет совместности движения компонент привел к существенному изменению величин частот и порядка следования форм колебаний системы при их размещении в порядке возрастания частот. Установлено, что для коротких и средних длин маятниковых подвесов первая антисимметричная форма, которая обычно является главной в развитии резонансных процессов, теперь возбуждается не на своей резонансной частоте, а на частоте маятниковых колебаний системы и частотах вторичных (нелинейных) резонансов на основе нелинейного перераспределения энергии. Показано соответствие развития динамических процессов в системе основным закономерностям нелинейного волнообразования, установленным в теоретических и экспериментальных работах.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто задачу про коливання резервуара на маятниковому підвісі з рухомою точкою підвісу, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною. Задачу розглянуто в нелінійній сумісній постановці. Показано, що розгляд сумісності руху компонент системи призводить до суттєвої зміни величин частот і порядку розташування форм коливань системи при їх розміщенні в порядку зростання частот. Встановлено, що для коротких і середніх довжин маятникових підвісів перша антисиметрична форма, яка зазвичай є головною в розвитку резонансних процесів, тепер збуджується не на своїй резонансній частоті, а на частоті маятникових коливань і частотах вторинних (нелінійних) резонансів на основі нелінійного перерозподілу енергії. Показано відповідність розвитку динамічних процесів в системі основним закономірностям нелінійного хвилювання, встановленим в теоретичних і експериментальних роботах.

1. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. – Москва: Наука, 1988. – 368 с.
2. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с.
3. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – Москва: Машиностроение, 1978. – 247 с.
4. Abramson H. The dynamic behavior of liquid in moving container. – Washington: NASA SP-106, 1966. – 467 p.
5. Faltinsen O.M., Rognebakke O.M., Timokha A.N. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // Physics of Fluids. – 2006. – 1, N 18. – P. 1 – 14.
6. Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 950 p.

7. *Konstantinov A.V., Limarchenko O.S.* Effect of the Viscosity and Capillarity of Fluid on the Nonlinear Dynamics of a Tank Partially Filled with a Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 2. – P. 130 – 138.
8. *Konstantinov A.V., Limarchenko O.S., Lukianchuk V.V., Nefedov A.A.* Dynamic Methods of Damping the Oscillation in Structure-Free-Surface Fluid System // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 1. – P. 58 – 67.
9. *Konstantinov A.V., Limarchenko O.S., Mel'nik V.N., Semenova I.Yu.* Generalizing the Faraday Problem of the Parametric Oscillations of a Cylindrical Tank Partially Filled with a Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 1. – P. 59 – 66.
10. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 4. – P. 353 – 364.
11. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 1. – P. 12 – 63.
12. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Nonlinear Vibrations of Fluid-Filled Cylindrical Shells with Initial Imperfections // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 2. – P. 121 – 129.
13. *Limarchenko O., Nefedov A.* Resonant modes of the motion of a cylindrical reservoir on a movable pendulum suspension with a free-surface liquid // *Mathematical Modeling and Computing.* – 2018. – **5**, N 2. – P. 178 – 183.
14. *Limarchenko O.S., Semenovich K.O.* Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system // *J. of Mathematical Sciences.* – 2017. – **222**, N 3. – P. 296 – 303.
15. *Limarchenko O.S., Tkachenko R.V.* Influence of Spring Attachment on the Dynamics of a Fluid-Filled Cylindrical Tank on a Moving Platform // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **50**, N 3. – P. 289 – 294.
16. *Lukovsky I. A.* Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. – Berlin: De Gruyter, 2015. – 410 p.
17. *Miles J.* Resonantly forced surface waves in a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* – 1984. – **149**. – P. 15 – 31.
18. *Onorato M., Vozella L., Proment D., Lvov V.* Route to thermalization in the  $\alpha$ -Fermi – Pasta – Ulam system // *Proc. Nat. Acad. Scie. of USA.* – 2015. – **112**, N 14. – P. 4208 – 4213.
19. *Pal P.* Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // *Int. J. of Recent Trends in Engineering.* – 2009. – **1**, N 6. – P. 1 – 5.
20. *Shaoa W., Yanga J., Hu Z, Tao L.* Coupled analysis of nonlinear sloshing and ship motions // *Appl. Ocean Research.* – 2015. – **47**. – P. 85 – 97.
21. *Zhang C., Li Y., Meng Q.* Fully nonlinear analysis of second-order sloshing resonance in a three-dimensional tank // *Computers and Fluids.* – 2015. – **116**. – P. 88 – 104.

Поступила 09.04.2019

Утверждена в печать 09.07.2020