

Л. П. Х о р о ш у н

ВЛИЯНИЕ МЕЖСЛОЕВЫХ ДЕФЕКТОВ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТОВ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОЙ НАМОТКИ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина: e-mail: lkhoroshun@ukr.net*

Abstract. The problem of the effective elastic properties of a longitudinal-transverse winding composite material having a layered-fibrous structure with the imperfect contact conditions between layers with mutually orthogonal fiber directions is considered. The imperfect contact is modeled by the presence of an interphase porous isotropic layer having the perfect contacts with layers. The basis is the stochastic equations of elasticity for unidirectional fibrous and layered composites. The problem is reduced to two stages - predicting the effective properties of a unidirectional fiber composite by the given properties of the fibers and matrix and then predicting the effective properties of the layered composite by the known properties of the layers. The effect of interlayer defects on the effective elastic properties of a layered fiber composite is studied.

Key words: stochastic composite, laminated fiber composite, effective elastic properties, imperfect contact, porous interphase layers.

Введение.

Одной из наиболее распространенных технологий изготовления баллонов, труб, корпусов ракетных двигателей и других элементов конструкций из современных композитных материалов является намотка пропитанных связующим пучков стекловолокон или углеволокон на наружную поверхность технологической оправки. Среди множества способов укладки армирующих волокон наиболее простым является продольно-поперечная намотка. Это приводит к образованию композитного материала слоисто-волокнистой структуры, где соседние слои представляют собой однонаправленный волокнистый композитный материал с взаимно ортогональными направлениями волокон. В этом случае задача о прогнозировании эффективных упругих свойств сводится к двум этапам – прогнозирование эффективных свойств однонаправленного волокнистого материала по заданным свойствам волокон и связующего, а затем прогнозирование эффективных свойств слоистого материала по заданным свойствам слоев.

Создание композитных материалов с заданными механическими свойствами основано на объемном сочетании различных компонентов с определенными свойствами в виде тех или иных структур, связанных в монолит матрицей. Высокие показатели жесткостных и прочностных свойств композитных материалов обеспечиваются максимальным нагружением армирующих элементов. Это требует надлежащего сцепления (адгезии) этих материалов с матрицей, которое в идеальном варианте описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений при переходе через границу раздела фаз и носит название совершенных условий на межфазной границе [13 – 16, 18, 19]. Большинство работ по прогнозированию эффективных упругих свойств композитных материалов основано на такой идеальной модели контакта на межфазной границе.

Однако реальные условия на межфазной границе могут существенно отличаться от совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Прежде всего, это связано с различием структуры и внутренней связи компонентов композитного материала, что ведет к наличию между контактирующими компонентами не границы, а некоторой переходной зоны [2, 3], толщина которой может достигать нескольких микронов и более. С целью усиления прочности сцепления компонентов в ряде композитных материалов армирующие элементы подвергают поверхностной обработке в виде нанесения аппретирующих веществ, свойства которых отличаются от соответствующих свойств наполнителя и матрицы. Это увеличивает переходную зону между матрицей и включением. В переходной зоне на некоторых участках возможно образование микротрещин и микропор вследствие недостаточного смачивания поверхности наполнителя связующим или аппретом, а также повреждаемости в процессе изготовления или эксплуатации конструкции.

Таким образом, согласно перечисленным факторам в реальном композитном материале компоненты разделены не поверхностью, а некоторым материальным слоем с дефектами в виде микротрещин и микропор. Поэтому модель совершенного контакта компонентов в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений на межфазной границе может приводить к существенным погрешностям при прогнозировании эффективных свойств композитных материалов. Это привело к разработке различных вариантов несовершенных условий контакта матрицы и наполнителя [4 – 7, 11, 12, 18, 20], которые могли бы описывать те или иные особенности реального контакта. Среди них следует отметить приближенные модели [11, 18], где межфазный слой заменяется так называемой «несовершенной межфазной поверхностью», разделяющей компоненты, с модифицированными граничными условиями контакта. Здесь, как правило, используется чисто гипотетический подход, примером которого является предположение о существовании скачка перемещений на «несовершенной межфазной поверхности» и его пропорциональности непрерывным поверхностным напряжениям.

Однако, более адекватной представляется модель существования между компонентами межфазного материального слоя [5, 12] как некоторого дополнительного компонента, свойства которого отличны от свойств матрицы и включений. При этом на поверхностях раздела межфазного слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений, что дает основание рассматривать межфазный слой как третью фазу. Если исходить из модели существования межфазного слоя, то асимптотическое разложение исходных уравнений по толщине межфазного слоя дает возможность сформулировать более точные граничные условия на «несовершенной межфазной поверхности», которые в первом приближении содержат скачки как перемещений, так и поверхностных напряжений.

Моделирование несовершенных условий контакта матрицы и наполнителя наличием межфазного слоя в качестве третьей фазы усложняет решение задачи прогнозирования эффективных свойств композитных материалов и требует адекватных методов решения. Один из таких методов состоит в сведении трехфазного материала к двухфазному путем замены включения с межфазным слоем эквивалентным включением, которое имеет эквивалентные или эффективные свойства исходного композитного включения [12]. В результате исходная задача сводится к последовательному решению двух задач об эффективных свойствах двухфазных материалов.

Следует отметить, что образование микротрещин и микропор в межфазном слое в процессе изготовления и эксплуатации конструкций из композитных материалов свидетельствует об актуальности исследований задач механики трещин на границе раздела компонентов в плане как классических, так и неклассических проблем механики разрушения [8 – 10].

В настоящей работе рассматривается задача об эффективных упругих свойствах композитного материала продольно-поперечной намотки при наличии межслоевых дефектов в виде микропор. Материал имеет слоисто-волоконистую структуру, где соседние слои представляют собой однонаправленный волокнистый композитный материал с взаимно ортогональными направлениями волокон. Между ними находятся

межфазные пористые изотропные слои, которые имеют совершенный контакт с однонаправленными волокнистыми слоями в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений.

Эффективные упругие свойства однонаправленного волокнистого материала со стохастическим расположением волокон определяются на основе стохастических дифференциальных уравнений упругости для многокомпонентного композитного материала с трансверсально-изотропными волокнами, где плоскость изотропии нормальна к направлению волокон. Исходные уравнения приводятся к системе стохастических интегральных уравнений относительно деформаций, которые после условного осреднения преобразуются в систему алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций. В случае, когда модули упругости волокнистого композитного материала статистически изотропны в плоскости, нормальной к направлению волокон, решение системы алгебраических уравнений имеет аналитическое решение. Эффективные упругие свойства являются трансверсально-изотропными и зависят от упругих свойств компонентов, их объемных содержаний и выбора постоянных однородного тела сравнения.

Определение эффективных упругих свойств слоистого композитного материала по известным свойствам слоев, образованных однонаправленным волокнистым материалом и межфазными слоями, осуществляется на основе стохастических дифференциальных уравнений упругости, где модули упругости являются случайными функциями одной координаты. При однородных макронапряжениях и макродеформациях флуктуации перемещений, напряжения и деформации также будут функциями одной координаты. В этом случае задача об эффективных свойствах слоисто-волокнистых материалов продольно-поперечной намотки с межфазными слоями имеет точное аналитическое решение. На этой основе исследовано влияние межслоевых дефектов на эффективные свойства композитов продольно-поперечной намотки.

§1. Однонаправленный волокнистый композит.

Рассмотрим композитный материал, образованный однонаправленными хаотически расположенными трансверсально-изотропными волокнами, связанными в монолит некоторым изотропным связующим, представляющим матрицу. Будем предполагать, что между волокнами и матрицей существует идеальный контакт в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений при переходе через границу раздела компонентов (фаз). Вследствие хаотичности расположения волокон упругие модули будут случайными статистически однородными и изотропными функциями координат плоскости, нормальной к направлению волокон. Пусть волокна направлены вдоль оси x_3 . Тогда зависимости между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} в микроточке можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33}; & \sigma_{23} &= 2c_{44}\varepsilon_{23}; & \sigma_{22} &= c_{12}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{13} &= 2c_{44}\varepsilon_{13}; & \sigma_{33} &= c_{13}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + c_{33}\varepsilon_{33}; & \sigma_{12} &= 2(c_{11} - c_{12})\varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ – модули упругости, являющиеся случайными функциями координат x_1, x_2 [13]. Объемные содержания и модули упругости волокон обозначим соответственно $c_k, c_{11k}, c_{12k}, c_{13k}, c_{33k}, c_{44k}$ ($k = 1, \dots, N$).

Если композитный материал находится в условиях однородных нагрузок, то напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} также будут статистически однородными случайными функциями координат x_1, x_2 .

Представим напряжения σ_{ij} , деформации ε_{ij} и перемещения u_i в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0; \quad u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0. \quad (1.2)$$

Тогда, подставляя (1.1), (1.2) в уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.3)$$

и учитывая соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.4)$$

приходим к уравнениям равновесия относительно флуктуаций перемещений

$$\begin{aligned} m_c u_{i,rr}^0 + k_c u_{r,ri}^0 &= -[(k' - m') \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + 2m' \varepsilon_{ij} + c_{13} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}]_{,j}; \\ \mu_c u_{3,rr}^0 &= -2(\mu' \varepsilon_{3j})_{,j} \quad (i, j, r = 1, 2); \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$(k' = k - k_c; m' = m - m_c; \mu' = \mu - \mu_c; 2k = c_{11} + c_{12}; 2m = c_{11} - c_{12}; \mu = c_{44}),$$

где k_c, m_c, μ_c – упругие постоянные однородного тела сравнения.

Воспользуемся функциями Грина, удовлетворяющими уравнениям

$$\begin{aligned} m_c G_{ij,rr} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + k_c G_{ir,rj} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + \delta (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) \delta_{ij} &= 0; \\ \mu_c G_{,rr} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) + \delta (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) \delta_{ij} &= 0 \quad (i, j, r, p = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогда на основе теоремы взаимности Бетти из уравнений (1.5), (1.6) следует

$$\begin{aligned} u_i^{0(1)} &= \int_{D^{(2)}} G_{ia} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) [(k'^{(2)} - m'^{(2)}) \varepsilon_{rr}^{(2)} \delta_{a\beta} + 2m'^{(2)} \varepsilon_{a\beta}^{(2)} + c_{13}^{(2)} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{a\beta}]_{,\beta} dD^{(2)}; \\ u_3^{0(1)} &= 2 \int_{D^{(2)}} G (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) (\mu'^{(2)} \varepsilon_{3\beta}^{(2)})_{,\beta} dD^{(2)} \quad (i, \alpha, \beta, p, r = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь индексы в круглых скобках сверху обозначают точку плоскости.

Подставляя (1.2), (1.7) в (1.4), получаем интегральные уравнения относительно деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(1)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \int_{D^{(2)}} G_{(i\alpha,j)\beta} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) [(k'^{(2)} - m'^{(2)}) \varepsilon_{rr}^{(2)} \delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + c_{13}^{(2)} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{\alpha\beta}] dD^{(2)} + \\ &+ \int_{S^{(2)}} G_{(i\alpha,j)\beta} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) [(k'^{(2)} - m'^{(2)}) \varepsilon_{rr}^{(2)} \delta_{\alpha\beta} + 2m'^{(2)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + c_{13}^{(2)} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{\alpha\beta}] n_\beta^{(2)} dS^{(2)}; \quad (1.8) \\ \varepsilon_{3j}^{(1)} &= \langle \varepsilon_{3j} \rangle + \int_{D^{(2)}} G_{,j\beta} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) \mu'^{(2)} \varepsilon_{3\beta}^{(2)} dD^{(2)} + \int_{S^{(2)}} G_{,j} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) \mu'^{(2)} \varepsilon_{3\beta}^{(2)} n_\beta^{(2)} dS^{(2)} \\ &(i, j, \alpha, \beta = 1, 2), \end{aligned}$$

где n_q – направляющие косинусы нормали к криволинейной бесконечно удаленной границе S области D .

Функции Грина, удовлетворяющие уравнениям (1.6), определяются формулами

$$\begin{aligned} G_{ij} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) &= \frac{1}{4\pi m_c (k_c + m_c)} \left[(k_c + 2m_c) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + k_c \frac{(x_i^{(1)} - x_i^{(2)})(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})}{r^2} \right]; \\ G_{ij} (x_p^{(1)} - x_p^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi \mu_c} \ln \frac{1}{r}, \quad r^2 = (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})(x_k^{(1)} - x_k^{(2)}), \quad (i, j, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Представим систему интегральных уравнений (1.9) в символической форме

$$\varepsilon^{(1)} = \langle \varepsilon \rangle + K(x^{(1)} - x^{(2)}) c^{(2)} \varepsilon^{(2)} \quad (1.10)$$

и умножим (1.10) на условную плотность $f(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, c^{(2)} | \nu^{(1)})$ (плотность распределения деформаций в точках $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ и модулей упругости в точке $x^{(2)}$ при условии, что точка $x^{(1)}$ находится в ν -компоненте) и проведем статистическое усреднение. Тогда, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, приходим к системе алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon^{\nu} \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \sum_{k=1}^N K(x) p_{\nu k}(x) c'_k \langle \varepsilon^k \rangle \quad (\nu = 1, \dots, N), \quad (1.11)$$

где $p_{\nu k}(x^{(1)} - x^{(2)})$ – вероятность перехода из ν -компонента в точке $x^{(1)}$ в k -компонент в точке $x^{(2)}$, которая удовлетворяет условиям

$$c_k p_{k\nu} = c_{\nu} p_{\nu k}(x); \quad \sum_{k=1}^N p_{\nu k}(x) = 1; \quad p_{\nu k}(0) = \delta_{\nu k}; \quad p_{\nu k}(\infty) = c_k, \quad (1.12)$$

где c_k – объемное содержание k -компонента.

Если свойства композитного материала статистически изотропны в плоскости, перпендикулярной направлению волокон, то условные вероятности $p_{\nu k}(x^{(1)} - x^{(2)})$ зависят только от расстояния между точками $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. В этом случае после интегрирования в (1.11) получим

$$\langle \varepsilon^{\nu} \rangle = \langle \varepsilon \rangle + A \sum_{k=1}^N (\delta_{\nu k} - c_k) c'_k \langle \varepsilon^k \rangle, \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (1.13)$$

или в индексной форме

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle + A_{ijpq} \sum_{k=1}^N (\delta_{\nu k} - c_k) [(k'_k - m'_k) \langle \varepsilon_{rr}^k \rangle \delta_{pq} + 2m'_k \varepsilon_{pq}^k + c_{13k} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{pq}]; \\ \langle \varepsilon_{i3}^{\nu} \rangle &= \langle \varepsilon_{i3} \rangle + A_{3i3q} \sum_{k=1}^N (\delta_{\nu k} - c_k) \mu^k \langle \varepsilon_{q3} \rangle \quad (i, j, p, q, r = 1, 2, \nu = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где ненулевые компоненты A_{ijpq} определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{1111} = A_{2222} &= -\frac{k_c + 4m_c}{8m_c(k_c + m_c)}; \quad A_{1122} = A_{2211} = \frac{k_c}{8m_c(k_c - m_c)}; \\ A_{1212} = A_{2121} = A_{1221} = A_{2112} &= -\frac{k_c + 2m_c}{8m_c(k_c + m_c)}; \\ A_{1313} = A_{2323} = A_{3131} = A_{3232} = A_{1331} = A_{2332} = A_{3113} = A_{3223} &= -\frac{1}{4\mu_c}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

§2. Эффективные упругие постоянные волокнистого композита.

Решение системы уравнений (1.14) можно представить в виде

$$\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle = \left(\frac{1}{k_{\nu} + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} V_{ijpq} + \frac{1}{m_{\nu} + \bar{m}} \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} D_{ijpq} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2(k_v + \bar{k})} \left(c_{13}^v - \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{c_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}; \quad \langle \varepsilon_{33}^v \rangle = \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\
& \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle = \frac{1}{\mu_v + \bar{\mu}} \left\langle \frac{1}{\mu_v + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, p, q = 1, 2),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\bar{k} &= m_c; \quad \bar{m} = \frac{k_c m_c}{k_c + 2m_c}; \quad \bar{\mu} = \mu_c; \quad \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1}; \\
V_{ijpq} &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{pq}; \quad D_{ijpq} = \frac{1}{2} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{jq} \delta_{ip} - \delta_{ij} \delta_{pq});
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k + \bar{m}} \right)^{-1}; \quad \left\langle \frac{\lambda_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle = \sum_{k=1}^N \frac{c_k c_{13k}^1}{k_k + \bar{k}}; \quad \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1}.$$

Подставляя (2.1) в (1.1), получаем выражения средних напряжений ν -компонента через макродеформации

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{ij}^v \rangle &= 2(k_v^* V_{ijpq} + m_v^* D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + c_{13v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{33}^v \rangle = c_{13v}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + c_{33v}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\
\langle \sigma_{i3}^v \rangle &= 2\mu_v^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \quad k_v^* = \frac{k_v}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1}; \quad m_v^* = \frac{m_v}{m_v + \bar{m}} \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1}; \\
c_{13v}^* &= \frac{c_{13v}^v}{k_v + \bar{k}} \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1}; \quad \mu_v^* = \frac{\mu_v}{\mu_v + \bar{\mu}} \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1};
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$c_{33v}^* = c_{33}^v + \frac{c_{13}^v}{k_v + \bar{k}} \left(\left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{c_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle - c_{13}^v \right) \quad (i, j, p, q, r = 1, 2, \nu = 1, \dots, N).$$

Осредняя соотношения (2.3), приходим к соотношениям упругости для макрообъема волокнистого материала

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{ij} \rangle &= 2(k^* V_{ijpq} + m^* D_{ijpq}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle + c_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}; \\
\langle \sigma_{33} \rangle &= c_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + c_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\mu^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где эффективные модули упругости определяются формулами

$$c_{11}^* = k^* + m^*; \quad c_{12}^* = k^* - m^*; \quad c_{11\nu}^* = k_\nu + m_\nu; \quad c_{12\nu}^* = k_\nu - m_\nu;$$

$$k^* = \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{k}{k + \bar{k}} \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k k_k}{k_k + \bar{k}} \right);$$

$$m^* = \left\langle \frac{1}{m + \bar{m}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{m}{m + \bar{m}} \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{m_k + \bar{m}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k m_k}{m_k + \bar{m}} \right);$$

$$\begin{aligned}
c_{13}^* &= \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{c_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k c_{13k}}{k_k + \bar{k}} \right); \\
c_{33}^* &= \langle c_{33} \rangle + \left\langle \frac{1}{k + \bar{k}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{c_{13}}{k + \bar{k}} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{(c_{13})^2}{k_v + \bar{k}} \right\rangle = \\
&= \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k_k + \bar{k}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k c_{13k}}{k_k + \bar{k}} \right)^2 + \sum_{k=1}^N c_k \left(c_{33k} - \frac{c_{13k}^2}{k_k + \bar{k}} \right); \\
c_{44}^* &= \mu^* = \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\mu}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k \mu_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Представим соотношения (2.4) в виде зависимостей макродеформаций от макро-напряжений

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ij} \rangle &= 2(r^* V_{ijpq} + s^* D_{ijpq}) \langle \sigma_{pq} \rangle + s_{13}^* \langle \sigma_{33} \rangle \delta_{ij}; \quad \langle \varepsilon_{33} \rangle = s_{13}^* \langle \sigma_{rr} \rangle + s_{33}^* \langle \sigma_{33} \rangle; \\
\langle \varepsilon_{i3} \rangle &= \frac{1}{2\mu^*} \langle \sigma_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где эффективные упругие податливости выражаются через эффективные модули упругости формулами

$$2r^* = \frac{c_{33}^*}{2\Delta}; \quad 2s^* = \frac{1}{2m^*}; \quad s_{13}^* = \frac{-c_{13}^*}{2\Delta}; \quad s_{33}^* = \frac{k^*}{\Delta}; \quad \Delta = k^* c_{33}^* - c_{13}^{*2}. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) в (2.3), получаем выражения средних напряжений ν -компонента через макронапряжения

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{ij}^\nu \rangle &= 2(p_{1\nu}^* V_{ijpq} + p_{2\nu}^* D_{ijpq}) \langle \sigma_{pq} \rangle + p_{3\nu}^* \langle \sigma_{33} \rangle \delta_{ij}; \quad \langle \sigma_{33}^\nu \rangle = p_{4\nu}^* \langle \sigma_{rr} \rangle + p_{5\nu}^* \langle \sigma_{33} \rangle; \\
\langle \sigma_{i3}^\nu \rangle &= p_{6\nu}^* \langle \sigma_{i3} \rangle \quad (i, j, r, p, q = 1, 2, \nu = 1, \dots, N),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где коэффициенты определяются согласно (2.3), (2.7) формулами

$$\begin{aligned}
p_{1\nu}^* &= 2k_\nu^* r^* + c_{13\nu}^* s_{13}^*; \quad p_{2\nu}^* = 2m_\nu^* s^*; \quad p_{3\nu}^* = 2k_\nu^* s_{13}^* + c_{13\nu}^* s_{33}^*; \\
p_{4\nu}^* &= 2c_{13\nu}^* r^* + c_{33\nu}^* s_{13}^*; \quad p_{5\nu}^* = 2c_{13\nu}^* s_{13}^* + c_{33\nu}^* s_{33}^*; \quad p_{6\nu}^* = \frac{\mu_\nu^*}{\mu^*} \quad (\nu = 1, \dots, N).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

В случае двухкомпонентного однонаправленного волокнистого композитного материала выражения эффективных модулей упругости (2.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
k^* &= \langle k \rangle - \frac{c_1 c_2 (k_1 - k_2)^2}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}; \quad m^* = \langle m \rangle - \frac{c_1 c_2 (m_1 - m_2)^2}{c_1 m_2 + c_2 m_1 + \bar{m}}; \\
c_{13}^* &= \langle c_{13} \rangle - \frac{c_1 c_2 (k_1 - k_2) (c_{131} - c_{132})}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}; \quad c_{33}^* = \langle c_{33} \rangle - \frac{c_1 c_2 (c_{131} - c_{132})^2}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + \bar{k}}; \\
c_{44}^* &= \mu^* = \langle \mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \bar{\mu}},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где индексы 1, 2 относятся, соответственно, к волокнам и матрице.

В решение задачи (2.1) – (2.9) наряду с модулями упругости и объемными содержаниями компонентов, являющимися вполне определенными параметрами, входят постоянные тела сравнения k_c , m_c , μ_c , которые определяются неоднозначным выбором тела сравнения. Поэтому возникает вопрос о корректном выборе постоянных упругости тела сравнения. При формальном решении статистически нелинейной задачи об эффективных упругих свойствах КМ стохастической структуры упругие постоянные тела сравнения обычно выбираются в виде математических ожиданий упругих модулей или податливостей [18], хотя при этом не исключаются и другие варианты. Однако здесь корректность выбора тела сравнения зависит непосредственно от связности компонентов, что особенно наглядно проявляется для двухкомпонентного однонаправленного волокнистого КМ. В самом деле, здесь физический смысл имеет выбор

$$k_c = \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle^{-1} = \left(\frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2} \right)^{-1}; \quad m_c = \left\langle \frac{1}{m} \right\rangle^{-1} = \left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^{-1}; \quad \mu_c = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} = \left(\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

если жесткость волокон выше жесткости матрицы, и

$$k_c = \langle k \rangle = c_1 k_1 + c_2 k_2; \quad m_c = \langle m \rangle = c_1 m_1 + c_2 m_2; \quad \mu_c = \langle \mu \rangle = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, \quad (2.12)$$

если жесткость матрицы выше жесткости волокон. Из (2.10) – (2.12), соответственно, следуют формулы для КМ с бесконечно жесткими волокнами и с нулевой жесткостью волокон, т.е. с цилиндрическими порами.

В случае многокомпонентного КМ выбор тела сравнения не имеет такой наглядности как для двухкомпонентного КМ, т.е. задача значительно усложняется.

§3. Слоистый композит с ортотропными слоями.

Рассмотрим слоистый композит, составленный из ортотропных слоев, плоскости симметрии которых совпадают с координатными плоскостями. Зависимости между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda_{11} \varepsilon_{11} + \lambda_{12} \varepsilon_{22} + \lambda_{13} \varepsilon_{33}; & \sigma_{23} &= 2\lambda_{44} \varepsilon_{23}; & \sigma_{22} &= \lambda_{12} \varepsilon_{11} + \lambda_{22} \varepsilon_{22} + \lambda_{23} \varepsilon_{33}; \\ \sigma_{13} &= 2\lambda_{55} \varepsilon_{13}; & \sigma_{33} &= \lambda_{13} \varepsilon_{11} + \lambda_{23} \varepsilon_{22} + \lambda_{33} \varepsilon_{33}; & \sigma_{12} &= 2\lambda_{66} \varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где упругие постоянные $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{33}, \lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66}$ являются статистически однородными случайными функциями одной координаты x_3 , направленной по нормали к слоям.

Соотношения (3.1) необходимо дополнить уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.2)$$

и соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3.3)$$

связывающими деформации ε_{ij} с перемещениями u_i .

Если макрообъем слоистого материала находится в условиях однородных макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ и макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$, то деформации ε_{ij} , напряжения σ_{ij} и флуктуации перемещений $u_i^0 = u_i - \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j$ также будут случайными функциями одной координаты x_3 . В этом случае уравнения равновесия (3.2) упрощаются

$$\sigma_{i3,3} = 0, \quad (3.4)$$

откуда следуют интегралы

$$\sigma_{i3} = C_i, \quad C_i = \text{const}. \quad (3.5)$$

Выражения для деформаций согласно (3.3) имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{2} (u_{i,3}^0 \delta_{j3} + u_{j,3}^0 \delta_{i3}). \quad (3.6)$$

Согласно (3.5), (3.6) получим

$$\begin{aligned} \lambda_{55} (2 \langle \varepsilon_{13} \rangle + u_{i,3}^0) &= C_1; \quad \lambda_{44} (2 \varepsilon_{23} + u_{2,3}^0) = C_2; \\ \lambda_{11} \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{23} \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{33} (\langle \varepsilon_{33} \rangle + u_{3,3}^0) &= C_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решая (3.7) относительно производных от флуктуаций перемещений и проводя осреднение, находим

$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \langle \lambda_{55}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{13} \rangle; \quad C_2 = 2 \langle \lambda_{44}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{23} \rangle; \\ C_3 &= \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} (\langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle). \end{aligned} \quad (3.8)$$

На основе соотношений (3.1), (3.6) – (3.8) получим выражения микронапряжений через макродеформации

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left[\lambda_{11} + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \left(\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13} \right) \right] \langle \varepsilon_{11} \rangle + \\ &+ \left[\lambda_{12} + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \left(\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23} \right) \right] \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\ \sigma_{22} &= \left[\lambda_{12} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \left(\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13} \right) \right] \langle \varepsilon_{11} \rangle + \\ &+ \left[\lambda_{22} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \left(\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23} \right) \right] \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\ \sigma_{33} &= \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} (\langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle); \\ \sigma_{23} &= 2 \langle \lambda_{44}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{23} \rangle; \quad \sigma_{13} = 2 \langle \lambda_{55}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{13} \rangle; \quad \sigma_{12} = 2 \lambda_{66} \langle \varepsilon_{12} \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Осредняя соотношения (3.9), получаем зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle &= \lambda_{11}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{23} \rangle = 2 \lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{23} \rangle; \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= \lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{22}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{23}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{13} \rangle = 2 \lambda_{55}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{23}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{12} \rangle = 2 \lambda_{66}^* \langle \varepsilon_{12} \rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где эффективные постоянные определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\ \lambda_{12}^* &= \langle \lambda_{12} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13} \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle; \end{aligned}$$

$$\lambda_{13}^* = \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{22}^* = \langle \lambda_{22} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{23}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle; \quad (3.11)$$

$$\lambda_{23}^* = \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{33}^* = \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{44}^* = \langle \lambda_{44}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{55}^* = \langle \lambda_{55}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{66}^* = \langle \lambda_{66} \rangle.$$

§4. Слоистый композит продольно-поперечной намотки.

Хотя каждый слой слоистого композита продольно-поперечной намотки является трансверсально-изотропным материалом, однако различные углы направления волокон в соседних слоях приводят к ортотропии композита в макрообъеме. Поэтому в основу решения необходимо брать схему слоистого материала, состоящего из ортотропных слоев. Тогда, обозначив модули упругости ν -компонента слоистого материала символами $\lambda_{11}^{(\nu)}, \lambda_{12}^{(\nu)}, \lambda_{13}^{(\nu)}, \lambda_{22}^{(\nu)}, \lambda_{23}^{(\nu)}, \lambda_{33}^{(\nu)}, \lambda_{44}^{(\nu)}, \lambda_{55}^{(\nu)}, \lambda_{66}^{(\nu)}$, можем представить выражения эффективных модулей упругости согласно (3.11) в виде

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \sum_{\nu} s_{\nu} \lambda_{11}^{(\nu)} + \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^2 \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1} - \sum_{\nu} \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)^2}}{\lambda_{33}^{(\nu)}}; \\ \lambda_{12}^* &= \sum_{\nu} s_{\nu} \lambda_{12}^{(\nu)} + \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right) \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu} \lambda_{23}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right) \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1} - \sum_{\nu} \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)} \lambda_{23}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}}; \\ \lambda_{13}^* &= \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right) \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{23}^* = \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu} \lambda_{23}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right) \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \\ \lambda_{22}^* &= \sum_{\nu} s_{\nu} \lambda_{22}^{(\nu)} + \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu} \lambda_{23}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^2 \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1} - \sum_{\nu} \frac{s_{\nu} \lambda_{23}^{(\nu)^2}}{\lambda_{33}^{(\nu)}}; \\ \lambda_{33}^* &= \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{44}^* = \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu}}{\lambda_{44}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{55}^* = \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu}}{\lambda_{55}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{66}^* = \sum_{\nu} s_{\nu} \lambda_{66}^{(\nu)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где s_{ν} – объемное содержание ν -компонента.

Если принять, что слои, образованные связанными в монолит волокнами, состоят из двух компонентов с идеальным контактом на границе раздела, то их эффективные модули упругости $c_{11}^*, c_{12}^*, c_{13}^*, c_{33}^*, c_{44}^*$ определяются согласно (2.5) формулами

$$c_{11}^* = k^* + m^*; \quad c_{12}^* = k^* - m^*; \quad k_{\nu} = \frac{1}{2}(c_{11\nu} + c_{12\nu}); \quad m_{\nu} = \frac{1}{2}(c_{11\nu} - c_{12\nu}) \quad (\nu = 1, 2);$$

$$k^* = \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu}}{k_{\nu} + \bar{k}} \right)^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu} k_{\nu}}{k_{\nu} + \bar{k}} \right); \quad m^* = \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu}}{m_{\nu} + \bar{m}} \right)^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu} m_{\nu}}{m_{\nu} + \bar{m}} \right);$$

$$c_{13}^* = \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu}}{k_{\nu} + \bar{k}} \right)^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu} c_{13\nu}}{k_{\nu} + \bar{k}} \right); \quad (4.2)$$

$$c_{33}^* = \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu}}{k_{\nu} + \bar{k}} \right)^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu} c_{13\nu}}{k_{\nu} + \bar{k}} \right) + \sum_{\nu=1}^2 c_{\nu} \left(c_{33\nu} - \frac{c_{13\nu}^2}{k_{\nu} + \bar{k}} \right);$$

$$c_{44}^* = \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu}}{c_{44\nu} + \bar{c}_{44}} \right)^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu} c_{44\nu}}{c_{44\nu} + \bar{c}_{44}} \right);$$

$$\bar{k} = m_c; \quad \bar{m} = \frac{k_c m_c}{k_c + 2m_c}; \quad \bar{c}_{44} = \sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu}}{c_{44\nu}}; \quad m_c = \sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu}}{m_{\nu}}; \quad k_c = \sum_{\nu=1}^2 \frac{c_{\nu}}{k_{\nu}}.$$

Рассмотрим трехкомпонентный слоистый композитный материал продольно-поперечной намотки с объемным содержанием слоев s_1, s_2, s_3 , относящихся соответственно к направлениям волокон вдоль осей x_1 и x_2 , а также изотропным межфазным слоям. Очевидно, что такой материал следует рассматривать как слоистый композит, составленный из ортотропных слоев с различными упругими модулями. Поэтому воспользуемся зависимостями (3.10), (3.11). Здесь, согласно (2.4), (2.5) упругие модули для трех компонентов представляются в виде

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{(1)} &= c_{33}^*; \quad \lambda_{12}^{(1)} = c_{13}^*; \quad \lambda_{13}^{(1)} = c_{13}^*; \quad \lambda_{22}^{(1)} = c_{11}^*; \quad \lambda_{23}^{(1)} = c_{12}^*; \quad \lambda_{33}^{(1)} = c_{11}^*; \\ \lambda_{44}^{(1)} &= \frac{1}{2}(c_{11}^* - c_{12}^*); \quad \lambda_{55}^{(1)} = c_{44}^*; \quad \lambda_{66}^{(1)} = c_{44}^*; \\ \lambda_{11}^{(2)} &= c_{11}^*; \quad \lambda_{12}^{(2)} = c_{13}^*; \quad \lambda_{13}^{(2)} = c_{12}^*; \quad \lambda_{22}^{(2)} = c_{33}^*; \quad \lambda_{23}^{(2)} = c_{13}^*; \quad \lambda_{33}^{(2)} = c_{11}^*; \\ \lambda_{44}^{(2)} &= c_{44}^*; \quad \lambda_{55}^{(2)} = \frac{1}{2}(c_{11}^* - c_{12}^*); \quad \lambda_{66}^{(2)} = c_{44}^*; \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\lambda_{11}^{(3)} = \lambda_{22}^{(3)} = \lambda_{33}^{(3)} = K_3 + \frac{4}{3}\mu_3; \quad \lambda_{12}^{(3)} = \lambda_{13}^{(3)} = \lambda_{23}^{(3)} = K_3 - \frac{2}{3}\mu_3; \quad \lambda_{44}^{(3)} = \lambda_{55}^{(3)} = \lambda_{66}^{(3)} = \mu_3,$$

где K_3, μ_3 , соответственно, модули объемного сжатия и сдвига межфазного слоя. Индексы 1, 2, 3 сверху в круглых скобках обозначают соответственно слои с направлением волокон вдоль осей x_1, x_2 и межфазовый слой.

Зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ трехкомпонентного слоистого композитного материала продольно-поперечной намотки с межслоевыми дефектами имеют вид (3.10), где эффективные упругие постоянные определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \sum_{\nu=1}^3 s_{\nu} \lambda_{11}^{(\nu)} + \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^2 \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1} - \sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)^2}}{\lambda_{33}^{(\nu)}}; \\ \lambda_{12}^* &= \sum_{\nu=1}^3 s_{\nu} \lambda_{12}^{(\nu)} + \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right) \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu} \lambda_{23}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right) \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1} - \sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)} \lambda_{23}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}}; \\ \lambda_{13}^* &= \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu} \lambda_{13}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right) \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{23}^* = \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu} \lambda_{23}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right) \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \\ \lambda_{22}^* &= \sum_{\nu=1}^3 s_{\nu} \lambda_{22}^{(\nu)} + \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu} \lambda_{23}^{(\nu)}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^2 \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1} - \sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu} \lambda_{23}^{(\nu)^2}}{\lambda_{33}^{(\nu)}}; \\ \lambda_{33}^* &= \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu}}{\lambda_{33}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{44}^* = \left(\sum_{\nu} \frac{s_{\nu}}{\lambda_{44}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{55}^* = \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{s_{\nu}}{\lambda_{55}^{(\nu)}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{66}^* = \sum_{\nu=1}^3 s_{\nu} \lambda_{66}^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

§5. Численные результаты.

Численное исследование влияния межслоевых дефектов на эффективные упругие свойства композитных материалов продольно-поперечной намотки проводилось для модели материала слоисто-волоконистой структуры, где соседние слои представляют собой однонаправленный волокнистый материал с взаимно ортогональными направлениями волокон. Между однонаправленными волокнистыми слоями находятся изотропные пористые межфазные слои, имеющие совершенный контакт с однонаправленными волокнистыми слоями в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений.

Материалы волокон и матрицы представляют собой соответственно алюмоборосиликатное стекло и отвержденное эпоксидное связующее, которые имеют [1] следующие значения упругих модулей объемного сжатия и сдвига:

$$K_c = 33,333 \text{ ГПа}; \mu_c = 25 \text{ ГПа}; K_s = 3,333 \text{ ГПа}; \mu_s = 1,111 \text{ ГПа}. \quad (5.1)$$

Упругие модули межфазного слоя без пор принимаем равными соответствующим модулям отвержденного эпоксидного связующего K_s, μ_s . При наличии пор p упругие модули межфазного слоя K_m, μ_m определяются формулами [16]

$$K_m = \frac{4K_s\mu_s(1-p)^2}{4\mu_s + (3K_s - 4\mu_s)}; \mu_m = \frac{\mu_s(9K_s + 8\mu_s)(1-p)^2}{9K_s + 8\mu_s - (3K_s - 4\mu_s)p}. \quad (5.2)$$

В безразмерных единицах, представляющих отношения соответствующих модулей к модулю сдвига матрицы μ_s значения (5.1) и выражения (5.2) можно представить соответственно в виде

$$K_1 = 30; \mu_1 = 22,5; K_2 = 3; \mu_2 = 1; \quad (5.3)$$

$$K_3 = \frac{4K_2(1-p)^2}{4 + (3K_2 - 4)}; \mu_3 = \frac{(9K_2 + 8)(1-p)^2}{9K_2 + 8 - (9K_2 - 4)p}. \quad (5.4)$$

Объемные содержания волокон c_1 и матрицы c_2 в слоях с продольным и поперечным направлением волокон принимаем одинаковыми. Поэтому эффективные трансверсально-изотропные упругие свойства в локальных системах координат, связанных с направлением волокон в соседних слоях, будут одинаковы и вычисляются по формулам (4.2). Однако в общей (глобальной) системе координат они будут различными $\lambda_{11}^{(1)}, \lambda_{12}^{(1)}, \lambda_{13}^{(1)}, \lambda_{22}^{(1)}, \lambda_{23}^{(1)}, \lambda_{33}^{(1)}, \lambda_{44}^{(1)}, \lambda_{55}^{(1)}, \lambda_{66}^{(1)}$ и $\lambda_{11}^{(2)}, \lambda_{12}^{(2)}, \lambda_{13}^{(2)}, \lambda_{22}^{(2)}, \lambda_{23}^{(2)}, \lambda_{33}^{(2)}, \lambda_{44}^{(2)}, \lambda_{55}^{(2)}, \lambda_{66}^{(2)}$. Вместе с соответствующими модулями упругости $\lambda_{11}^{(3)}, \lambda_{12}^{(3)}, \lambda_{13}^{(3)}, \lambda_{22}^{(3)}, \lambda_{23}^{(3)}, \lambda_{33}^{(3)}, \lambda_{44}^{(3)}, \lambda_{55}^{(3)}, \lambda_{66}^{(3)}$ межфазного слоя они определяются соотношениями (4.3). Если обозначить объемные содержания слоев соответственно s_1, s_2, s_3 , то для численного

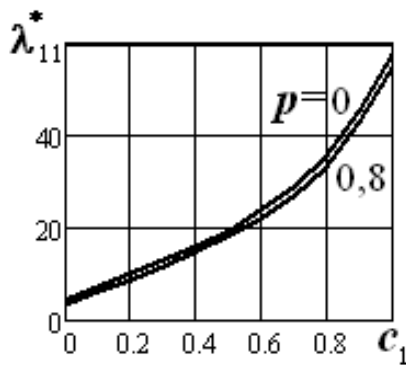


Рис. 1

определения эффективных упругих постоянных композитного материала продольно-поперечной намотки следует воспользоваться формулами (4.4).

Вычисления проводились для объемных содержаний слоев $s_1 = s_2 = 0,48, s_3 = 0,04$. Результаты представлены на рис. 1 – 5 в виде зависимой некоторых характерных модулей упругости композита $\lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \lambda_{33}^*, \lambda_{55}^*, \lambda_{66}^*$ от объемного содержания c_1 стекловолокон в слоях и пористости p межфазного слоя.

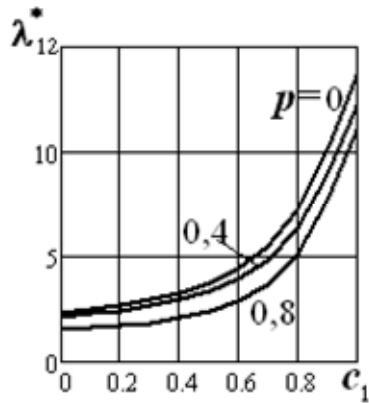


Рис. 2

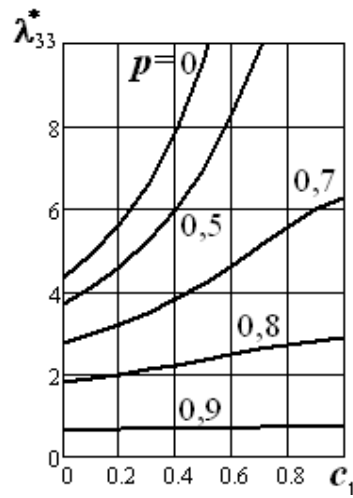


Рис. 3

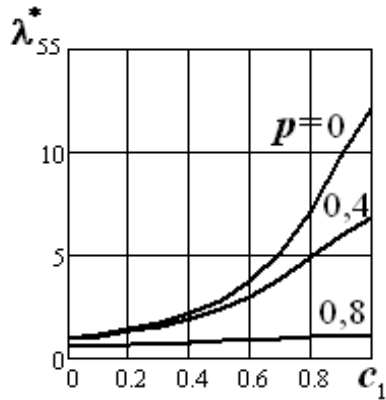


Рис. 4

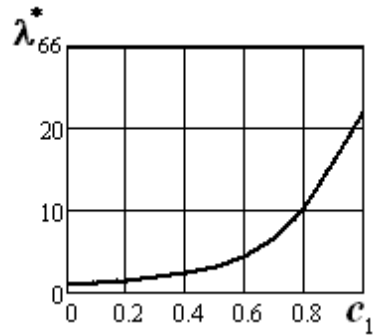


Рис. 5

Характер наблюдаемых закономерностей соответствует физическим представлениям о поведении композитного материала под воздействием приложенных нагрузок.

Заключение.

Композитные материалы, изготовленные методом продольно-поперечной намотки на оправку пучков пропитанных связующим волокон, имеют слоисто-волокнистую структуру, где соседние слои представляют собой однонаправленный волокнистый материал с взаимно ортогональными направлениями волокон. В случае совершенных условий контакта слоев на границе их раздела (межфазной границе) выполняются условия непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. В случае несовершенных условий контакта слоев среди различных вариантов моделей наиболее адекватной представляется модель межфазного слоя с определенными свойствами, который имеет совершенный контакт с однонаправленными волокнистыми слоями в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений на границах их раздела. Задача о прогнозировании эффективных упругих свойств композитных материалов продольно-поперечной намотки сводится к двум этапам – прогнозирование эффективных свойств однонаправленного волокнистого композита стохастической структуры по заданным свойствам волокон и матрицы, а затем прогнозирование эффективных свойств слоистого композита стохастической структуры по известным свойствам волокнистых слоев с взаимно ортогональными направлениями волокон и межфазного пористого изотропного слоя. Решение этой задачи позволяет исследовать закономерности зависимостей эффективных свойств слоисто-волокнистого композита продольно-поперечной намотки от объемного содержания и упругих свойств волокон и матрицы, а также от пористости межфазных слоев, которой моделируются межслоевые дефекты.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

Р Е З Ю М Е . Розглянуто задачу про ефективні пружні властивості композитного матеріалу подовжньо-поперечного намотування, що має шарувато-волокнисту структуру, з недосконалими умовами контакту між шарами з взаємно ортогональними напрямками волокон. Недосконалий контакт моделюється наявністю міжфазного пористого ізотропного шару, який має досконалі контакти з шарами. В основу покладено стохастичні рівняння пружності для однонаправленого волокнистого композиту і для шаруватого композиту. Задача зводиться до двох етапів – прогнозування ефективних властивостей однонаправленого волокнистого композиту по заданим властивостям волокон і матриці, а потім прогнозування ефективних властивостей шаруватого композиту по відомим властивостям всіх шарів, включно з міжфазним шаром. Досліджено вплив міжшарових дефектів на ефективні пружні модулі шарувато-волокнистого композиту.

1. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
2. Монокристалльные волокна и армированные ими материалы / Под редакцией А.Т. Туманова. – Москва: Мир, 1973. – 464 с.
3. Achenbach J.D., Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites // J. Mech. Phys. Solids. – 1989. – 37. – P. 381 – 393.
4. Benveniste Y. The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents // Mech. Mater. – 1985. – 4. – P. 197 – 208.
5. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // Mech. Mater. – 2001. – 33. – P. 309 – 323.
6. Gu S.T., He Q.C. Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphase as imperfect interfaces // J. Mech. Phys. – 2011. – 59. – P. 1413 – 1426.
7. Gu S.T., Liu J.T., He Q.C. Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities // Int. J. Solids Struct. – 2014. – 51. – P. 2283 – 2296.
8. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture: On the Occasion of the 50th Anniversary of the Research (Review). I. // Int. Appl. Mech. – 2019. – 54, N 2. – P. 129 – 174.
9. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture: On the Occasion of the 50th Anniversary of the Research (Review). II. // Int. Appl. Mech. – 2019. – 54, N 3. – P. 239 – 295.
10. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture: On the Occasion of the 50th Anniversary of the Research (Review). III. // Int. Appl. Mech. – 2019. – 54, N 4. – P. 342 – 415.
11. Hashin Z. Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface // Mech. Mater. – 1990. – 8. – P. 333 – 348.
12. Hashin Z. Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites // J. Mech. Phys. Solids. – 2002. – 50. – P. 2509 – 2537.
13. Khoroshun L.P. Statistical Theory of Deformation of Unidirectional Fibrous Materials // Int. Appl. Mech. – 1968. – 4, N 7. – P. 5 – 9.
14. Khoroshun L.P. Elastic Properties of Materials Reinforced by Unidirectional Short Fibers // Int. Appl. Mech. – 1972. – 8, N 12. – P. 1358 – 1363.
15. Khoroshun L.P. Prediction of Thermoelastic Properties of Materials Strengthened by Unidirectional Discrete fibers // Int. Appl. Mech. – 1974. – 10, N 12. – P. 1288 – 1293.
16. Khoroshun L.P. Methods of Random Functions in Problems of Macroscopic Properties of Microheterogeneous Media // Int. Appl. Mech. – 1978. – 14, N 2. – P. 113 – 124.
17. Khoroshun L.P. Effective Elastic Properties of Laminated Composite Materials with Interfacial Defects // Int. Appl. Mech. – 2019. – 54, N 2. – P. 187 – 198.
18. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. A model of cylindrical inhomogeneity with spring layer interface and its application to analysis of short-fiber composites // Composite Structures. – 2017. – 160. – P. 635 – 652.
19. Nazarenko L., Stolarski H., Khoroshun L., Altenbach H. Effective thermo-elastic properties of random composites with orthotropic and aligned ellipsoidal in homogeneties // Int. J. Solids Struct. – 2018. – 136 – 137. – P. 220 – 240.
20. Sangani A.S., Mo G. Elastic interactions in particulate composites with perfect as well as imperfect interfaces // J. Mech. Phys. Solids. – 1997. – 45. – P. 2001 – 2031.

Поступила 29.10.2019

Утверждена в печать 09.07.2020