

А. М. Багно

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕМ С ВЯЗКИМ ЖИДКИМ СЛОЕМ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e – mail: alexbag2016@gmail.com*

**Abstract.** A problem of the propagation of acoustic waves in a layer of viscous compressible fluid that interacts with an elastic half-space is considered. The study is carried out on the base of the three-dimensional linear equations of the classical theory of elasticity for a solid and the three-dimensional linearized Navier – Stokes equations for a viscous compressible fluid. A problem statement and an approach, based on the representations of general solutions of the linear equations for the elastic body and the linearized equations for the fluid are used. The dispersion equation, which describes the propagation of the quasi-Lamb waves in the hydroelastic system, is obtained. The dispersion curves for the normal waves in the wide frequency range are constructed. An effect of the thickness of the layer of viscous compressible fluid on the phase velocities and attenuation coefficients of acoustic waves is analyzed. It is shown that an influence of the viscosity of fluid on the wave process parameters is associated with the localization properties of waves. The developed approach and the findings make it possible to establish the limits of applicability of the models of wave processes, based on the model of an ideal compressible fluid. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Key words:** phase velocity, attenuation coefficient, elastic half-space, layer of viscous compressible fluid, harmonic waves.

**Введение.**

Одним из многих направлений, по которым проводятся исследования закономерностей распространения поверхностных акустических волн, является направление, связанное с исследованием волновых процессов в гидроупругих системах. Отметим, что важным как для фундаментальных теоретических, так и для прикладных практических разработок является знание закономерностей распространения поверхностных акустических волн в реальных упруго-жидкостных системах. Модель, предложенная в работах [3 – 6] и основанная на линеаризованной теории гидроупругости, позволяет при рассмотрении динамических задач учесть вязкость жидкости, являющейся одной из основных характеристик реальных жидких сред. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом этого фактора, приведены в [2, 4 – 9].

В данной работе для исследования распространения волн в системе, состоящей из жидкого слоя и упругого полупространства, привлекается модель вязкой сжимаемой ньютоновской жидкости. При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения Навье – Стокса для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. Предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и упругого тела, предложенные в работах [3 – 6].

**§1. Постановка задачи. Основные уравнения.**

Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, компонентами которой являются изотропное упругое полупространство и слой

вязкой сжимаемой жидкости. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Навье – Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для упругого полупространства, взаимодействующего с вязкой сжимаемой жидкостью, принимают такой вид [3 – 6]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0; \quad \sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{3} \nu^* \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const};$$

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu^* \left( \frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right); \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*. \quad (1.3)$$

Здесь введены такие обозначения:  $u_i$  – компоненты вектора смещений твердого тела  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  – плотность материала упругого полупространства;  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ламе материала твердого тела;  $v_i$  – составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$  относительно состояния покоя;  $\rho^*$  и  $p$  – возмущения плотности и давления в жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $\nu^*$  и  $\mu^*$  – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости;  $P_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  – составляющие напряжений, соответственно, в жидкости и упругом теле.

Равенства (1.1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания ньютоновской вязкой сжимаемой жидкости относительно состояния покоя и без учета тепловых эффектов описывают соотношения (1.2) – (1.3).

Далее предположим, что изотропное упругое тело занимает объем  $(-\infty < z_1 < \infty, -\infty < z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty)$  и контактирует со слоем вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $(-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 \leq h, -\infty < z_3 < \infty)$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $Oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $Oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1.1) – (1.3) при следующих граничных условиях

$$\sigma_{12} \Big|_{z_2=0} = P_{12} \Big|_{z_2=0}; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=0} = P_{22} \Big|_{z_2=0}; \quad P_{12} \Big|_{z_2=h} = 0; \quad P_{22} \Big|_{z_2=h} = 0; \quad (1.4)$$

$$v_1 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}. \quad (1.5)$$

## §2. Методика решения.

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений уравнений движения упругого тела и вязкой сжимаемой жидкости, предложенными в работах [3 – 6]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные потенциалы  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн  $\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)]$  ( $j = \overline{1,3}$ ), где  $k$  ( $k = \beta + i\gamma$ ) – волновое число;  $\gamma$  – коэффициент затухания волны;  $\omega$  – круговая частота;  $i$  – мнимая единица ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее применяя метод Фурье, приходим к трем задачам о собственных значениях для уравнений движения упругого тела и жидкости. Решая их, определяем соответствующие собственные функции. После подстановки полученных общих решений в граничные условия (1.4) и (1.5) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{mn} \left( c, \gamma, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h / c_s \right) \right\| = 0 \quad (m, n = \overline{1,6}), \quad (2.1)$$

где  $c$  – фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h$  – толщина слоя жидкости;  $c_s$  – скорость волны сдвига в материале упругого тела ( $c_s^2 = \mu / \rho$ ).

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существуют как продольная волна, так и волна сдвига. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (2.1) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работе [1]. В частности, если  $a_0$  устремить к бесконечности, то (2.1) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия упругого полупространства с несжимаемой вязкой жидкостью. Приняв динамический коэффициент вязкости  $\mu^*$  равным нулю, получим гидроупругую систему с идеальной жидкостью, результаты для которой приведены в работе [1]. Другие частные случаи, которые следуют из данной работы, связанные с исследованием волн Стоунли – Шольте (при  $h \rightarrow \infty$ ) и волн Рэлея (при  $\rho_0 = 0$ ), рассмотрены в публикациях [1, 2].

### §3. Числовые результаты и их анализ.

В дальнейшем дисперсионное уравнение (2.1) решаем численно. При этом расчеты проводим для двух гидроупругих систем. *Первая* состоит из органического стекла и воды. Она характеризуется следующими параметрами: упругое полупространство –  $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; слой жидкости –  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\mu^* = 0,001$ ,  $\bar{a}_0 = a_0 / c_s = 1,152595$ . Отметим, что материал упругого

тела этой системы (оргстекло) относится к разряду жестких. *Вторая* представляет собой волновод из стали марки 09Г2С и воды. При этом параметры выбираем такими: упругое тело –  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ; жидкость –  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ ,  $\bar{a}_0 = 0,463021$ . Этот волновод отличается тем, что материал упругого тела (сталь) является более жестким, чем оргстекло.

Результаты вычислений представлены в виде графиков на рис. 1 – 15. В частности, на рис. 1 – 7 показаны графики для упругого полупространства из органического стекла (менее жесткий материал) и воды ( $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ ). Графики для упругого полупространства из стали марки 09Г2С (более жесткий материал) и воды ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) приведены рис. 8 – 15.

На рис. 1 показана дисперсионная кривая единственной моды, существующей в гидроупругом волноводе, состоящем из упругого полупространства из оргстекла и слоя вязкой жидкости. Она отражает зависимость безразмерной величины фазовой скорости  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) моды от безразмерной величины толщины слоя жидкости  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ) при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . На рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремится фазовая скорость этой моды при возрастании толщины жидкого слоя  $\bar{h}$ .

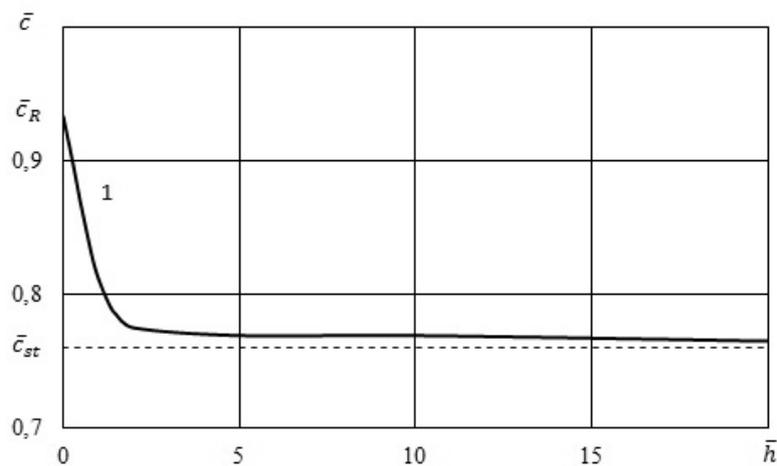


Рис. 1

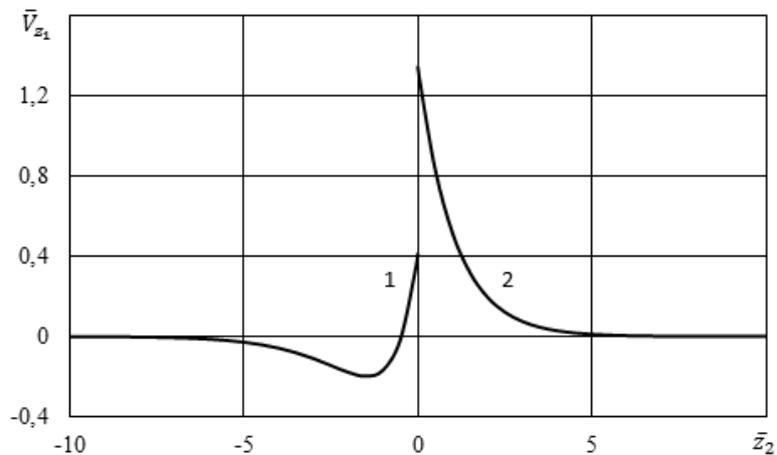


Рис. 2

Графики, представленные на рис. 2, 3, отражают распределение амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из упругого полупространства из оргстекла ( $-\infty < \bar{z}_2 \leq 0$ ) и слоя ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$ ) идеальной жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0$ ). На них приведены зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 2) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 3) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для поверхностной волны 1 (см. рис. 1).

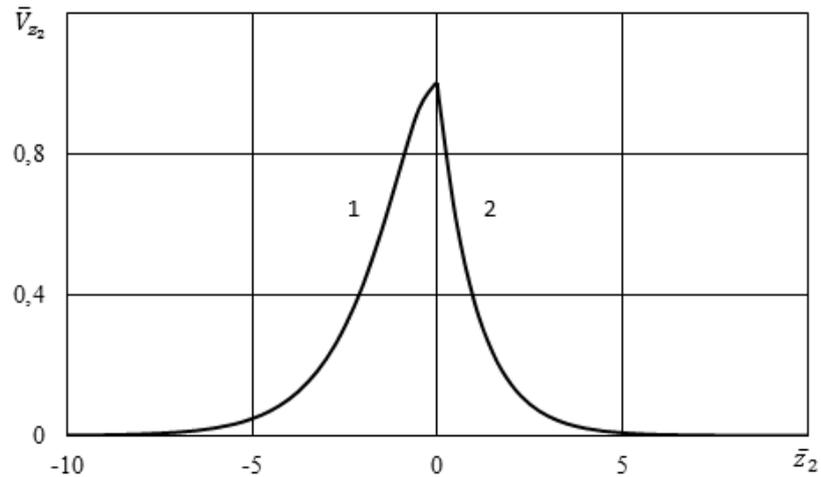


Рис. 3

Аналогичные зависимости для гидроупругой системы, состоящей из упругого полупространства и слоя вязкой жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ), приведены на рис. 4, 5.

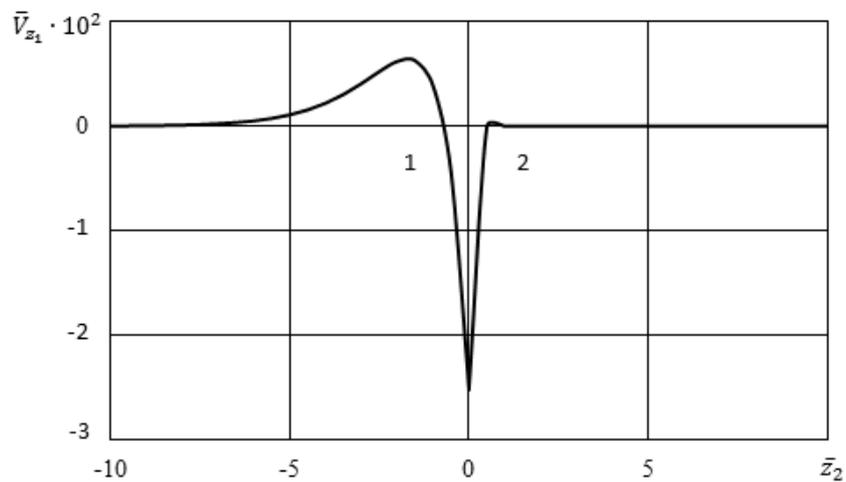


Рис. 4

Графики, представленные на рис. 2 – 5, получены для поверхностной моды 1 в коротковолновой части спектра при частоте (толщине)  $\bar{h} = 20$ . Отметим, что разрыв продольных смещений  $\bar{V}_{z_1}$  в упругом теле (кривая 1) и в идеальной жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ( $\bar{z}_2 = 0$ ) обусловлен невязкостью (идеальностью) жидкости (рис. 2).

Из графика, представленного на рис. 1, следует, что скорость поверхностной волны в упругом полупространстве из оргстекла (менее жесткий материал), взаимодействующем со слоем воды, изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,933557$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,769121$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Отметим, что, как известно [2], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидком и скоростью волны Рэлея в твердом полупространствах. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы «оргстекло – вода» таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 1,152595$ ) больше скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933557$ ) в твердом теле. Как следует из кинематических характеристик (см. рис. 2, 3), при таком соотношении между параметрами компонентов системы поверхностная мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактных областях как жидкости, так и упругого полупространства. При этом в коротковолновой части спектра глубина проникновения этой поверхностной волны (волна типа Стоунли) в упругое тело немного превышает глубину проникновения в жидкость.

Из графиков распределения амплитуд смещений (скоростей), представленных на рис. 4, 5, следует, что усиление связи между упругим телом и жидкой средой, обусловленное вязкостью жидкости, приводит к уменьшению глубины проникновения поверхностной моды 1 в жидкий слой. Как видим, в случае взаимодействия слоя вязкой жидкости с полупространством из менее жесткого материала при выполнении условия  $\bar{a}_0 = 1,152595 > \bar{c}_R = 0,933557$  значительная часть потока энергии сосредотачивается в приповерхностной области упругого тела.

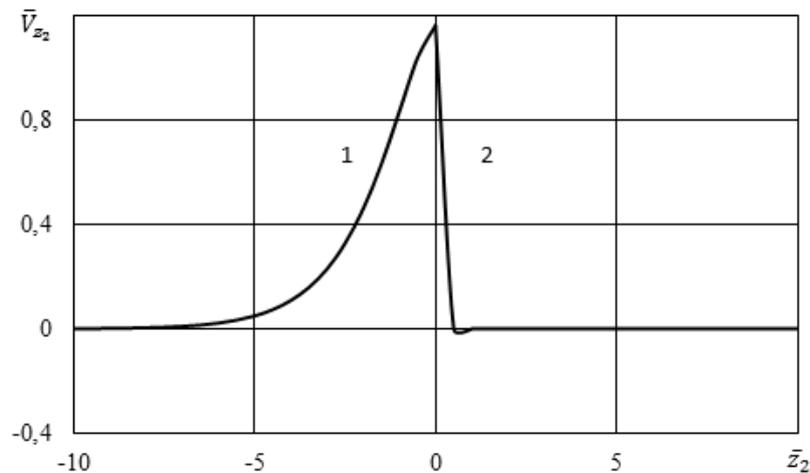


Рис. 5

На рис. 6 приведен график зависимости безразмерной величины коэффициента затухания моды  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  – волновое число волны сдвига в материале упругого полупространства) от безразмерной величины толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

Характер влияния вязкости жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) на скорости моды в гидроупругой системе иллюстрирует график на рис. 7, на котором представлена зависимость относительного изменения величины фазовой скорости моды  $c^*$

[ $c^* = (c_i - c_v)/c_i$ ,  $c_i$  – фазовая скорость волны в гидроупругой системе с идеальной жидкостью,  $c_v$  – фазовая скорость моды в системе со слоем вязкой жидкости] от безразмерной величины толщины жидкого слоя  $\bar{h}$ .

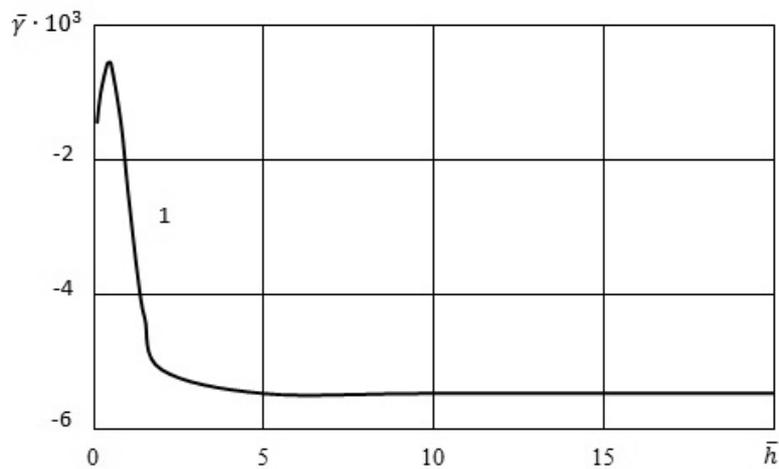


Рис. 6

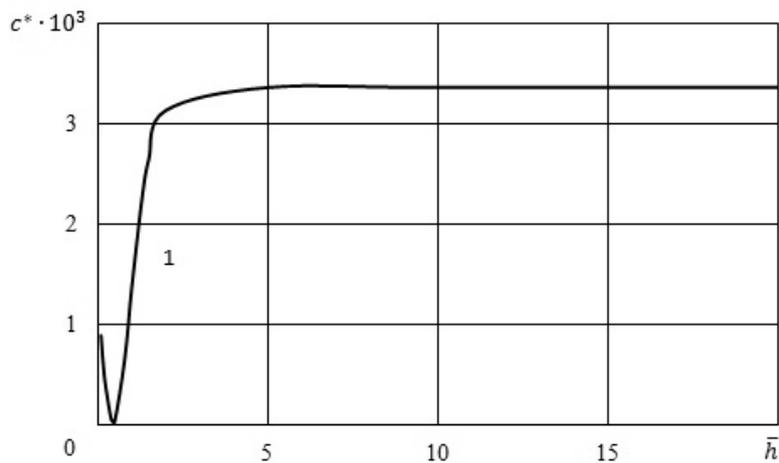


Рис. 7

Графики, приведенные на рис. 6, 7, показывают, что с увеличением толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  влияние вязкой жидкости проявляется сильнее. При этом возрастает абсолютное значение коэффициента затухания  $\bar{\gamma}$  и уменьшается величина фазовой скорости  $c_v$  поверхностной моды (волна типа Стоунли). Это обусловлено тем, что нормальная волна, распространяющаяся вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактных областях как жидкости, так и упругого полупространства, где влияние вязкости значительнее.

На рис. 8 и 9 показаны дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, состоящего из упругого полупространства из стали (более жесткий материал) и слоя вязкой жидкости, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей  $\bar{c}$  мод от безразмерной величины толщины слоя жидкости  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . На рисунках штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости мод при возрастании толщины жидкого слоя  $\bar{h}$ .

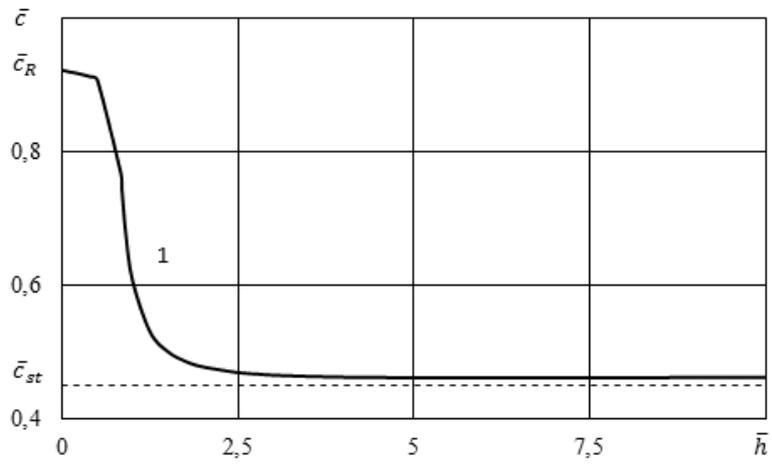


Рис. 8

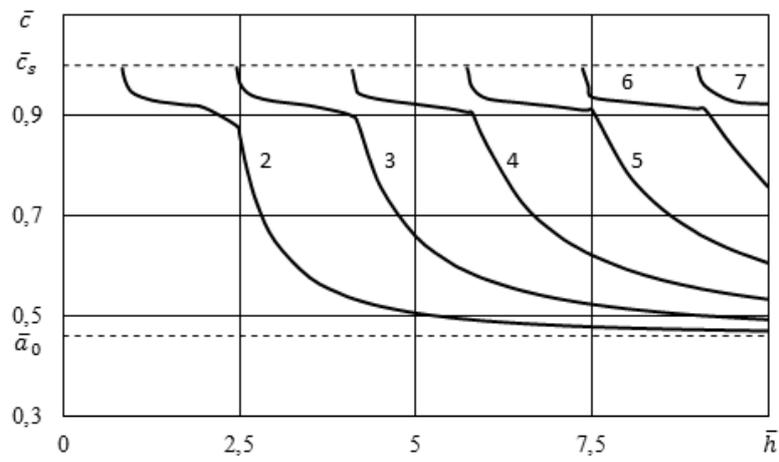


Рис. 9

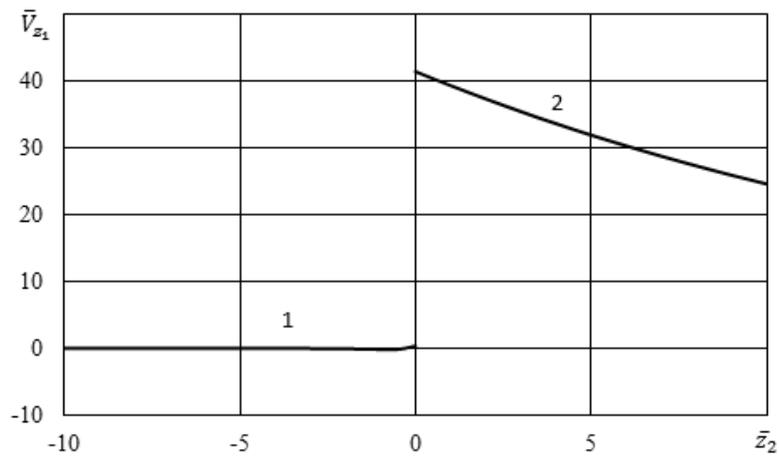


Рис. 10

Графики, представленные на рис. 10, 11, отражают распределение амплитуд смещений (скоростей) для гидроупругого волновода, состоящего из упругого полупро-

странства из стали ( $-\infty < \bar{z}_2 \leq 0$ ) и слоя ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$ ) идеальной жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0$ ). На них приведены зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 10) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 11) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для поверхностной моды 1 (см. рис. 8).

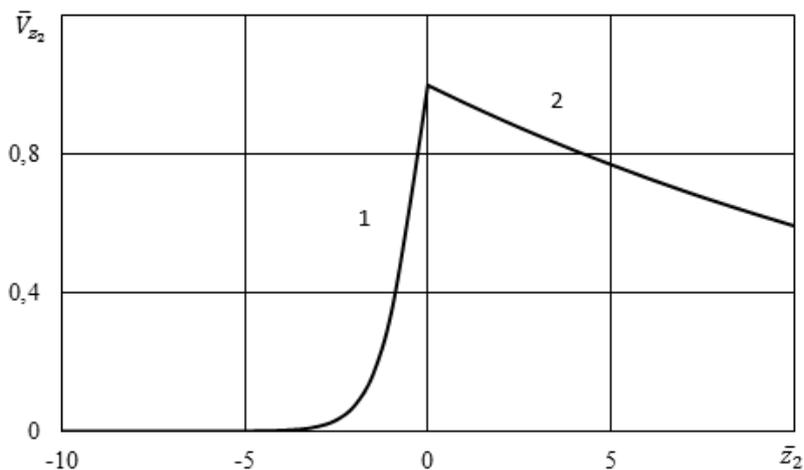


Рис. 11

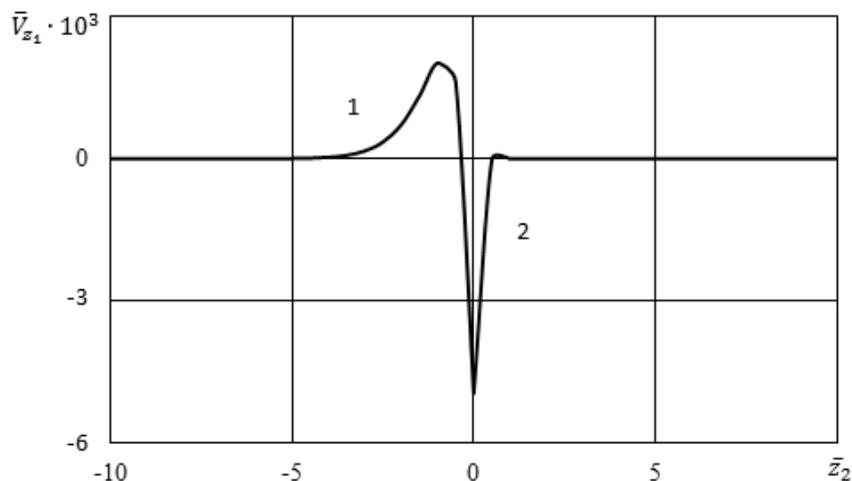


Рис. 12

Аналогичные зависимости для гидроупругой системы, состоящей из упругого полупространства и слоя вязкой жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ), приведены на рис. 12, 13.

Как видно из графиков (рис. 8, 9), фазовая скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923007$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,461819$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Скорости мод высокого порядка с увеличением толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  стремятся к скорости волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ). Относительно первой моды заметим следующее. Как видно из графиков рис. 10, 11, в приповерхностном слое упругого полупространства ( $-10 \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) продольные сме-

щения  $\bar{V}_{z_1}$  (кривая 1 на рис. 10) ничтожно малы, а поперечные смещения  $\bar{V}_{z_2}$  (кривая 1 на рис. 11) быстро убывают при удалении от границы раздела сред. В жидком слое ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq 10$ ) противоположная ситуация. Продольные  $\bar{V}_{z_1}$  и поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения (кривые 2 на рис. 10 и рис. 11), принимая наибольшие значения на границе контакта ( $\bar{z}_2 = 0$ ), медленно убывают с глубиной. Это свидетельствует о концентрации волновых движений в идеальной жидкости. Как видим, глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое полупространство. Поэтому в гидроупругой системе при  $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_r = 0,923007$ , как следует из графиков рис. 10, 11, при увеличении толщины слоя идеальной жидкости низшая мода, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется, главным образом, в приконтактной области жидкого слоя. Моды высокого порядка с ростом частоты также локализуются в жидком слое. При этом движения в модах высокого порядка при  $\bar{h} \rightarrow \infty$  смещаются от поверхностей слоя жидкости в его толщу. С этим связано уменьшение влияния вязкой жидкости на параметры волн в гидроупругом волноводе с упругим полупространством из более жесткого материала (рис. 14 и 15), в отличие от системы, материал упругого полупространства которой является менее жестким.

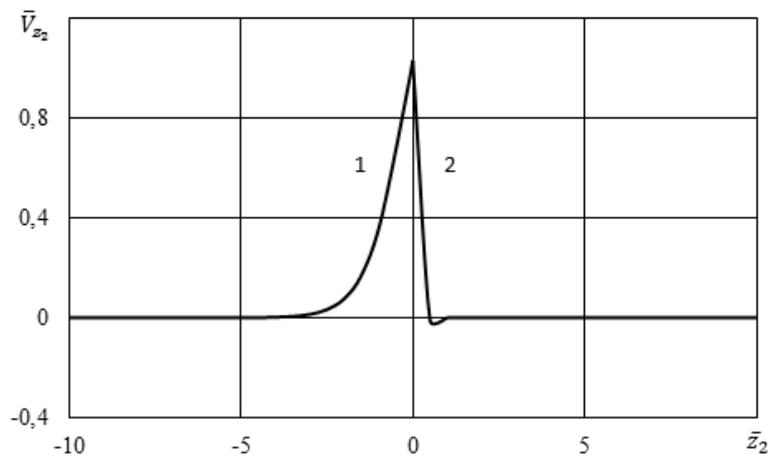


Рис. 13

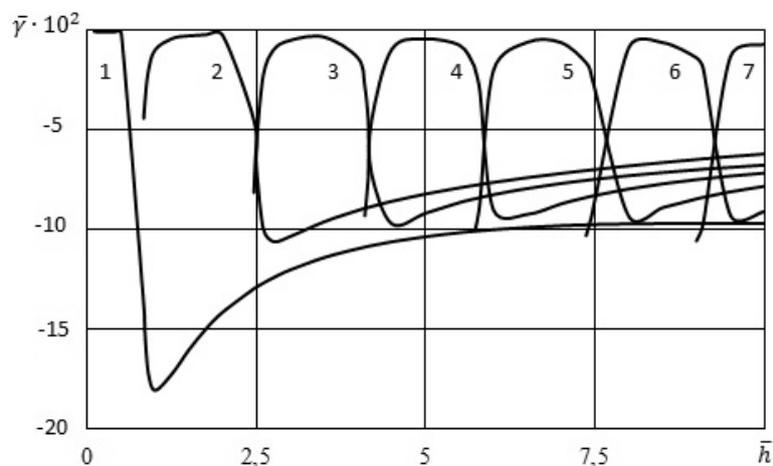


Рис. 14

Сравнение графиков распределения амплитуд смещений, представленных на рис. 10, 11 и рис. 12, 13, показывает, что жесткий контакт, обусловленный вязкостью (рис. 12, 13), в отличие от скользящего контакта, характерного для идеальной жидкости (рис. 10, 11), приводит к уменьшению глубины проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкий слой.

На рис. 14 для пары сталь – вязкая жидкость приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  от безразмерной величины толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  и  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

Характер влияния вязкости жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) на скорости мод в гидроупругой системе «сталь – вязкая жидкость» иллюстрируют графики на рис. 15, на котором представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей  $c^*$  мод от безразмерной величины толщины жидкого слоя  $\bar{h}$ .

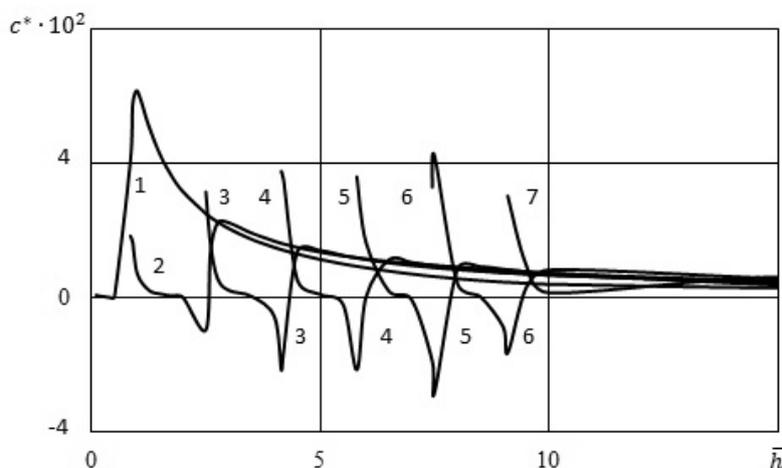


Рис. 15

Анализ графиков, приведенных на рис. 14 и 15, показывает, что в гидроупругом волноводе жидкость для ряда квазилэмбовских мод вызывает изменение критических частот, конфигурации дисперсионных кривых, а также смещение их в длинноволновую часть спектра. Это приводит к тому, что в окрестности толщин жидкого слоя (частот), при которых происходит зарождение мод, влияние вязкости на величины фазовых скоростей этих мод становится значительным. Кроме того, следствием этого является появление в волноводном спектре частот, при которых скорости мод не зависят от вязкости жидкости. Нетрудно видеть, что с ростом толщины жидкого слоя (частоты) влияние вязкости на параметры мод уменьшается. Это связано со свойствами локализации мод.

#### Заключение.

Таким образом, анализ показывает, что в упруго-жидкостной системе из менее жесткого материала в высокочастотной части спектра поверхностная волна частично проникает как в жидкость, так и в упругое полупространство. При этом приконтактные области упругого полупространства и слоя жидкости формируют волновод, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн. В случае взаимодействия упругого полупространства из менее жесткого материала с вязкой жидкостью вклад жидкости в общий поток энергии становится незначительным.

В гидроупругой системе с упругим полупространством из более жесткого материала как низшая поверхностная мода, так и моды высокого порядка, проникают в жидкий слой и распространяются, преимущественно, в нем. При этом слой идеальной жидкости является определяющим в формировании волнового поля и основным вол-

новодом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

Показано, что общая закономерность, характерная для обеих систем, состоит в том, что вязкость жидкости способствует уменьшению глубины проникновения нижней моды в жидкий слой.

Полученные результаты позволяют устанавливать пределы применимости моделей волновых процессов, основанных на модели идеальной жидкости.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто задачу про поширення акустичних хвиль у шарі в'язкої стисливої рідини, що взаємодіє з пружним півпростором. Дослідження проведено на основі тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для в'язкої стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, оснований на використанні представлень загальних розв'язків лінійних рівнянь для пружних тіл і лінеаризованих рівнянь для рідини. Отримано дисперсійне рівняння, яке описує поширення квазілембових хвиль у гідропружній системі. Побудовано дисперсійні криві для нормальних хвиль в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив товщини шару в'язкої стисливої рідини на фазові швидкості та коефіцієнти загасання акустичних хвиль. Показано, що вплив в'язкості рідини на параметри хвильового процесу пов'язаний з властивостями локалізації хвиль. Розроблений підхід і отримані результати дозволяють встановити межі застосування моделей хвильових процесів, заснованих на моделі ідеальної стисливої рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журнал. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
4. *Гузь А.* Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
5. *Guz A.N.* Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
6. *Guz A.N.* Dynamics of Compressible Viscous Fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
7. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Prestresses on Quasi-Lamb Waves in a System Consisting of a Compressible Viscous Liquid Half-Space and an Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 6. – P. 617 – 627.
8. *Guz A.N., Bagno A.M.* Propagation of Quasi-Lamb Waves in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 459 – 469.
9. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. Non-Linear Mech. – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.

Поступила 03.05.2018

Утверждена в печать 09.07.2020