А. А. Мартинюк, В. А. Чернієнко

ПРО ОЦІНКУ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА І СТІЙКІСТЬ РУХУ СИСТЕМИ З АСИМПТОТИЧНИМ РОЗВИНЕННЯМ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ РІВНЯНЬ ЗБУРЕНОГО РУХУ

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract. The new estimates of the Lyapunov function are established on the solutions of the system with an asymptotic expansion of the right-hand side. The estimates are obtained for the deviation of the solutions of the averaged equations from the exact solutions of systems of equations of the type under consideration. Based on the obtained estimates, the new sufficient conditions for the stability of motion on a finite interval of the considered systems of equations are established.

Key words: systems with a small parameter, estimates of the Lyapunov function, estimation of the deviation of solutions of averaged equations, stability on a finite interval.

Вступ.

Серед математичних моделей реальних систем та процесів, що зустрічаються в техніці і технологіях, особливе місце займають диференціальні рівняння, що їх описують та містять малий параметр (див. [3, 5, 12, 21] і бібліографію там). В результаті фундаментальних праць А. Пуанкаре [8] і О.М. Ляпунова [6] створені ефективні методи якісного аналізу нелінійних коливань і стійкості руху такого роду систем. Методи, які розроблені М.М. Криловим і М.М. Боголюбовим [5], дозволили істотно спростити розв’язання задач нелінійної механіки як в теоретичному, так і прикладному аспектах.

Математичним описом задачі про стійкість руху систем з малим параметром є нелінійна система диференціальних рівнянь, що містить малий параметр в правій частині системи рівнянь збуреного руху. Якщо дослідження стійкості такого роду систем проводиться за допомогою прямого методу Ляпунова (див. [6] і бібліографію там) або методу усереднення у поєднанні з прямим методом Ляпунова [15, 17], то задача побудови оцінки функції Ляпунова на розв’язках систем даних рівнянь залишається вельми актуальною.

У даній статті розглядаються нелінійні системи рівнянь з асимптотичним розвиненням правої частини. Дотримуючись підходу застосування псевдо-лінійних нерівностей, розвиненому у ряді робіт (див. [14, 16, 22]), тут отримані нові конструктивні оцінки зміни функцій Ляпунова вздовж розв’язків даних систем рівнянь. Як приклад розглядаються задача про стійкість розв’язків на скінченному інтервалі (див. [7, 13] і бібліографію там) і задача про оцінку наближених інтегрувань в нелінійній механіці [3].

1. Постановка задачі.

Позначимо R^n – евклідовий дійсний простір розмірності n і за норму візьмемо величину $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2 \right)^{1/2}$ для будь-яких $x_k \in R$.

Нехай $D_1 \subset R^n$ – відкрита n-вимірна область в просторі R^n та $R \times R^n$ – прямий декартів добуток $R = (-\infty, \infty)$ на R^n. Символом (x, y) позначається скалярний добуток двох векторів $x \in R^n$ та $y \in R^n$. Для нескінченного степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t,\ \mu)$, де $\mu \in M = [0, 1)$; μ – малий параметр, кожен член якого визначений в області $D_2 =$ $= \{(t,\ \mu) : t \in [0, T]\}$, $0 \le \mu \le \mu^* < 1$, позначимо часткову суму через $x_p(t,\ \mu) =$ $= \sum_{k=0}^{p} \mu^k x_k(t,\ \mu)$.

Якщо в області D_2 існує функція $\varphi(t,\ \mu)$ така, що

$$\lim\{(x(t,\ \mu) - \varphi_p(t,\ \mu))\mu^{-p} : \mu \to 0^+\} = 0,$$

то даний степеневий ряд є асимптотичним зображенням функції $\varphi(t, \mu)$.

Припустимо, що рівняння збуреного руху деякої механічної системи мають вигляд

$$dx / dt = f(t,\ x,\ \mu); \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

де $x \in R^n$ та $f \in C(R_+ \times R^n \times M, R^n)$ і допускає асимптотичне розвинення [5, 11] правої частини за степенями малого параметра $\mu \in M = [0,1)$.

З асимптотичного розвинення правої частини системи рівнянь (1) розглядається скінченна сума доданків

$$f(t,\ x,\ \mu) = \mu f_1(t,\ x) + \mu^2 f_2(t,\ x) + \ldots + \mu^m f_m(t,\ x) + \ldots = \sum_{k=1}^{m} \mu^k f_k(t,\ x), \tag{3}$$

які визначені і неперервні по t у відкритій області $D \subseteq (R_+ \times R^n \times M)$.

Тут функції $f_i \in C(R_+ \times R^n, R^n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ і є обмеженими по t разом зі своїми частинними похідними. Враховуючи співвідношення (3), розглянемо систему рівнянь

$$dx/dt = \sum_{k=1}^{m} \mu^k f_k(t, x) \tag{4}$$

з початковими умовами для розв'язку $x(t)$ у вигляді (2).

Разом із системою рівнянь (1) розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$d\overline{x} / dt = \overline{f}(t, \overline{x}, \mu); \tag{5}$$

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, \tag{6}$$

де $\overline{x} \in R^n$, $\overline{f} \in C(R_+ \times R^n \times M, R^n)$.

Припускається, що розв'язки $x(t) = x(t, t_0, x_0, \mu)$ та $\overline{x}(t) = \overline{x}(t, t_0, \overline{x}_0, \mu)$ систем (1) і (5) відповідно, існують при всіх $t \ge t_0$.

Система рівнянь (5) є такою, що коректно апроксимує систему рівнянь (1), якщо властивості розв'язків системи (5) «близькі» до властивостей розв'язків системи (1) в певному розумінні.

Зауваження 1. Система рівнянь (5) може бути побудована на основі системи (1) різними способами. Наприклад, за допомогою деякого оператора усереднення [3, 5, 9], або відкиданням частини рівняння (1), або при наближенні деяких параметрів системи (1) до певних меж при $t \to \infty$ (див. [10] стор. 369, 379).

Зауваження 2. Риска над n – векторами x та f в системі (5) не означає, що ці змінні зв'язані з процесом усереднення системи (1).

Метою даної статті є отримання оцінки функції Ляпунова на розв'язках системи рівнянь (4) і достатніх умов стійкості розв'язків визначеного типу.

2. Оцінка функції Ляпунова.

Нехай для системи рівнянь (4) побудовано функцію Ляпунова $V(t, x, \mu)$, $V(t,0,\mu) = 0$, $V \in C(R_+ \times R^n \times M, R_+)$ з повною похідною $D^+V(t,x,\mu)$ в силу системи (4), що обчислюється за формулою

$$D^+V(t, x, \mu) = \limsup\left\{\left[V\left(t+\theta, x+\theta\left(\sum_{i=1}^{m}\mu^i f_i(t, x)\right), \mu\right) - V(t, x, \mu)\right]\theta^{-1} : \theta \to 0^+\right\}.$$

Покажемо, що має місце наступне твердження.

Лема 1. Нехай для системи (4) побудована функція $V(t,x,\mu)$ з властивостями, які вказані вище і існують неперервні на будь-якому скінченному інтервалі $J \subseteq R_+$ невід'ємні функції $\psi_i(t,\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ такі, що

$$D^+V(t, x, \mu) \le \sum_{i=1}^{m}\left(\psi_i(t,\mu)V^i(t, x, \mu)\right) \tag{7}$$

при всіх $(t, x) \in J \times D$ і $0 < \mu < \mu_1$.

Тоді вздовж розв'язків системи (4) зміна функції $V(t,x,\mu)$ оцінюється нерівністю

$$V(t,x(t),\mu) \le \frac{V(t_0,x_0,\mu)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\psi_1(s,\mu)ds\right)}{\left[1-(m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{m}V^{i-1}(t_0,x_0,\mu)\psi_i(s,\mu)\exp\left(\int_{t_0}^{s}(m-1)\psi_1(\tau)d\tau\right)ds\right]^{\frac{1}{m-1}}} \tag{8}$$

для всіх $t \in J^* \subseteq J$ і $0 < \mu < \mu_1$, для яких

$$\Phi(t,t_0) = (m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{m}V^{i-1}(t_0,x_0,\mu)\psi_i(s,\mu)\times\exp\left(\int_{t_0}^{s}(m-1)\psi_1(\tau)d\tau\right)ds < 1. \tag{9}$$

Доведення леми 1 аналогічне доведенню леми 1 із статті [18] і з цієї причини тут не наводиться.

3. Оцінки відхилення розв'язків.

Розглянемо системи рівнянь (1) і (5) і припустимо, що:

A_1. Для початкових умов розв'язків систем (1) і (5) має місце умова $x_0 \ne \overline{x}_0$;

A_2. Існує позитивна інтегровна функція $g(t,\mu)$ і $\mu_1 \in M$ такі, що виконується умова

$$\left\|f(t,x,\mu) - \overline{f}(t,\overline{x},\mu)\right\| \le g(t,\mu)\left\|x-\overline{x}\right\|^p, \; p > 1$$

в області D при $\mu < \mu_1$;

A_3. Розв'язок $\overline{x}(t) = \overline{x}(t,t_0,\overline{x}_0,\mu)$ системи (5) означений і залишається в області D при всіх $t \ge t_0$.

Визначимо величину $T(\mu)$ з умови

$$T(\mu) \le \sup\{t \in R_+ : N^*(t,\mu) < 1\} \text{ при } 0 < \mu < \mu_1,$$

де

$$N^*(t,\ \mu) = (p-1)\|x_0 - \overline{x}_0\|^{p-1} \int_{t_0}^{t} g(s,\ \mu)ds.$$

Покажемо, що має місце наступне твердження.

Лема 2. Нехай для систем рівнянь (1) і (5) виконуються умови припущень $A_1 - A_3$ і, крім того

$$N(t,\mu) = 1-(p-1)\|x_0 - \overline{x}_0\|^{p-1} \int_{t_0}^{t} g(s,\mu)ds > 0 \tag{10}$$

при всіх $t \in [t_0, T(\mu)]$.

Тоді для норми $\|x(t) - \overline{x}(t)\|$ різниці розв'язків має місце оцінка

$$\|x(t) - \overline{x}(t)\| \le \|x_0 - \overline{x}_0\| \left(N(t,\mu)\right)^{-\frac{1}{p-1}} \tag{11}$$

при всіх $t \in [t_0, T(\mu)]$ і $0 < \mu < \mu_1$.

Доведення. З того, що

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ x(s),\ \mu)ds \text{ і } \overline{x}(t) = \overline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \overline{f}(s,\ \overline{x}(s),\ \mu)ds$$

за умов $A_1 - A_3$ знаходимо оцінку

$$\|x(t) - \overline{x}(t)\| \le \|x_0 - \overline{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} g(s,\mu)\|x(s) - \overline{x}(s)\|^p\, ds \tag{12}$$

при всіх $t \in [t_0, T(\mu)]$ і $0 < \mu < \mu_1$.

Застосовуючи до нерівності (12) лему Біхарі (див. [4], стор. 112. Наслідок 2), отримаємо оцінку (11).

Оцінка норми різниці розв'язків систем (4) і (13).

Для системи рівнянь (4) побудуємо усереднену систему рівнянь

$$d\xi / dt = \mu\, \overline{f}_1(\xi) + \ldots + \mu^m \overline{f}_m(\xi); \tag{13}$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 \tag{14}$$

за допомогою заміни змінних (див. [15], стор. 151)

$$x = \xi + \mu u_1(t,\xi) + \mu^2 u_2(t,\xi) + \ldots, \tag{15}$$

де $u_k(t,\ \xi)$ $k = 1,2,\ldots m$ функції, що підлягають визначенню.

Про системи рівнянь (4) і (13) зробимо наступні припущення:

A_4. Вектор-функції $f_k(t,x) \in C(R_+ \times R^n, R^n)$ означені і обмежені по t в області $D^* \subseteq (R_+ \times R^n)$ разом зі своїми частинними похідними до $(m-1)$-го порядку;

A_5. У кожній точці області D^* існує межа

$$\overline{f}_1(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} f_1(s,\ \xi)ds.$$

A_6. Розв'язок $\xi(t),\ \xi(t_0) \in D$ початкової задачі (13), (14) означений при всіх $t \ge t_0$ і знаходиться в області D^*.

A_7. Існують позитивні інтегровні функції $\psi_k(t,\ \mu)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ і значення $\mu_2 \in M$ такі, що

$$\left\|\mu^k (f_k(t,x) - \overline{f}_k(\xi))\right\| \le \psi_k(t,\mu)\|x-\xi\|^k,\ k = 1, 2, \ldots, m,$$

при всіх $(t,x,\xi) \in D$ і $0 < \mu < \mu_2$.

A_8. Для початкових значень x_0, ξ_0 розв'язків $x(t)$ і $\xi(t)$ систем (4) і (13) виконується умова $x_0 \ne \xi_0$.

За умов A_4 – A_8 оцінимо норму різниці розв'язків $\|x(t)-\xi(t)\|$ на деякому інтервалі зміни t.

Величину $T(\mu)$ визначимо з умови

$$T^*(\mu) \le \sup\{t \in R_+ : \Phi^*(t,\ \mu) < 1\} \text{ при } 0 < \mu < \mu_2,$$

де

$$\Phi^*(t,\mu) = (m-1)\int_{t_0}^{t} \sum_{k=2}^{m} \|x_0 - \xi_0\|^{k-1} \psi_k(s,\ \mu) \exp\left(\int_{t_0}^{s} (m-1)\psi_1(\tau,\ \mu)d\tau\right) ds,$$

і будемо розглядати розв'язки початкових задач (4) – (2) і (13) – (14) на інтервалі $[t_0, T^*(\mu)]$ при $0 < \mu < \mu_2$.

Лема 3. Нехай системи рівнянь (4), (13) означені в області D^* і при цьому виконуються умови A_4 – A_8 і крім того

$$1-(m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{k=2}^{m}\psi_k(s,\ \mu)\|x_0 - \xi_0\|^{k-1} \exp\left((m-1)\int_{t_0}^{s}\psi_1(\tau,\ \mu)d\tau\right) ds > 0$$

при всіх $t \in [t_0, T(\mu)]$.

Тоді для норми різниці розв'язків $\|x(t)-\xi(t)\|$ має місце оцінка

$$\|x(t)-\xi(t)\| \le \|x_0 - \xi_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi_1(s,\ \mu)\, ds\right)\left(1-\Phi^*(t,\ \mu)\right)^{-\frac{1}{m-1}} \tag{16}$$

при всіх $t \in [t_0, T(\mu)]$ $0 < \mu < \mu_2$.

Доведення. Нагадаємо, що функції $\overline{f}_k(\xi)$ і $u_k(t,\xi)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ обчислюються за формулами

$$\overline{f}_k(\xi) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left[f_k(s,\xi) + F_k(s,\xi)\right]ds;$$

$$u_k(t,\ \xi) = \int_0^t \left[f_k(s,\ \xi) + F_k(s,\ \xi) - \overline{f}_k(\xi)\right]ds + \varphi_k(\xi),\ \ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Тут функції $\varphi_k(\xi)$, $k = 1, 2, \ldots$ довільні, зокрема $\varphi_k(\xi) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$F_1(t,\xi) = 0;\quad F_2(t,\xi) = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} u_1(t,\xi) - \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\overline{f}_1(\xi);$$

$F_k(t,\xi)$ – відома функція u_1, u_2, …, u_{k-1}, $f_1(t,x)$, …, $f_{k-1}(t,x)$ та їх частинних похідних до $k-1$ порядку.

Таким чином, система усереднених рівнянь (13) повністю визначається за системою рівнянь (4). З систем рівнянь (4) і (13) отримуємо

$$\|x(t)-\xi(t)\| \le \|x_0-\xi_0\| + \int_{t_0}^{t}\left(\sum_{k=1}^{m}\mu^k f_k\left(s,x(s)\right) - \sum_{k=1}^{m}\mu^k \overline{f}_k\left(\xi(s)\right)\right)ds \tag{17}$$

при всіх $t\in[t_0, T^*(\mu)]$. З нерівності (17) при виконанні умови A_7 отримаємо оцінку

$$\|x(t)-\xi(t)\| \le \|x_0-\xi_0\| + \int_{t_0}^{t}\sum_{k=2}^{m}\psi_k(s,\,\mu)\|x(s)-\xi(s)\|^k\,ds\,. \tag{18}$$

Оскільки, згідно припущення A_8 виконується умова $\|x_0-\xi_0\|>0$, то до нерівності (18) застосовується узагальнена лема Гронуолла – Беллмана [2, 14], внаслідок чого приходимо до нерівності

$$\begin{gathered}\|x(t)-\xi(t)\| \le \|x_0-\xi_0\|\times\\ \times\exp\left[\int_{t_0}^{t}\left(\psi_1(s,\mu)+\sum_{k=2}^{m}\psi_k(s,\mu)\|x(s)-\xi(s)\|^{k-1}\|x(s)-\xi(s)\|\right)ds.\right]\end{gathered} \tag{19}$$

Застосовуючи до нерівності (19) лему 1, отримаємо оцінку

$$\begin{gathered}\|x(t)-\xi(t)\| \le \|x_0-\xi_0\|\exp\left(\int_{t_0}^{t}\sum_{k=2}^{m}\psi_1(s,\mu)ds\right)\times\\ \times\left\{1-(m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{k=2}^{m}\psi_k(s,\mu)\|x_0-\xi_0\|^{k-1}\exp\left[(m-1)\int_{t_0}^{s}\psi_1(\tau,\mu)d\tau\right]ds\right\}^{\frac{1}{m-1}}\end{gathered} \tag{20}$$

при всіх $t\in[t_0, T^*(\mu)]$ і $0<\mu<\mu_2$.

Цим лему 3 доведено.

4. Застосування.

Застосуємо отримані в лемах 1 – 3 оцінки для розв’язання задачі про стійкість на скінченному інтервалі і оцінці наближених інтегрувань систем з асимптотичним розвиненням правої частини систем рівнянь збуреного руху.

4.1. Умови $\left(\lambda,\ A,\ t_0,\ T(\mu)\right)$ – стійкості руху.

Аналіз стійкості руху системи (1) з розвиненням (3) на скінченному інтервалі часу приводить до $(\lambda, A, t_0, T(\mu))$ – стійкості, якщо величини λ, A, t_0 і $T(\mu)$ фіксовані [10, 13].

Значення $T(\mu)$ визначимо з умови

$$T(\mu)\le \sup\{t\in R_+ : \Phi(t,t_0)<1\} \quad \text{при} \quad 0<\mu<\mu_2\,.$$

Означення 1. При заданих оцінках величин $0<\lambda<A$, $t_0\in R_+$ та $T(\mu)>0$ при $0<\mu<\mu^*\in M$ рух системи (1) $(\lambda,\ A,\ t_0,\ T(\mu))$ – стійкий, якщо при початкових умовах $\|x(t_0)\|<\lambda$ виконується умова $\|x(t,\mu)\|<A$ при всіх $t\in[t_0, T(\mu)]$ та $0<\mu<\mu^*$.

Оцінка (8) дозволяє отримати достатні умови $\left(\lambda,\, A,\, t_0,\, T(\mu)\right)$ – стійкості системи (1) в наступному вигляді.

Теорема 1. *Нехай для системи (1) будь-яким способом побудована функція* $V(t,x,\mu)$ *у вигляді додатно визначеної квадратичної форми. Нехай* $c_1(t)$ *– точний максимум функції* $V(t,x,\mu)$ *на сфері* $\|x\| = \lambda$ *, а* $c_2(t)$ *– точна нижча межа* $V(t,\, x,\, \mu)$ *на сфері* $\|x\| = A$.

Якщо виконуються умови леми 1 і, крім того,

(1) існує $0 < \mu_3 \in M$ *таке, що*

$$\Phi\ (t,\, c_1(t)) = (m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{m} c_1^{i-1}(s)\psi_1(s,\mu)\times\exp\left(\int_{t_0}^{s}(m-1)\psi_1(\tau,\mu)d\tau\right)ds < 1$$

при $0 < \mu < \mu_3$ *і при всіх* $t \in [t_0, T(\mu)]$;

(2) існує значення $0 < \mu_4 \in M$ *таке, що*

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t}\psi_1(s,\,\mu)ds\right)\left(1-\Phi\left(t, c_1\left(t\right)\right)\right)^{\frac{1}{1-m}} < \frac{c_2(t)}{c_1(t)}$$

при $0 < \mu < \mu_4$ *і* $t \in [t_0, T(\mu)]$;

(3) тоді рух системи (1) з розвиненням правої частини (3) є $\left(\lambda,\, A,\, t_0,\, T(\mu)\right)$ *– стійким, де* $0 < \mu < \min(\mu_2,\, \mu_3,\, \mu_4) \in M$.

Доведення. З леми 1 випливає оцінка функції $V(t,\, x,\, \mu)$ у вигляді (8), для якої $V(t_0,\, x_0,\, \mu) \le c_1(t)$. При виконанні умов (1), (2) теореми 1 маємо нерівність $V\left(t,\, x(t),\, \mu\right) < c_2(t)$ при всіх $t \in [t_0, T(\mu)]$ і, отже, $\|x\ (t,\, \mu)\| < A$ при всіх $t \in [t_0,\, T(\mu)]$ і $0 < \mu < \min(\mu_1,\, \mu_3,\, \mu_4)$. Цим теорема 1 доведена.

4.2. ε *-оцінка для норми різниці розв'язків* $\|x(t) - \overline{x}(t)\|$.

Ефективне застосування апроксимуючих рівнянь (4) в прикладних задачах пов'язане з можливістю отримання ε -оцінки для норми різниці розв'язків $\|x(t) - \overline{x}(t)\|$ при всіх $t \ge t_0$ або при $t \in [t_0, T^*(\mu)]$, $T^*(\mu) > 0$.

Означення 2. Говоримо, що апроксимуюча система (4) допускає ε -оцінку наближеного розв'язку системи рівнянь (1), якщо за початкових умов $x_0 \ne \overline{x}_0$ для всіх $t \ge t_0$ або $t \in [t_0,\, T^*(\mu)]$ буде виконуватися нерівність $\|x(t) - \overline{x}(t)\| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, де $x(t)$ – розв'язок початкової задачі (1) – (2) та $\overline{x}(t)$ – розв'язок початкової задачі (4) – (5).

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Припустимо, що для систем рівнянь збуреного руху (1) і (5) виконуються умови леми 2 і, крім того,*

$$(N(t,\mu))^{-\frac{1}{p-1}} < \frac{\varepsilon}{\|x_0 - \overline{x}_0\|} \tag{21}$$

при всіх $t \ge t_0$ *або при* $t \in [t_0, T^*(\mu)]$.

Тоді для норми $\|x(t) - \overline{x}(t)\|$ *має місце* ε *– оцінка, тобто* $\|x(t) - \overline{x}(t)\| < \varepsilon$ *при всіх* $t \ge t_0$ *або при* $t \in [t_0, T^*(\mu)]$.

Доведення. Твердження теореми 2 випливає із оцінки (11).

4.3 ε -оцінка для норми різниці розв'язків $\|x(t)-\xi(t)\|$.

Оцінка норми різниці розв'язків $\|x(t)-\xi(t)\|$ – на деякому проміжку часу $[t_0, T^*(\mu)]$ дозволяє зробити висновки про поведінку розв'язків початкової системи (4) на цьому ж проміжку часу.

Нехай задані $\delta > 0$ і $T^*(\mu)$ такі, що $\|x_0-\xi_0\| < \delta$ і оцінка (16) виконується при всіх $t \in [t_0, T^*(\mu)]$. Має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Припустимо, що для системи рівнянь (4) і (13) виконуються всі умови леми 3 і, крім того, для заданих δ і $T^*(\mu)$ виконуються умови:*

(1) при всіх $t \in [t_0, T(\mu)]$

$$W(t,\,\mu) = 1-(m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{k=2}^{m}\psi_k(s,\mu)\delta^{k-1}\exp\left[(m-1)\int_{t_0}^{s}\psi_1(\tau,\,\mu)d\tau\right]ds > 0\,;$$

(2) при всіх $t \in [t_0, T(\mu)]$

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t}\psi_1(s,\,\mu)\,ds\right)\left(W(t,\,\mu)\right)^{-\frac{1}{m-1}} < \frac{\varepsilon}{\delta}. \tag{22}$$

Тоді для норми різниці розв'язків $x(t)$ і $\xi(t)$ систем рівнянь (4) і (13) справедлива оцінка

$$\|x(t)-\xi(t)\| < \varepsilon$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Доведення. Твердження теореми 3 випливає з оцінки (16) і умови (22) теореми 3.

Зауваження 3. Оцінка $\|x(t)-\xi(t)\|$ має місце за умови A_8, яка відсутня в класичному варіанті теорем про усереднення (див. [5, 15] і бібліографію там).

5. Завершальні зауваження.

Для систем рівнянь збуреного руху отримана оцінка функції Ляпунова на розв'язках системи рівнянь (1) на основі нелінійних інтегральних нерівностей (див. [1, 16, 19] і бібліографію там). Результати, отримані в даній статті, можуть представити інтерес в задачах якісного аналізу руху афінних систем і керованих систем загального вигляду (див. [20] і бібліографію там). У розділі 4 наведені результати застосування отриманих оцінок при дослідженні $(\lambda,\,A,\,t_0,T(\mu))$ – стійкості руху нелінійних систем і при оцінці відхилення розв'язків апроксимуючої системи від розв'язків вихідної системи диференціальних рівнянь. Оцінки (11) і (16) дозволяють отримати розв'язок деяких задач, що представляють інтерес в теорії нелінійних коливань і небесній механіці (див. [3] і бібліографію там).

До таких задач відносяться: задача про умови, при яких для довільного $\varepsilon > 0$ за початкових умов $x_0 \neq \xi_0$ для розв'язків $x(t)$ і $\xi(t)$ виконується нерівність $\|x(t)-\xi(t)\| < \varepsilon$ на максимальному інтервалі часу; задача про обчислення $\sup\|x(t)-\xi(t)\| : t \in [t_0,\, t_0+T]$ при заданому значенні $T > t_0 \in R_+$, а також задача про визначення максимального проміжку часу T, на якому виконується нерівність $\|x(t)-\xi(t)\| < K$ при заданому значенні $0 < K < \infty$.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконані за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Р Е З Ю М Е . Встановлено нові оцінки функції Ляпунова на розв'язках системи рівнянь з асимптотичним розвиненням правої частини. Отримано оцінки відхилення розв'язків усереднених рівнянь від точних розв'язків систем рівнянь розглянутого типу, на основі яких встановлюються нові достатні умови для стійкості руху на скінченному інтервалі часу та оцінки наближеного розв'язку розглянутих систем рівнянь.

К Л Ю Ч О В І   С Л О В А : системи з малим параметром, оцінки функції Ляпунова, оцінка відхилення розв'язків усереднених рівнянь, стійкість на скінченному інтервалі.

1. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. – Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 2012. – 263 с.
2. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1954. – 215 с.
3. *Гребеников Е.А. Рябов Ю.А.* Новые качественные методы в небесной механике. –Москва: Наука, 1971. – 442 с.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1976.– 472 с.
5. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 362 с.
6. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1950. – 386 с.
7. *Мартынюк А.А.* Техническая устойчивость в динамике. – Киев: Техника, 1973. – 188 с.
8. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Том 1. – Москва: Наука, 1971. – 772 с.
9. *Филатов А.Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегральных уравнениях. – Ташкент: Изд-во "ФАН", 1971. – 279 с.
10. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
11. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. – Москва: ИЛ, 1962. – 127 с.
12. *Hayashi C.* Nonlinear Oscillations in Physical Systems. – New York: McGraw–Hill, 1966. – 392 p.
13. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A.* Practical Stability of Nonlinear Systems. – Singapore: World Scientific, 1990. – 207 p.
14. *Louartassi Y., Mazoud E.H.E., El Alami N.* A new generalization of lemma Gronwall–Bellman // Appl. Math. Sci. – 2012. – **6**. – P. 621 – 628.
15. *Martynyuk A.A.* Stability Analysis: Nonlinear Mechanics Equations. – Amsterdam: Gordon and Breach Publishers, 1995. – 245 p.
16. *Martynyuk A.A.* Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations. // Appl. Math..– 2015. – **6.** – P. 182 – 194.
17. *Martynyuk A.A., Chernetskaya L.N., Martynyuk V.A.* Weakly Connected Nonlinear Systems: Boundedness and Stability of Motion. – Boca Raton: Taylor and Francis Group, 2013. – 212 p.
18. *Martynyuk A.A., Chernienko V.A.* Sufficient Conditions for the Stability of Motion of Polynomial Systems // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56,** N 1. – P. 13 – 21.
19. *Martynyuk A.A., Khusainov D.Ya., Chernienko V.A.* Constructive Estimation of the Lyapunov Function for Quadratic Nonlinear Systems // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 3. – P. 346 – 357.
20. *Martynyuk A.A., Chernetskaya L.N., Martynyuk-Chernienko Yu.A.* Stabilization of the Motion of Pseudo-linear Affine Systems // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 113 – 120.
21. *Minorsky N.* Introduction to Non-Linear Mechanics. – Ann Arbor: University of Michigan Press, 1947. – 482 p.
22. *Ndoye I.* Generalization du lemme de Gronwall–Bellman pour la stabilisation des systemes fractionnaires. // PhD Thesis, Nancy University, 2011. – 202 p.

Надійшла 03.12.2019 Затверджена до друку 15.12.2020