

Л. А. Агаловян, М. Л. Агаловян

ПРО ОДИН КЛАС ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ-СЕЙСМОЛОГІЇ
І ПРОБЛЕМУ ПЕРЕДБАЧЕННЯ ЗЕМЛЕТРУСІВ

*Інститут механіки НАН Вірменії,
просп. Маршала Баграмяна 24/2, Єреван, Вірменія;
e-mail: lagal@sci.am, mheraghalovyan@yahoo.com*

Abstract. The spatial quasistatic and dynamic problems of the theory of elasticity for a layered package are solved, which simulate the behavior of lithospheric plates and blocks of the Earth's crust. According to the data of seismic stations, GPS, inclinometers and other measuring instruments, slow (secular) and fleeting movements of lithospheric plates are considered. It is shown that by carrying out the regular measurements, based on the obtained solutions, it is possible to trace the entire process of preparation and occurrence of earthquakes.

Key words: laminated plate, lithospheric plate, elasticity, 3D problems, seismology, earthquake prediction, asymptotic method.

Вступ.

Велика катастрофа XVIII століття – лісабонський землетрус (1 листопада 1755 року, Португалія) стала відправною точкою для пояснення причин виникнення сильних землетрусів і відповіді на важливе питання – чи є землетруси природним явищем, чи вони є проявом гніву всевишнього, як тоді вважалося. Науково обґрунтована відповідь щодо причин виникнення землетрусів була зроблена, в основному, у двадцятому столітті. Була проаналізована географія місць розташування сильних землетрусів. Виявилось, що осередки землетрусів розташовані у вузьких зонах земної кори (сейсмічні зони).

Встановлено, що планета Земля ($R_{\text{зем}} = 6378$ км) шарувата і неоднорідна. Вона складається з земної кори, верхньої та нижньої мантії, зовнішнього і внутрішнього ядер (рис. 1). Характерною рисою цих шарів, зокрема, є суттєво відмінні швидкості V_p , V_s поширення в них поздовжніх (первинних) P і поперечних (вторинних, зсувних) S хвиль. Земна кора теж є шаруватою з основними шарами: осадовий ($V_p = 2,0 \div 5,0$ км/с, $h_1 = 10 \div 25$ км), гранітний ($V_p = 5,5 \div 6,0$ км/с; $h_2 = 30 \div 40$ км), базальтовий ($V_p = 6,5 \div 7,4$ км/с; $h_3 = 15 \div 20$ км). Частина верхньої мантії до межі з астеносферою, у сукупності з земною корою, складає літосферу. Літосфера мережею глибинних розломів розбита на декілька великих блоків, які називаються плитами. Великими літосферними плитами є: Євразійська, Індо-Австралійська, Тихоокеанська, Південно-Американська, Північно-Американська, Африканська, Анатолійська, Аравійська та інші. Виникнення сильних землетрусів сучасна наука пов'язує з тектонікою літосферних плит і їх взаємодією ($\approx 95\%$ землетрусів) [1 – 3, 7 – 14]. Процес підготовки землетрусів включає два основні етапи тектонічних рухів: повільні (вікові) і швидкоплинні (скачкоподібні).

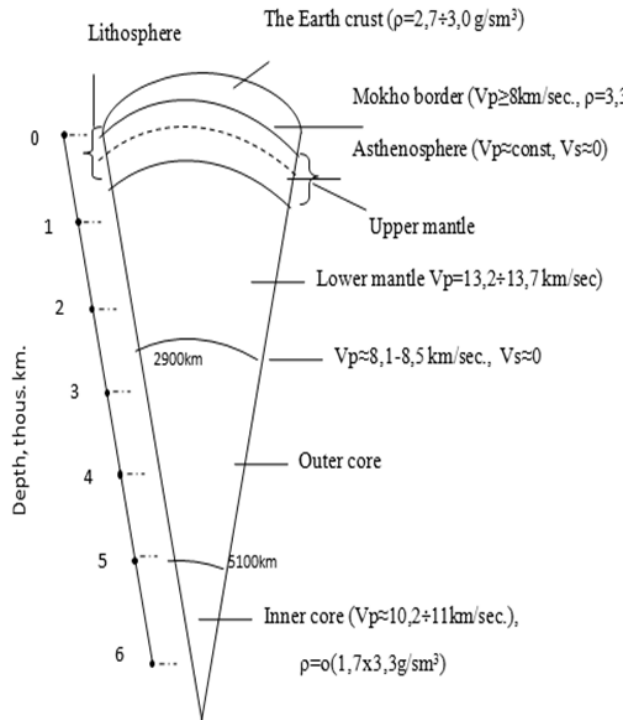


Рис. 1

Вікові рухи є квазістатичними і можуть тривати десятиліттями, внаслідок чого літосферні плити і окремі блоки земної кори з роками накопичують деформації, які досягли критичного значення порядку 10^{-4} , і, на думку відомого сейсмолога Rikitake [14], деформації порядку $4,7 \times 10^{-5}$ призводять до глобальних руйнувань (землетрусу). Основна частина величезної потенціальної енергії деформацій, накопичених впродовж багатьох років, виділяється у вигляді об'ємних пружних поздовжніх P і зсувних S - хвиль, а також поверхневих хвиль Релея і Лява. Завжди швидкість V_p є більшою швидкості V_s . Фіксуючи час прибуття (t_p, t_s) цих хвиль в задану точку (сейсмічну станцію) за їх різницю $\Delta t = t_s - t_p$ можна встановити відстань L центру землетрусу від заданої станції:

$$L = \frac{v_p v_s}{v_p - v_s} \Delta t; \quad \Delta t = t_s - t_p,$$

а за даними трьох станцій – його розташування, як область (точка) перетину трьох сфер з радіусами L_1, L_2, L_3 з центрами в цих точках. Цим і займається більшість сейсмостанцій, фіксуючи уже подію, яка відбулася.

Швидкоплинні рухи є динамічними і відбуваються в результаті форшоку, самого землетрусу і афтершоку. Звідси випливає, що землетруси є результатом глобального руйнування. Тому для прогнозування землетрусів необхідно знайти напружено-деформовані стани (НДС) літосферних плит і блоків земної кори і простежити за їх зміною з часом, щоб виявити критичні стани і місця їх прояву. Маючи значення напружень і зміщень, можна визначити накопичену потенціальну енергію деформації і магнітуду очікуваного землетрусу [11, 12].

У середині двадцятого століття були зафіксовані помітні деформації (зміщення точок) земної поверхні перед землетрусом. При цьому виникла природна задача – використовуючи ці дані, визначити НДС літосферної плити або відповідного блоку земної кори і промоніторити її зміни в часі згідно з новими вимірами.

Ця задача виявилася неklasичною задачею теорії пружності, тому що на лицевій поверхні необхідно ставити шість умов: поверхня вільна, тобто три компоненти тензора напружень нульові, але відомі значення зміщень точок цієї поверхні (три умови). У класичній же задачі теорії пружності на поверхні задаються три умови. Асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених диференціальних рівнянь вирішує цю проблему [5]. Зокрема, доведено, що сформульована неklasична крайова задача має єдиний розв'язок. Більш того, завжди існує класична крайова задача (3 умови на лицевій і 3 умови на нижній (що відповідає підшві) поверхнях), розв'язком якої він є [6].

З метою зменшення впливу змін зовнішніх аномальних (переважно, атмосферних) факторів на дані справжніх процесів всередині шаруватого пакету (літосферної плити), у сейсмології почали поміщати вимірювальні прилади (інклінометри, деформографи тощо) всередині пакету на певній відстані від лицевої поверхні.

У даній роботі розв'язані відповідні неklasичні квазістатичні і динамічні задачі, коли вимірювальні прилади розташовані на поверхні контакту між шарами з числами "m" і "(m+1)". Вказані випадки, коли асимптотичний розв'язок стає математично точним, наводяться ілюстративні приклади. Моніторинг отриманого розв'язку за часом дозволяє виявити ситуації, коли між окремими шарами пакету можливий відрив (локальне руйнування), а обчислення потенціальної енергії деформації дозволяє передбачити глобальні руйнування (землетрус).

§1. Постановка 3D квазістатичної задачі.

Нехай літосферна плита чи окремий блок земної кори складається з N ортотропних шарів і займає область

$$Z = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h, h = \sum_{j=1}^N h_j, \min(a, b) = l, h \ll l \right\},$$

де h_j – товщини пластин (рис. 2).

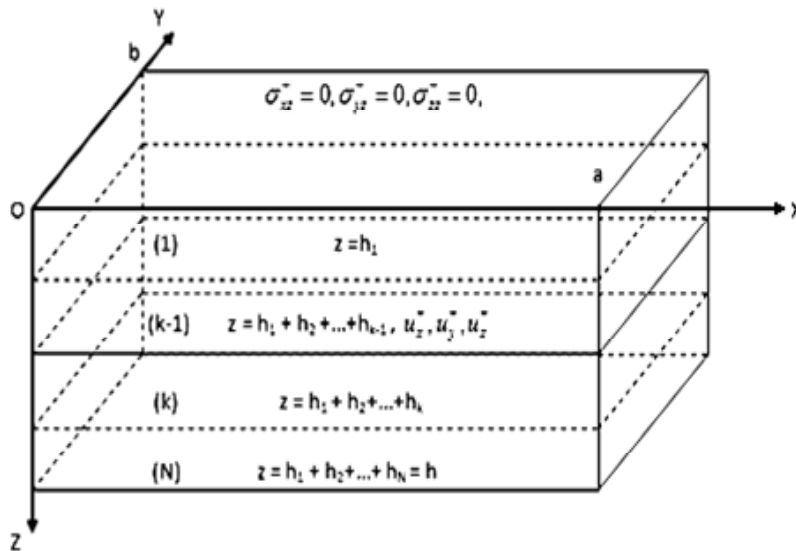


Рис. 2

Випадок пакету з ізотропних шарів є частинним випадком розглядуваного. Оскільки процес першого етапу підготовки землетрусу є квазістатичним (віковим), то для визначення НДС пакету необхідно знайти в області Z розв'язок рівнянь рівноваги 3D задачі теорії пружності:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} + F_x^{(k)} = 0, \quad (x, y, z), k = 1, 2, \dots, N \quad (1.1)$$

співвідношень пружності (узагальнений закон Гука) з врахуванням впливу температурного поля за моделлю Дюамеля – Неймана

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x} &= a_{11}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)} + \alpha_{11}^{(k)} \theta^{(k)} \quad (1, 2, 3; x, y, z); \\ \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial y} &= a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}; \quad \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial y} = a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)}; \quad \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial x} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; u_x, u_y, u_z – компоненти вектора зміщень; a_{ij} – пружні постійні; α_{ij} – коефіцієнти температурного розширення; $\theta = T(x, y, z, t) - T_0(x, y, z, t)$ – зміна температурного поля; F – об'ємні сили (вага).

Знайдений розв'язок повинен задовольняти на лицевій поверхні пакета $z = 0$ умови вільної границі

$$\sigma_{jz}^{(1)}(x, y, 0, t_*) = 0, \quad j = x, y, z \quad (1.3)$$

і умови для зміщень на площині контакту між шарами з номерами "m" і "(m+1)"

$$u_j^{(m)}(x, y, \zeta_m, t_*) = u_j^{(m+1)}(x, y, \zeta_m, t_*) = u_j^+(x, y), \quad j = x, y, z; \quad \zeta_m = \left(\sum_{i=1}^m h_i \right) / h, \quad (1.4)$$

де $u_j^+(x, y)$ – відомі функції як результат проведених при $t = t_*$ вимірювань. Якщо для зміщень задані числові значення їх вимірювань, то поверхню зміщень можна апроксимувати відомим поліномом Лагранжа.

Знайдений розв'язок також повинен задовольняти умови повного контакту між всіма відповідними шарами:

$$\sigma_{jz}^{(n)}(x, y, \zeta_n, t_*) = \sigma_{jz}^{(n+1)}(x, y, \zeta_n, t_*); \quad \zeta_n = \left(\sum_{i=1}^n h_i \right) / h; \quad (1.5)$$

$$u_j^{(n)}(x, y, \zeta_n, t_*) = u_j^{(n+1)}(x, y, \zeta_n, t_*), \quad j = x, y, z; \quad n = 1, 2, \dots (N-1).$$

§2. Асимптотичний розв'язок квазістатичної задачі.

Щоб розв'язати сформульовану вище задачу, перейдемо в рівняннях (1.1) і співвідношеннях (1.2) до безрозмірних координат і зміщень

$$\xi = x/l; \quad \eta = y/l; \quad \zeta = z/h = \varepsilon^{-1} z/l; \quad u = u_x/l; \quad v = u_y/l; \quad w = u_z/l. \quad (2.1)$$

В результаті отримуємо сингулярно-збурену малим параметром $\varepsilon = h/l$ систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial \zeta} + lF_x^{(k)} &= 0, \quad (x, y, \xi, \eta); \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial \zeta} + lF_z^{(k)} &= 0; \\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \xi} = e_1^{(k)} + \alpha_{11}^{(k)} \theta^{(k)}; \quad \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \eta} = e_2^{(k)} + \alpha_{22}^{(k)} \theta^{(k)}; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \zeta} = e_3^{(k)} + \alpha_{33}^{(k)} \theta^{(k)}; \quad (2.2) \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \eta} = a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)}; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \xi} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)}; \quad \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)}; \\ e_m^{(k)} = a_{1m}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{2m}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{3m}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)}, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Розв'язок сингулярно-збуреної системи (2.2) складається з розв'язків зовнішньої задачі I^{out} і пограничного шару (I_b) [4]. Розв'язок зовнішньої задачі шукається у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(k)out} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(k,s)}; \quad (i, j = x, y, z), \quad s = \overline{0, S}; \\ u^{(k)out} &= \varepsilon^s u^{(k,s)}; \quad (u, v, w), \quad k = 1, 2, \dots, N,\end{aligned}\tag{2.3}$$

де позначення $s = \overline{0, S}$ означає, що по індексу s , який повторюється (німому індексу), відбувається сумування по цілочисельних значеннях від нуля до S (позначення Ейнштейна). Підставивши (2.3) у систему (2.2) і прирівнявши в кожному рівнянні відповідні коефіцієнти при ε , отримуємо нову систему, звідки однозначно знаходяться $\sigma_{ij}^{(k,s)}$, $u^{(k,s)}$, $v^{(k,s)}$, $w^{(k,s)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{jz}^{(k,s)} &= \sigma_{jz0}^{(k,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z; \\ \sigma_{xx}^{(k,s)} &= -\frac{A_{23}^{(k,s)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{z0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{xx*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta); \\ \sigma_{yy}^{(k,s)} &= -\frac{A_{13}^{(k,s)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{z0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{22}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{yy*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta); \\ \sigma_{xy}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left[\frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right]; \\ u^{(k,s)} &= a_{55}^{(k)} \zeta \sigma_{z0}^{(k,s)} + u_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta); \\ v^{(k,s)} &= a_{44}^{(k)} \zeta \sigma_{z0}^{(k,s)} + v_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta); \\ w^{(k,s)} &= \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta \sigma_{z0}^{(k,s)} + w_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta} \theta^{(k,s)} d\zeta + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),\end{aligned}\tag{2.4}$$

де

$$\theta^{(k,0)} = \varepsilon \theta^{(k)}; \quad \theta^{(k,s)} = 0 \quad \text{при } s \neq 0;$$

$$A_{11}^{(k)} = a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{22}^{(k)})^2; \quad A_{13}^{(k)} = a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)};$$

$$A_{23}^{(k)} = a_{22}^{(k)} a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)}; \quad A_{33}^{(k)} = a_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)} - a_{23}^{(k)} A_{13}^{(k)};$$

$$\gamma_{11}^{(k)} = \alpha_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - \alpha_{22}^{(k)} a_{12}^{(k)}; \quad \gamma_{22}^{(k)} = \alpha_{22}^{(k)} a_{11}^{(k)} - \alpha_{11}^{(k)} a_{12}^{(k)};$$

$$B_{11}^{(k)} = \alpha_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} \gamma_{11}^{(k)} - a_{23}^{(k)} \gamma_{22}^{(k)};$$

$$\sigma_{jz*}^{(k,s)} = - \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta} \left[F_j^{(k,s)} + \frac{\partial \sigma_{jx}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta, \quad j = x, y, z;$$

$$\sigma_{xx*}^{(k,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[a_{22}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - A_{23}^{(k)} \sigma_{zz*}^{(k,s)} \right];$$

$$\sigma_{yy^*}^{(k,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[a_{11}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k)} \sigma_{zz^*}^{(k,s)} \right]; \quad (2.5)$$

$$u_*^{(k,s)} = \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta} \left[a_{55}^{(k)} \sigma_{xz^*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right] d\zeta; \quad v_*^{(k,s)} = \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta} \left[a_{44}^{(k)} \sigma_{yz^*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta;$$

$$w_*^{(k,s)} = \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta} \left[a_{13}^{(k)} \sigma_{xx^*}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{yy^*}^{(k,s)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{zz^*}^{(k,s)} \right] d\zeta; \quad Q^{(k,m)} \equiv 0 \text{ при } m < 0.$$

Розв'язок (2.3) – (2.5) містить $6N$ невідомих функцій $\sigma_{jz_0}^{(k,s)}$, $u_0^{(k,s)}$, $v_0^{(k,s)}$, $w_0^{(k,s)}$, які однозначно визначаються з умов (1.3) – (1.5). Для першого шару маємо

$$\sigma_{jz_0}^{(1,s)} = 0; \quad \sigma_{jz}^{(1,s)} = \sigma_{jz^*}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z;$$

$$u^{(1,s)} = u_0^{(1,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta); \quad v^{(1,s)} = v_0^{(1,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta); \quad (2.6)$$

$$w^{(1,s)} = w_0^{(1,s)}(\xi, \eta) + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta) + \frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \int_0^{\zeta} \theta^{(1,s)} d\zeta.$$

Для шарів з індексами до (m) , згідно з умовами (1.5), отримуємо

$$\sigma_{jz}^{(n+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) = \sigma_{jz_0}^{(n,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz^*}^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_n) + \sigma_{jz^*}^{(n+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - \sigma_{jz^*}^{(n+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_n);$$

$$u^{(n+1)}(\xi, \eta, \zeta) = a_{55}^{(n+1)}(\zeta - \zeta_n) \sigma_{xz_0}^{(n+1,s)} + u^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_n) + u_*^{(n+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - u_*^{(n+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_n);$$

$$v^{(n+1)}(\xi, \eta, \zeta) = a_{44}^{(n+1)}(\zeta - \zeta_n) \sigma_{yz_0}^{(n+1,s)} + v^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_n) + v_*^{(n+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - v_*^{(n+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_n); \quad (2.7)$$

$$w^{(n+1)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{A_{33}^{(n+1)}}{A_{11}^{(n+1)}}(\zeta - \zeta_n) \sigma_{zz_0}^{(n+1,s)} + w^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_n) + w_*^{(n+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - w_*^{(n+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_n) + \frac{B_{11}^{(n+1)}}{A_{11}^{(n+1)}} \int_{\zeta_n}^{\zeta} \theta^{(n+1,s)} d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots, (m-1).$$

Задовольняючи умови (1.4), отримуємо

$$u^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta) = u^{+(s)} + a_{55}^{(m)}(\zeta - \zeta_m) \sigma_{xz_0}^{(m,s)} + u_*^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta) - u_*^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta_m);$$

$$v^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta) = v^{+(s)} + a_{44}^{(m)}(\zeta - \zeta_m) \sigma_{yz_0}^{(m,s)} + v_*^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta) - v_*^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta_m);$$

$$w^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta) = w^{+(s)} + \frac{A_{33}^{(m)}}{A_{11}^{(m)}}(\zeta - \zeta_m) \sigma_{zz_0}^{(m,s)} + \frac{B_{11}^{(m)}}{A_{11}^{(m)}} \left(\int_{\zeta_{m-1}}^{\zeta} \theta^{(m,s)} d\zeta - \int_{\zeta_{m-1}}^{\zeta_m} \theta^{(m,s)} d\zeta \right) + w_*^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta) - w_*^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta_m);$$

$$u^{+(0)} = u_x^+ / l; \quad v^{+(0)} = u_y^+ / l; \quad w^{+(0)} = u_z^+ / l; \quad u^{+(s)} = v^{+(s)} = w^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0; \quad (2.8)$$

$$u^{(m+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) = u^{+(s)} + a_{55}^{(m+1)}(\zeta - \zeta_m) \sigma_{xz_0}^{(m+1,s)} + u_*^{(m+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - u_*^{(m+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_m);$$

$$v^{(m+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) = v^{+(s)} + a_{44}^{(m+1)}(\zeta - \zeta_m) \sigma_{yz0}^{(m+1,s)} + v_*^{(m+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - v_*^{(m+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_m);$$

$$w^{(m+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) = w^{+(s)} + \frac{A_{33}^{(m+1)}}{A_{11}^{(m+1)}}(\zeta - \zeta_m) \sigma_{zz0}^{(m+1,s)} + \frac{B_{11}^{(m+1)}}{A_{11}^{(m+1)}} \int_{\zeta_m}^{\zeta} \theta^{(m+1,s)} d\zeta + \\ + w_*^{(m+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - w_*^{(m+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_m).$$

Для величин шарів з номерами більшими "m" справедливі формули (2.7), де n вже приймає значення: $n = m + 1, \dots (N - 1)$. Таким чином, за формулами (2.4), (2.6) – (2.8) послідовно обчислюються всі компоненти тензора напружень і вектора зміщення. Відзначимо також, що коли функції u_x^+, u_y^+, u_z^+ є многочленами, то ітераційний процес обривається на певному наближенні, в результаті отримується математично точний розв'язок у зовнішній задачі.

Маючи значення компонент тензора напружень і вектора зміщень, можна обчислити накопичену потенціальну енергію деформації за формулою

$$E = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dv, \quad (2.9)$$

а за формулою [10]

$$\lg E = 11,8 + 1,5M \quad (2.10)$$

магнітуду M очікуваного землетрусу.

§3. Математично точні розв'язки.

Вище було відзначено, що якщо функції u_x^+, u_y^+, u_z^+ є многочленами щодо тангенціальних координат ξ, η , то ітерація обривається і отримується математично точний розв'язок зовнішньої задачі. Для ілюстрації покажемо точний розв'язок для чотиришарового пакета, де на поверхні контакту між другим і третім шарами задані значення зміщення точок як даних вимірювань інклінометрів та інших вимірювальних засобів. Розглянемо також вплив ваги шарів:

$$u^+ = l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}), (u, v, w); \quad (3.1)$$

$$\theta^{(k)} = 0; F_x^{(k)} = F_y^{(k)} = 0; F_z^{(k)} = \rho_k g; F_z^{(k,0)} = \varepsilon^2 l \rho_k; g = \text{const}; F^{(k,s)} = 0, s \neq 0,$$

де ρ_k – густина; g – прискорення вільного падіння.

Граничними умовами задачі є такі:

$$\sigma_{jz}^{(1)}(\xi, \eta, 0, t_*) = 0, j = x, y, z \quad \text{при} \quad \zeta = 0;$$

$$\sigma_{jz}^{(1)} = \sigma_{jz}^{(2)}; u_j^{(1)} = u_j^{(2)}, j = x, y, z \quad \text{при} \quad \zeta = \zeta_1 = h_1 / h; \quad (3.2)$$

$$\sigma_{jz}^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_2) = \sigma_{jz}^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_2); u_j^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_2) = u_j^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_2) = u_j^+$$

при $\zeta = \zeta_2 = (h_1 + h_2) / h$;

$$\sigma_{jz}^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_3) = \sigma_{jz}^{(4)}(\xi, \eta, \zeta_3); u_j^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_3) = u_j^{(4)}(\xi, \eta, \zeta_3)$$

при $\zeta = \zeta_3 = (h_1 + h_2 + h_3) / h$.

Ітерація обривається на другому наближенні і, використовуючи формули (2.3) – (2.8), отримуємо

величини першого шару ($0 \leq \zeta \leq \zeta_1$):

$$\sigma_{xz}^{(1)} = 0; \sigma_{yz}^{(1)} = 0; \sigma_{zz}^{(1)} = -h \rho_1 g \zeta; \sigma_{xx}^{(1)} = \frac{A_{23}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} h \rho_1 g \zeta + \frac{1}{A_{11}^{(1)}} [a_{22}^{(1)} b_{2u} - a_{12}^{(1)} b_{3v}];$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \frac{A_{13}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} h \rho_1 g \zeta + \frac{1}{A_{11}^{(1)}} [a_{11}^{(1)} b_{3v} - a_{12}^{(1)} b_{2u}]; \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \frac{1}{a_{66}^{(1)}} [b_{2v} + b_{3u}];$$

$$u_x^{(1)} = u^+ + h b_{2w} (\zeta_2 - \zeta); \quad u_y^{(1)} = v^+ + h b_{3w} (\zeta_2 - \zeta); \quad (3.3)$$

$$u_z^{(1)} = w^+ + \frac{A_{33}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} h^2 g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1) (\zeta_1 - \zeta_2) - l w_*^{(2,0)} (\zeta_2) + l w_*^{(2,0)} (\zeta_1) - l w_*^{(1,0)} (\zeta_1) +$$

$$+ l w_*^{(1,0)} (\zeta) - h w_*^{(2,1)} (\zeta_2) + h w_*^{(2,1)} (\zeta_1) - h w_*^{(1,1)} (\zeta_1) + h w_*^{(1,1)} (\zeta);$$

величины второго шару ($\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$):

$$\sigma_{xz}^{(2)} = 0; \quad \sigma_{yz}^{(2)} = 0; \quad \sigma_{zz}^{(2)} = h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta);$$

$$\sigma_{xx}^{(2)} = -\frac{A_{23}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta) + \frac{1}{A_{11}^{(2)}} [a_{22}^{(2)} b_{2u} - a_{12}^{(2)} b_{3v}];$$

$$\sigma_{yy}^{(2)} = -\frac{A_{13}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta) + \frac{1}{A_{11}^{(2)}} [a_{11}^{(2)} b_{3v} - a_{12}^{(2)} b_{2u}]; \quad \sigma_{xy}^{(2)} = \frac{1}{a_{66}^{(2)}} [b_{2v} + b_{3u}]; \quad (3.4)$$

$$u_x^{(2)} = u^+ + h b_{2w} (\zeta_2 - \zeta); \quad u_y^{(2)} = v^+ + h b_{3w} (\zeta_2 - \zeta);$$

$$u_z^{(2)} = w^+ + \frac{A_{33}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} h^2 g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1) (\zeta - \zeta_2) - l w_*^{(2,0)} (\zeta_2) + l w_*^{(2,0)} (\zeta) -$$

$$- h w_*^{(2,1)} (\zeta_2) + h w_*^{(2,1)} (\zeta);$$

величины третьего шару ($\zeta_2 \leq \zeta \leq \zeta_3$):

$$\sigma_{xz}^{(3)} = 0; \quad \sigma_{yz}^{(3)} = 0; \quad \sigma_{zz}^{(3)} = h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 (\zeta_2 - \zeta));$$

$$\sigma_{xx}^{(3)} = -\frac{A_{23}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2 - \rho_3 \zeta) + \frac{1}{A_{11}^{(3)}} [a_{22}^{(3)} b_{2u} - a_{12}^{(3)} b_{3v}];$$

$$\sigma_{yy}^{(3)} = -\frac{A_{13}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} h g [\rho_2 (\zeta_1 - \zeta_2) - \rho_1 \zeta_1 + \rho_3 (\zeta_2 - \zeta)] + \frac{1}{A_{11}^{(3)}} [a_{11}^{(3)} b_{3v} - a_{12}^{(3)} b_{2u}]; \quad (3.5)$$

$$\sigma_{xy}^{(3)} = \frac{1}{a_{66}^{(3)}} [b_{2v} + b_{3u}]; \quad u_x^{(3)} = u^+ + h b_{2w} (\zeta_2 - \zeta); \quad u_y^{(3)} = v^+ + h b_{3w} (\zeta_2 - \zeta);$$

$$u_z^{(3)} = w^+ + \frac{A_{33}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} h^2 g [\rho_2 (\zeta_1 - \zeta_2) - \rho_1 \zeta_1 + \rho_3 \zeta_2] (\zeta - \zeta_2) - l w_*^{(3,0)} (\zeta_2) + l w_*^{(3,0)} (\zeta) -$$

$$- h w_*^{(3,1)} (\zeta_2) + h w_*^{(3,1)} (\zeta);$$

величины четвертого шару ($\zeta_3 \leq \zeta \leq 1$):

$$\sigma_{xz}^{(4)} = 0; \quad \sigma_{yz}^{(4)} = 0; \quad \sigma_{zz}^{(4)} = h g [\rho_2 (\zeta_1 - \zeta_2) - \rho_1 \zeta_1 + \rho_3 (\zeta_2 - \zeta_3) + \rho_4 (\zeta_3 - \zeta)];$$

$$\sigma_{xx}^{(4)} = -\frac{A_{23}^{(4)}}{A_{11}^{(4)}} h g [\rho_2 (\zeta_1 - \zeta_2) - \rho_1 \zeta_1 + \rho_3 (\zeta_2 - \zeta_3) + \rho_4 (\zeta_3 - \zeta)] + \frac{1}{A_{11}^{(4)}} [a_{22}^{(4)} b_{2u} - a_{12}^{(4)} b_{3v}];$$

$$\sigma_{yy}^{(4)} = -\frac{A_{13}^{(4)}}{A_{11}^{(4)}} hg \left[\rho_2 (\zeta_1 - \zeta_2) - \rho_1 \zeta_1 + \rho_3 (\zeta_2 - \zeta_3) + \rho_4 (\zeta_3 - \zeta) \right] + \frac{1}{A_{11}^{(4)}} \left[a_{11}^{(4)} b_{3v} - a_{12}^{(4)} b_{2u} \right];$$

$$\sigma_{xy}^{(4)} = \frac{1}{a_{66}^{(4)}} [b_{2v} + b_{3u}]; \quad u_x^{(4)} = u^+ + hb_{2w} (\zeta_2 - \zeta); \quad u_y^{(4)} = v^+ + hb_{3w} (\zeta_2 - \zeta); \quad (3.6)$$

$$u_z^{(4)} = w^+ + \frac{A_{33}^{(4)}}{A_{11}^{(4)}} h^2 g \left[\rho_2 (\zeta_1 - \zeta_2) - \rho_1 \zeta_1 + \rho_3 (\zeta_2 - \zeta_3) + \rho_4 \zeta_3 \right] (\zeta - \zeta_3) +$$

$$+ \frac{A_{33}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} h^2 g \left[\rho_2 (\zeta_1 - \zeta_2) - \rho_1 \zeta_1 + \rho_3 \zeta_2 \right] (\zeta_3 - \zeta_2) - hw_*^{(3,0)} (\zeta_2) + hw_*^{(3,0)} (\zeta_3) -$$

$$- hw_*^{(4,0)} (\zeta_3) + hw_*^{(4,0)} (\zeta) - hw_*^{(3,1)} (\zeta_2) + hw_*^{(3,1)} (\zeta_3) - hw_*^{(4,1)} (\zeta_3) + hw_*^{(4,1)} (\zeta),$$

де

$$w_*^{(k,0)} (\zeta) = \frac{1}{2A_{11}^{(k)}} \varepsilon^2 \zeta^2 l \rho_k g \left(a_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)} + a_{23}^{(k)} A_{13}^{(k)} - a_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} \right);$$

$$w_*^{(k,1)} (\zeta) = \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \zeta \left[b_{2u} \left(a_{13}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)} \right) + b_{3v} \left(a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)} \right) \right], \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.7)$$

Розв'язок зовнішньої задачі зазвичай не відповідає граничним умовам на бічній поверхні. Отримана невідповідність усувається розв'язком пограничного шару. Значення граничного шару експоненціально зменшуються при віддаленні від бічної поверхні в середину пакету. Оскільки тангенціальний розмір пакету значно більший від її товщини, то зазвичай в таких задачах пограничним шаром нехтують. При необхідності розв'язок для пограничного шару можна побудувати і поєднати з розв'язком зовнішньої задачі описаним в [4] способом.

Маючи розв'язок зовнішньої задачі, можна стежити за зміною НДС з часом відповідно до регулярних вимірювань. Між окремими шарами пакету може виникнути відрив (коли дотичні напруження стають більшими за допустиме значення), можливе крихке локальне руйнування (коли нормальне напруження перевищує допустиме значення розтягу або стиску для відповідного матеріалу шару) і, нарешті, глобальне руйнування (землетрус), коли величезна потенціальна енергія деформації, накопичена протягом багатьох років, досягає критичного значення.

§4. Асимптотика швидкоплинних процесів.

Щоб дослідити швидкоплинні процеси, які мають динамічний характер (Foreshocks, Earthquakes, Aftershocks), необхідно розв'язати в області Z рівняння руху теорії пружності

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} = \rho_k \frac{\partial^2 u_x^{(k)}}{\partial t^2}, \quad (x, y, z), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

при співвідношеннях пружності (1.2) (звичайно без врахування температури).

Вважаємо, що дані вимірювань зняті з поверхні контакту між першим і другим шарами. Узагальнення, коли дані зняті з поверхні контакту між довільно вибраними шарами, не викликає ніяких труднощів.

Граничними умовами задачі будуть:

при $z = 0$ (лицева поверхня вільна)

$$\sigma_{jz}^{(1)} (x, y, 0, t) = 0, \quad j = x, y, z; \quad (4.2)$$

при $z = h_1$ (відомі значення зміщень)

$$u_x^{(1)}(x, y, h_1, t) = u_x^{(2)}(x, y, h_1, t) = u_x^+(x, y) \exp(i\Omega t), \quad (x, y, z); \quad (4.3)$$

умови повного контакту (1.5) між всіма суміжними шарами.

В (4.3) Ω є частотою коливань поверхні контакту між першим і другим шарами, яка фіксується інклінометрами, сейсмостанціями, GPS.

Розв'язок сформульованої задачі шукається у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y, z, t) &= \sigma_{ij}^{(k)}(x, y, z) \exp(i\Omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad i, j = 1, 2, 3; \\ u_x^{(k)}(x, y, z, t) &= \bar{u}_x^{(k)}(x, y, z) \exp(i\Omega t), \quad (x, y, z). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Переходячи далі в рівняннях (4.1) і співвідношеннях пружності (1.2) до безрозмірних координат і зміщень за формулами

$$\xi = x/l; \quad \eta = y/l; \quad \zeta = z/h = \varepsilon^{-1} z/l; \quad U^{(k)} = \bar{u}_x^{(k)}/l; \quad V^{(k)} = \bar{u}_y^{(k)}/l; \quad W^{(k)} = \bar{u}_z^{(k)}/l, \quad (4.5)$$

отримуємо сингулярно збурену малим параметром $\varepsilon = h/l$ систему. Розв'язок цієї системи, як і в квазістатичній задачі, складається з розв'язків зовнішньої задачі ($I^{(k)out}$) і пограничного шару ($I_b^{(k)}$).

Розв'язок зовнішньої задачі має вигляд

$$U^{(k)out} = \varepsilon^s U^{(k,s)}, \quad (U, V, W); \quad \sigma_{ij}^{(k)out} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(k,s)}, \quad s = \bar{0}, \bar{S}. \quad (4.6)$$

Якщо підставити (4.6) у вказану вище перетворену систему і прирівняти в кожному рівнянні відповідні коефіцієнти щодо ε , то можна отримати систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 \rho_k U^{(k,s)} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 \rho_k V^{(k,s)} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(k,s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 \rho_k W^{(k,s)} &= 0; \\ \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k,s)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k,s)}; \\ \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} &= a_{12}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{33}^{(k,s)}; \\ \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} &= a_{13}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{22}^{(k,s)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k,s)}; \quad \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k,s)}; \\ \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \zeta} &= a_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k,s)}; \quad \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(k)} \sigma_{12}^{(k,s)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

де $\Omega_* = h\Omega$, величини типу $Q^{(k,m)} \equiv 0$ при $m < 0$.

З системи (4.7) однозначно визначаються всі необхідні величини $\sigma_{ij}^{(k,s)}$, $U^{(k,s)}$, $V^{(k,s)}$, $W^{(k,s)}$. Напруження виражаються через зміщення за формулами

$$\sigma_{11}^{(k,s)} = -B_{23}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} + B_{22}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - B_{12}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta}, \quad (1, 2; \xi, \eta; 22, 33; U, V);$$

$$\sigma_{33}^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} - B_{23}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - B_{13}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta}; \quad \sigma_{12}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left(\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right); \quad (4.8)$$

$$\sigma_{13}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(k)}} \left(\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right), \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V; a_{55}, a_{44}),$$

де $B_{ij}^{(k)}$ виражаються через $a_{ij}^{(k)}$ за формулами

$$B_{11}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - \left(a_{12}^{(k)} \right)^2 \right) / \Delta; \quad B_{22}^{(k)} = \left(a_{22}^{(k)} a_{33}^{(k)} - \left(a_{23}^{(k)} \right)^2 \right) / \Delta; \quad B_{33}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)} a_{33}^{(k)} - \left(a_{13}^{(k)} \right)^2 \right) / \Delta;$$

$$B_{13}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)} \right) / \Delta; \quad B_{23}^{(k)} = \left(a_{22}^{(k)} a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)} \right) / \Delta;$$

$$B_{12}^{(k)} = \left(a_{12}^{(k)} a_{33}^{(k)} - a_{13}^{(k)} a_{23}^{(k)} \right) / \Delta; \quad (4.9)$$

$$\Delta = a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} a_{33}^{(k)} + 2a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{11}^{(k)} \left(a_{23}^{(k)} \right)^2 - a_{22}^{(k)} \left(a_{13}^{(k)} \right)^2 - a_{33}^{(k)} \left(a_{12}^{(k)} \right)^2.$$

Підставляючи значення $\sigma_{13}^{(k,s)}$, $\sigma_{23}^{(k,s)}$, $\sigma_{33}^{(k,s)}$ у перші три рівняння (4.7), для знаходження $U^{(k,s)}$, $V^{(k,s)}$, $W^{(k,s)}$ отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2 U^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(k)} \rho_k \Omega_*^2 U^{(k,s)} = R_u^{(k,s)} \left(U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{B_{11}} \right), \quad (4.10)$$

де

$$R_u^{(k,s)} = -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55}^{(k)} \left[\frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad (U, V, 1, 2; \xi, \eta; a_{55}, a_{44});$$

$$R_w^{(k,s)} = \frac{1}{B_{11}^{(k)}} \left[B_{23}^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + B_{13}^{(k)} \frac{\partial^2 V^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right]. \quad (4.11)$$

Розв'язками рівнянь (4.10) є

$$U^{(k,s)} = C_{u1}^{(k,s)} (\xi, \eta) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)} \rho_k} \zeta + C_{u2}^{(k,s)} (\xi, \eta) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)} \rho_k} \zeta + \bar{u}^{-(k,s)} (\xi, \eta, \zeta) \quad (4.12)$$

$\left(U, V, W; a_{55}^{(k)}, a_{44}, \frac{1}{B_{11}^{(k)}} \right)$, $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ – частинні розв'язки рівнянь (4.10).

Невідомі функції $C_{u1}^{(k,s)}$, $C_{u2}^{(k,s)}$, (u, v, w) знаходяться шляхом виконання умов (4.2), (4.3), (1.5). Задовольняючи умови (4.2), (4.3), для першого шару отримуємо

$$C_{u1}^{(1,s)} = -\frac{1}{\Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)} \rho_1}} \left(\frac{\partial W^{(1,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}^{-(1,s)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=0};$$

$$C_{u2}^{(1,s)} = \frac{U^{+(s)} - \bar{u}^{-(1,s)}(\zeta_1)}{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)} \rho_1} \zeta_1} - C_{u1}^{(1,s)} \operatorname{tg} \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)} \rho_1} \zeta_1, \quad (U, V; \xi, \eta; a_{55}, a_{44});$$

$$C_{w1}^{(1,s)} = -\frac{\bar{W}^{(1,s)}}{\Omega_* \sqrt{B_{11}^{(1)} \rho_1}}; \quad C_{w2}^{(1,s)} = \frac{W^{+(s)} - \bar{w}^{-(1,s)}(\zeta_1)}{\cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_1}{B_{11}^{(1)}}} \zeta_1} - C_{w1}^{(1,s)} \operatorname{tg} \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_1}{B_{11}^{(1)}}} \zeta_1; \quad (4.13)$$

$$\tilde{W}^{(1,s)} = \left[B_{11}^{(1)} \frac{\partial \bar{w}^{-(1,s)}}{\partial \zeta} - B_{23}^{(1)} \frac{\partial U^{(1,s-1)}}{\partial \xi} - B_{13}^{(1)} \frac{\partial V^{(1,s-1)}}{\partial \eta} \right]_{\zeta=0};$$

$$U^{+(0)} = u_x^+ / l; \quad U^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (U, V, W; u_x, u_y, u_z).$$

Задовольняючи умови (4.3), (1.5), для другого шару отримуємо

$$C_{u1}^{(2,s)} = \alpha_u^{(2,s)} \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1 + \beta_u^{(2,s)} \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1;$$

$$C_{u2}^{(2,s)} = \beta_u^{(2,s)} \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1 - \alpha_u^{(2,s)} \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1;$$

$$\alpha_u^{(2,s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{(2)}}{\rho_2}} \left(\sigma_{13}^{(1,s)} (\zeta = \zeta_1) - \tilde{\sigma}_{13}^{(2,s)} (\zeta = \zeta_1) \right); \quad \beta_u^{(2,s)} = U^{+(s)} - \bar{u}^{-(2,s)} (\zeta = \zeta_1);$$

$$\tilde{\sigma}_{13}^{(2,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(2)}} \left(\frac{\partial W^{(2,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}^{-(2,s)}}{\partial \zeta} \right), \quad (u, v; 1, 2; \xi, \eta; a_{55}, a_{44}); \quad (4.14)$$

$$C_{w1}^{(2,s)} = \alpha_w^{(2,s)} \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_2}{B_{11}^{(2)}}} \zeta_1 + \beta_w^{(2,s)} \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_2}{B_{11}^{(2)}}} \zeta_1;$$

$$C_{w2}^{(2,s)} = \beta_w^{(2,s)} \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_2}{B_{11}^{(2)}}} \zeta_1 - \alpha_w^{(2,s)} \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_2}{B_{11}^{(2)}}} \zeta_1;$$

$$\alpha_w^{(2,s)} = \frac{1}{\Omega_* \sqrt{B_{11}^{(2)}} \rho_2} \left[\sigma_{33}^{(1,s)} (\zeta_1) - \tilde{W}^{(2,s)} (\zeta_1) \right];$$

$$\beta_w^{(2,s)} = W^{+(s)} - \bar{w}^{-(2,s)} (\zeta = \zeta_1); \quad \tilde{W}^{(2,s)} = \left[B_{11}^{(2)} \frac{\partial \bar{w}^{-(2,s)}}{\partial \zeta} - B_{13}^{(2)} \frac{\partial V^{(2,s-1)}}{\partial \eta} - B_{23}^{(2)} \frac{\partial U^{(2,s-1)}}{\partial \xi} \right]_{\zeta=\zeta_1}.$$

Для шару з довільним (k), задовольняючи умови контакту (1.5), будемо мати

$$C_{u1}^{(k,s)} = \alpha_u^{(k,s)} \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)}} \rho_k \zeta_{k-1} + \beta_u^{(k,s)} \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)}} \rho_k \zeta_{k-1};$$

$$C_{u2}^{(k,s)} = \beta_u^{(k,s)} \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)}} \rho_k \zeta_{k-1} - \alpha_u^{(k,s)} \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)}} \rho_k \zeta_{k-1};$$

$$\alpha_u^{(k,s)} = \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{(k)}}{\rho_k}} \left(\sigma_{13}^{(k-1,s)} (\zeta = \zeta_{k-1}) - \tilde{\sigma}_{13}^{(k,s)} (\zeta = \zeta_{k-1}) \right);$$

$$\beta_u^{(k,s)} = U^{(k-1,s)} (\zeta = \zeta_{k-1}) - \bar{u}^{-(k,s)} (\zeta = \zeta_{k-1});$$

$$\tilde{\sigma}_{13}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(k)}} \left(\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}^{-(k,s)}}{\partial \zeta} \right); \quad \zeta_{k-1} = \left(\sum_{i=1}^{k-1} h_i \right) / h, \quad (u, v; 13, 23; \xi, \eta; a_{55}, a_{44}); \quad (4.15)$$

$$C_{w1}^{(k,s)} = \alpha_w^{(k,s)} \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_k}{B_{11}^{(k)}}} \zeta_{k-1} + \beta_w^{(k,s)} \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_k}{B_{11}^{(k)}}} \zeta_{k-1};$$

$$C_{w2}^{(k,s)} = \beta_w^{(k,s)} \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_k}{B_{11}^{(k)}}} \zeta_{k-1} - \alpha_w^{(k,s)} \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_k}{B_{11}^{(k)}}} \zeta_{k-1};$$

$$\alpha_w^{(k,s)} = \frac{1}{\Omega_* \sqrt{B_{11}^{(k)}} \rho_k} \left[\sigma_{33}^{(k-1,s)} (\zeta_{k-1}) - \tilde{W}^{(k,s)} (\zeta_{k-1}) \right];$$

$$\beta_w^{(k,s)} = W^{(k-1,s)} (\zeta = \zeta_{k-1}) - \tilde{W}^{(k,s)} (\zeta = \zeta_{k-1});$$

$$\tilde{W}^{(k,s)} = \left[B_{11}^{(k)} \frac{\partial \tilde{W}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - B_{13}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - B_{23}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right]_{\zeta=\zeta_{k-1}}, \quad 3 \leq k \leq N.$$

Знайшовши $C_{u1}^{(k,s)}$, $C_{u2}^{(k,s)}$, (u, v, w) , можна визначити за формулами (4.4), (4.8), (4.12) – (4.15) всі напруження і зміщення шарів. Як і в квазістатичній задачі, розв'язок зовнішньої задачі, як правило, не буде задовольняти граничні умови на бічній поверхні пакета. Нев'язка, що виникає, усувається розв'язком для пограничного шару [4].

§5. Математично точні розв'язки.

Якщо функції u_x^+ , u_y^+ , u_z^+ , що входять до умови (4.3), є многочленами від тангенціальних координат, то ітераційний процес визначення сум, які слід знайти, обривається і отримується математично точний розв'язок зовнішньої задачі. Для ілюстрації, покажемо цей розв'язок для тришарового пакету (наприклад, блоку земної кори), коли $u_x^+ = u^+ = \text{const}$, (u, v, w) . Граничними умовами задачі будуть:

$$\sigma_{jz}^{(1)} (\xi, \eta, 0, t) = 0, \quad j = x, y, z \quad \text{при} \quad \zeta = 0;$$

$$\sigma_{jz}^{(1)} = \sigma_{jz}^{(2)}; \quad u_x^{(1)} = u_x^{(2)} = u^+ \exp(i\Omega t); \quad (x, y, z; u^+, v^+, w^+) \quad \text{при} \quad \zeta = \zeta_1 = h_1 / h; \quad (5.1)$$

$$\sigma_{jz}^{(2)} = \sigma_{jz}^{(3)}; \quad u_x^{(2)} = u_x^{(3)}; \quad (x, y, z) \quad \text{при} \quad \zeta = \zeta_2 = (h_1 + h_2) / h.$$

Згідно з формулами (4.8), (4.12) – (4.15), ітерація обривається на початковому наближенні і отримується математично точний розв'язок зовнішньої задачі: величини першого шару ($0 \leq \zeta \leq \zeta_1$)

$$u_x^{(1)} = IU^{(1,0)} \exp(i\Omega t) = u^+ \frac{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_1 \zeta}{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_1 \zeta_1} \exp(i\Omega t);$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \varepsilon^{-1} \sigma_{13}^{(1,0)} \exp(i\Omega t) = -\frac{u^+}{h} \sqrt{\frac{\rho_1}{a_{55}^{(1)}}} \Omega_* \frac{\sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_1 \zeta}{\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_1 \zeta_1} \exp(i\Omega t); \quad (5.2)$$

величини $u_y^{(1)}$, $\sigma_{yz}^{(1)}$; $u_z^{(1)}$, $\sigma_{zz}^{(1)}$ можна виписати згідно з формулою (5.2) циклічною перестановкою в них

$$(x, y, z; U, V, W; 13, 23, 33, u^+, v^+, w^+; a_{55}, a_{44}, 1/B_{11});$$

величини другого шару ($\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$)

$$\begin{aligned}
 u_x^{(2)} = IU^{(2,0)} \exp(i\Omega t) = u^+ & \left[\left(\sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1 - \sqrt{\frac{\rho_1 a_{55}^{(2)}}{\rho_2 a_{55}^{(1)}}} \operatorname{tg} \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_1 \zeta_1 \times \right. \right. \\
 & \times \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1 \left. \right) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta + \left(\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho_1 a_{55}^{(2)}}{\rho_2 a_{55}^{(1)}}} \operatorname{tg} \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_1 \zeta_1 \times \right. \\
 & \left. \left. \times \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_2 \zeta_1 \right) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta \right] \exp(i\Omega t); \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}^{(2)} = \varepsilon^{-1} \sigma_{13}^{(2,0)} \exp(i\Omega t) = \frac{u^+}{h} \frac{1}{a_{55}^{(2)}} & \left[\left(\sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1 - \sqrt{\frac{\rho_1 a_{55}^{(2)}}{\rho_2 a_{55}^{(1)}}} \operatorname{tg} \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_1 \zeta_1 \times \right. \right. \\
 & \times \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1 \left. \right) \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta - \left(\cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_2 \zeta_1 + \right. \\
 & \left. + \sqrt{\frac{\rho_1 a_{55}^{(2)}}{\rho_2 a_{55}^{(1)}}} \operatorname{tg} \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_1 \zeta_1 \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta_1 \right) \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}} \rho_2 \zeta \left. \right] \exp(i\Omega t) \\
 & (x, y, z; U, V, W; 13, 23, 33, u^+, v^+, w^+; a_{55}, a_{44}, 1/B_{11});
 \end{aligned}$$

величини третього шару ($\zeta_2 \leq \zeta \leq 1$)

$$\begin{aligned}
 u_x^{(3)} = IU^{(3,0)} \exp(i\Omega t) = l & \left[\left(\frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{(3)}}{\rho_3}} \sigma_{13}^{(2,0)}(\zeta_2) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta_2 + \right. \right. \\
 & + U^{(2,0)}(\zeta_2) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta_2 \left. \right) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta + \left(U^{(2,0)}(\zeta_2) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta_2 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{(3)}}{\rho_3}} \sigma_{13}^{(2,0)}(\zeta_2) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta_2 \right) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta \exp(i\Omega t); \\
 \sigma_{xz}^{(3)} = \varepsilon^{-1} \sigma_{13}^{(3,0)} \exp(i\Omega t) = \frac{\varepsilon^{-1}}{a_{55}^{(3)}} & \left[\left(\frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{(3)}}{\rho_3}} \sigma_{13}^{(2,0)}(\zeta_2) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta_2 + \right. \right. \quad (5.4) \\
 & + U^{(2,0)}(\zeta_2) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta_2 \left. \right) \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta - \\
 & \left. - \left(U^{(2,0)}(\zeta_2) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta_2 - \frac{1}{\Omega_*} \sqrt{\frac{a_{55}^{(3)}}{\rho_3}} \sigma_{13}^{(2,0)}(\zeta_2) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta_2 \right) \times \right. \\
 & \left. \times \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(3)}} \rho_3 \zeta \right] \exp(i\Omega t) \\
 & (x, y, z; U, V, W; 13, 23, 33, u^+, v^+, w^+; a_{55}, a_{44}, 1/B_{11}).
 \end{aligned}$$

Висновок.

На основі знання структури місцевості – шаруватість, товщини, пружні і температурні характеристики, густину шарів і значення зміщень точок поверхні контакту між деякими шарами, такі як дані вимірювань інклінометрами, сейсмічними станціями, системами GPS, визначено НДС шаруватого пакету. Розв’язані відповідні квазістатичні тривимірні задачі теорії пружності, що описують, зокрема, повільні (вікові) рухи літосферних плит і блоків земної кори, а також динамічні тривимірні задачі, що описують швидкоплинні (скачкоподібні) рухи. Вказані випадки, коли знайдені асимптотичні розв’язки стають математично точними. Наводяться ілюстровані приклади. Отримані розв’язки дозволяють, на підставі регулярних вимірювань, простежити весь процес підготовки і виникнення землетрусів.

РЕЗЮМЕ. Розв’язано просторові квазістатичні і динамічні задачі теорії пружності для багатошарового пакету, що моделюють поведінку літосферних плит і блоків земної кори. За даними сейсмічних станцій, GPS, інклінометрів та інших вимірювальних засобів розглянуто повільні (вікові) і швидкоплинні рухи літосферних плит. Показано, що проводячи регулярні вимірювання, на основі отриманих розв’язків, можна простежити весь процес підготовки і виникнення землетрусів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: шарувата пластина, літосферна плита, пружність, 3D-задачі, сейсмологія, прогнозування землетрусу, асимптотичний метод.

1. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* К исследованию краевых задач сейсмологии // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2004. – № 3. – С. 5 – 10.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. и др.* О стартовом землетрясении при гармонических воздействиях в пространственном варианте // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2018. – **15**, № 2. – С. 24 – 29.
3. *Ломnitz Ц., Сингх С.К.* Землетрясения и их прогноз. В кн.: Сейсмический риск и инженерные решения. – Москва: Недра, 1981. – С. 7 – 31.
4. *Aghalovyan L.A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells – Singapore, London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
5. *Aghalovyan L.A.* On Some Classes of 3D Boundary-Value Problems of Statics and Dynamics of Plates and Shells. In: Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology. – Switzerland: Springer, 2015. – P. 1 – 23.
6. *Aghalovyan L.A.* On One Class of Three-Dimensional Problems of Elasticity Theory for Plates // Proc. of the A. Razmadze Mathematical Institute, 2011. – **155**. – P. 3 – 10.
7. *Anderson M.* Investigating Plate Tectonics, Earthquakes and Volcanoes. – New York: Britannica Educational Publishing, 2012. – 87 p.
8. *Basar S., Coupland D., Obrist H.U.* The Age of Earthquakes. – London: Penguin Books, 2015. – 256 p.
9. *Bolt B.A.* Earthquakes. – San Francisco, 1978. – 241 p.
10. *Gallant R.A.* Plates: Restless Earth. – New York: Marshall Cavendish, 2003. – 80 p.
11. *Gutenberg B., Richter C.F.* Earthquake magnitude, intensity, energy and acceleration // Bulletin of the Seismological Soc. Amer. – 1956. – **46**, № 2. – P. 105 – 145.
12. *Kasahara K.* Earthquake Mechanics – Cambridge: Cambridge University Press, 1981. – 248 p.
13. *Pichon H. Le, Francheteau J., Bonnin J.* Plate Tectonics. – Amsterdam: Elsevier, 1973. – 314 p.
14. *Rikitake T.* Earthquake Prediction. – Amsterdam: Elsevier, 1976. – 381 p.

Надійшла 18.02.2020

Затверджена до друку 15.12.2020