

С.Ю.Бабич, Ю.П.Глухов

ПРО ОДНУ ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Несетерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: gluchov.uriy@gmail.com

Abstract. The influence of initial stresses and speed of surface load on the values of the roots of characteristic equations, which correspond to the equations of motion of compressive and non-compressive elements of layered semi-space is studied. The assessment of possible values of the roots of characteristic equations is carried out. The necessary and sufficient conditions for the existence of multiple roots of the characteristic equation are obtained. For the materials with the elastic potential of harmonic type and Bartenev-Khazanovich elastic potential, the numerical study is carried out.

Key words: multilayered semi-space, initial (residual) stresses, moving load, characteristic equations.

Вступ.

Серед широкого кола питань, безпосередньо пов'язаних з постановкою і розв'язуванням задач про рухомі навантаження, важливими в практичному і теоретичному сенсі є питання дослідження поширення хвиль в пружних системах плоско паралельних шарів з різними пружними властивостями.

У даній статті розглянута динамічна задача для багатошарової попередньо напруженої смуги, що лежить на півпросторі, і на яку діє поверхневе рухоме навантаження. Дослідження проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [4]. В рамках цієї теорії різні двомірні моделі багатошарового середовища вивчалися в роботах [1 – 3, 5, 6, 9 – 14].

§1. Постановка задач.

Розглянемо задачу в рамках постановки, викладеної в роботах [1 – 3]. Пружна багатошарова смуга, що складається з плоско паралельних пружних шарів, лежить на півпросторі. На вільну поверхню смуги діє навантаження, що рухається з постійною швидкістю v .

Вважаємо, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням. В цьому випадку при однорідному початково-деформованому стані рівняння усталеного руху пружних шарів і півпростору можна записати у вигляді

$$\left(\eta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{\{s\}(j)} = 0; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad j = 1, 2. \quad (1.1)$$

Корені $\eta_1^{\{s\}}$ і $\eta_2^{\{s\}}$ визначаються із рівнянь

$$\eta^{\{s\}4} - 2A^{\{s\}}\eta^{\{s\}2} + A_1^{\{s\}} = 0, \quad (1.2)$$

де для стисливого матеріалу

$$2A^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} \right)^2 - \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2 \right) - \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2 \right);$$

$$A_4^{(s)} \tilde{\omega}_{222}^{(s)} \tilde{\omega}_{2112}^{(s)} = (\tilde{\omega}_{1111}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2) (\tilde{\omega}_{1221}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2); \quad \tilde{\rho}^{(s)} \lambda_1^{(s)} \lambda_2^{(s)} \lambda_3^{(s)} = \rho^{(s)}; \quad (1.3)$$

для нестисливого матеріалу

$$2A^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)2} \tilde{\kappa}_{2112}^{(s)} = 2\tilde{q}_{11}^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)} (\tilde{\kappa}_{1122}^{(s)} + \tilde{\kappa}_{1212}^{(s)}) - \tilde{q}_{11}^{(s)2} \tilde{\kappa}_{2222}^{(s)} - \tilde{q}_{22}^{(s)2} (\tilde{\kappa}_{1111}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2);$$

$$A_4^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)2} \tilde{\kappa}_{2112}^{(s)} = \tilde{q}_{11}^{(s)2} (\tilde{\kappa}_{1221}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2); \quad \tilde{q}_{ij}^{(s)} = \delta_{ij} \lambda_i^{(s)} q_i^{(s)}; \quad \tilde{\rho}^{(s)} = \rho^{(s)}; \quad i, j = 1, 2; \quad (1.4)$$

$\rho^{(s)}$ – густина матеріалу в природньому стані; $\tilde{\omega}^{(s)}$, $\tilde{\kappa}^{(s)}$ – параметри, що характеризують матеріал і напружено-деформований стан елемента багаточарового середовища у випадку стисливого і нестисливого матеріалів, відповідно, s – номер елемента багаточарового середовища.

Значення функцій $\eta_1^2(v)$ і $\eta_2^2(v)$ визначають вид рівнянь руху (1.1) і відповідно вибір форми їх розв'язку.

Представимо розв'язок рівнянь (1.2) у вигляді

$$\eta_i^{(s)2}(v) = A^{(s)} \pm \sqrt{D^{(s)}}; \quad D^{(s)} = A^{(s)2} - A_1^{(s)}. \quad (1.5)$$

У табл. 1 представлені варіанти можливих значень коренів $\eta_1^{(s)2}$ і $\eta_2^{(s)2}$ рівнянь (1.2) в залежності від значень дійсних функцій $A^{(s)}$, $A_1^{(s)}$ і $D^{(s)}$. Символ «с» відповідає комплексному значенню функцій, що досліджуються. Значення $\eta_i^{(s)2}$ – дійсні, якщо $D^{(s)} \geq 0$, і $\eta_i^{(s)2}$ – комплексні, якщо $D^{(s)} < 0$.

Таблиця 1

$A^{(s)}$	$A_1^{(s)}$	$D^{(s)}$	$\eta_1^{(s)2}$	$\eta_2^{(s)2}$	$A^{(s)}$	$A_1^{(s)}$	$D^{(s)}$	$\eta_1^{(s)2}$	$\eta_2^{(s)2}$
+	+	+	+	+	0	-	+	-	+
+	+	-	с	с	-	+	+	-	-
+	+	0		+	-	+	0		-
+	-	+	-	+	-	+	-	с	с
+	0	+	0	+	-	0	+	-	0
0	+	-	с	с	-	-	+	-	+
0	0	0		0					

Відзначимо, що при $D^{(s)} = 0$ корені рівняння (1.2) будуть рівними ($\eta_1^{(s)} = \eta_2^{(s)}$). Крім того, як видно із табл. 1, рівняння (1.2) можуть мати двократні корені, рівні нулю і в випадку, коли $A_1^{(s)} = 0$.

§2. Стисливий матеріал.

Введемо позначення

$$\tilde{\rho}^{(s)} c_{ij}^{(s)2} = \tilde{\omega}_{iji}^{(s)}; \quad \tilde{\rho}^{(s)} d^{(s)} = \tilde{\omega}_{1122}^{(s)} + \tilde{\omega}_{1212}^{(s)}; \quad i, j = 1, 2. \quad (2.1)$$

Використовуючи (1.4), співвідношення (1.3) можна записати у вигляді

$$2Ac_{22}^2 c_{21}^2 = d^2 - c_{22}^2 (c_{11}^2 - v^2) - c_{21}^2 (c_{12}^2 - v^2); \quad A_4 c_{22}^2 c_{21}^2 = (c_{11}^2 - v^2) (c_{12}^2 - v^2). \quad (2.2)$$

Тут через $c_{ii}^{(s)}$ і $c_{ij}^{(s)}$ ($i \neq j$) позначені швидкості поширення вздовж осей Ou_i відповідно повздовжніх та поперечних поляризованих хвиль в необмеженому тілі з початковими напруженнями [7].

Рівняння $D^{(s)} = 0$ є бікватратними алгебраїчними рівняннями відносно швидкості v . Корені цих рівнянь визначаються за формулою

$$v_i^{\{s\}2} = (c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2})^{-2} \left\{ (c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2}) (c_{22}^{\{s\}2} c_{11}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2}) - d^{\{s\}2} (c_{22}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2}) + (-1)^i \sqrt{4d^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2} [d^{\{s\}2} - (c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2}) (c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2})]} \right\}. \quad (2.3)$$

Із (2.3) випливає, що рівняння $D^{\{s\}} = 0$ мають дійсні корені у випадку, якщо виконується умова

$$(c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2})(c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2}) \leq d^{\{s\}2}. \quad (2.4)$$

Для швидкостей $v_i^{\{s\}}$, що визначаються формулою (2.3), справедлива нерівність

$$v_i^{\{s\}} \leq c_{12}^{\{s\}}. \quad (2.5)$$

Умова $v_1^{\{s\}2} \geq 0$ виконується при

$$d^{\{s\}} \leq c_{11}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}} - c_{12}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}}; \quad d^{\{s\}} \geq c_{11}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}} + c_{12}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}}. \quad (2.6)$$

Дослідимо функцію $A^{\{s\}}$. Із першої формули (1.5) випливає, що $A^{\{s\}} \geq 0$ при $v \geq v_{12}^{\{s\}}$ і $A^{\{s\}} < 0$ при $v < v_{12}^{\{s\}}$. Тут

$$v_{12}^{\{s\}2} = (c_{22}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2})^{-1} (c_{11}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2} - d^{\{s\}2}). \quad (2.7)$$

Неважко довести, що:

$$\begin{aligned} v_{12}^{\{s\}} < 0, \text{ якщо } d^{\{s\}2} > c_{11}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2}; \\ 0 \leq v_{12}^{\{s\}} \leq c_{12}^{\{s\}}, \text{ якщо } c_{11}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2} \geq d^{\{s\}2} \geq c_{22}^{\{s\}2} (c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2}); \\ c_{12}^{\{s\}} < v_{12}^{\{s\}} < c_{11}^{\{s\}}, \text{ якщо } d^{\{s\}2} < c_{22}^{\{s\}2} (c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} d_0^{\{s\}2} &= (c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2})(c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2}); \quad d_1^{\{s\}2} = c_{22}^{\{s\}2} (c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2}); \\ d_2^{\{s\}2} &= c_{11}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2}; \quad d_1^{\{s\}*} = c_{11}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}} - c_{12}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}}; \quad d_2^{\{s\}*} = c_{11}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}} + c_{12}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для позначених величин справедливі нерівності

$$d_0^{\{s\}2} < d_1^{\{s\}2} < d_2^{\{s\}2} < d_2^{\{s\}*2}; \quad (2.10)$$

$$d_0^{\{s\}2} \leq d_1^{\{s\}*2} < d_2^{\{s\}2} < d_2^{\{s\}*2}. \quad (2.11)$$

Відношення $d_1^{\{s\}2} = d_1^{\{s\}*}$ виконується, якщо

$$c_{22}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}-1} + c_{21}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}-1} = 2c_{11}^{\{s\}} c_{12}^{\{s\}-1}. \quad (2.12)$$

Аналіз функції $A_1^{\{s\}}$ не є складним. Із другої формули (2.2) випливає, що $A_1^{\{s\}} > 0$ при $v < c_{12}^{\{s\}}$ і $v > c_{11}^{\{s\}}$, $A_1^{\{s\}} = 0$ при $v = c_{12}^{\{s\}}$ і $v = c_{11}^{\{s\}}$ і $A_1^{\{s\}} < 0$ при $c_{12}^{\{s\}} < v < c_{11}^{\{s\}}$.

З врахуванням умов (2.4), (2.6), (2.8), (2.12) значення функцій $A^{\{s\}}$, $A_1^{\{s\}}$ і $D^{\{s\}}$ можна визначити для всіх значень швидкості руху поверхневого навантаження і вказати умови існування кратних коренів рівняння (1.2). В табл. 2 приведені умови існування кратних коренів для стисливого матеріалу.

Таблиця 2

v	$d^{(s)}$	$\eta_1^{(s)2}$	$\eta_2^{(s)2}$
$v = v_1^{(s)}$	$d^{(s)} \geq d_2^{(s)*}$	+	
	$d_0^{(s)} > d^{(s)} < d_1^{(s)*}$	-	
$v = v_2^{(s)}$	$d^{(s)} > d_1^{(s)}$	+	
	$d_0^{(s)} < d^{(s)} < d_1^{(s)}$	-	
$v = c_{12}^{(s)}$	$d^{(s)} > d_1^{(s)}$	0	+
	$d^{(s)} = d_1^{(s)}$	0	
	$d^{(s)} < d_1^{(s)}$	-	0
$v = c_{11}^{(s)}$		0	+

Гармонічний потенціал. Розглянемо випадок стисливого матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу [4]. Компоненти тензора $\tilde{\omega}^{(s)}$ при цьому можна записати

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111}^{(s)} &= 2\mu^{(s)} \frac{\lambda_1^{(s)}}{\lambda_2^{(s)}} \frac{1-\nu^{(s)}}{1-2\nu^{(s)}}; & \tilde{\omega}_{2222}^{(s)} &= 2\mu^{(s)} \frac{\lambda_2^{(s)}}{\lambda_1^{(s)}} \frac{1-\nu^{(s)}}{1-2\nu^{(s)}}; \\ \tilde{\omega}_{1122}^{(s)} &= \tilde{\omega}_{2211}^{(s)} = \frac{2\mu^{(s)}\nu^{(s)}}{1-2\nu^{(s)}}; & \tilde{\omega}_{1212}^{(s)} &= \tilde{\omega}_{2121}^{(s)} = \frac{2\mu^{(s)}}{1-2\nu^{(s)}} \frac{1-\nu^{(s)}(\lambda_1^{(s)} + \lambda_2^{(s)})}{\lambda_1^{(s)} + \lambda_2^{(s)}}; \\ \tilde{\omega}_{1221}^{(s)} &= \frac{2\mu^{(s)}}{1-2\nu^{(s)}} \frac{\lambda_1^{(s)} [(\lambda_1^{(s)} + \lambda_2^{(s)})(1-\nu^{(s)}) - 1]}{\lambda_2^{(s)} (\lambda_1^{(s)} + \lambda_2^{(s)})}; & & (2.13) \\ \tilde{\omega}_{2112}^{(s)} &= \frac{2\mu^{(s)}}{1-2\nu^{(s)}} \frac{\lambda_2^{(s)} [(\lambda_1^{(s)} + \lambda_2^{(s)})(1-\nu^{(s)}) - 1]}{\lambda_1^{(s)} (\lambda_1^{(s)} + \lambda_2^{(s)})}, \end{aligned}$$

де $\lambda_i^{(s)}$ ($i=1,2$) – відносні видовження ($\lambda_i^{(s)} = \text{const}$) вздовж осей системи координат; $\mu^{(s)}$ – модуль зсуву; $\nu^{(s)}$ – коефіцієнт Пуассона.

Підставивши значення (2.13) у вирази (2.1) і (2.9), для випадку матеріалу з гармонічним потенціалом отримаємо, що

$$d^{(s)2} = d_0^{(s)2}; \quad 2A^{(s)} c_{22}^{(s)2} c_{21}^{(s)2} = -(c_{11}^{(s)2} - \nu^2) c_{21}^{(s)2} - (c_{12}^{(s)2} - \nu^2) c_{22}^{(s)2} < 0. \quad (2.14)$$

З урахуванням (2.2) і (2.14) із формул (1.5) маємо

$$\eta_1^{(s)2} = -(c_{11}^{(s)2} - \nu^2) c_{22}^{(s)-2}; \quad \eta_2^{(s)2} = -(c_{12}^{(s)2} - \nu^2) c_{21}^{(s)-2}. \quad (2.15)$$

Із (2.15) випливає, що при дозвуковій швидкості руху поверхневого навантаження ($\nu < c_{12}^{(s)}$) для потенціалу гармонічного типу характеристичні рівняння (1.2) мають чотири різних комплексних корені ($\eta_1^{(s)2} < 0$, $\eta_2^{(s)2} < 0$), при трансзвуковій швидкості ($c_{12}^{(s)} < \nu < c_{11}^{(s)}$) – два дійсних і два комплексних корені ($\eta_1^{(s)2} < 0$, $\eta_2^{(s)2} > 0$) і при надзвуковій швидкості навантаження – чотири різних дійсних корені ($\eta_1^{(s)2} > 0$, $\eta_2^{(s)2} > 0$). Рівняння (1.2) має рівний нулю двократний корінь при $\nu = c_{12}^{(s)}$ і $\nu = c_{11}^{(s)}$.

На рис. 1 і 2 для стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом показані залежності функції $D^{(s)}$ і функцій $\eta_1^{(s)2}$ і $\eta_2^{(s)2}$ від початкових деформацій та швидкості

руху навантаження. Розглянуто випадок, коли $S_0^{22(s)} = 0$ і, відповідно, $\lambda_2^{(s)} = (1 - \nu^{(s)} \lambda_1^{(s)}) / (1 - \nu^{(s)})$. Коефіцієнт Пуассона $\nu^{(s)} = 0,3$. На рис. 1 і 2 лінії з індексом j ($j = \overline{1,5}$) відповідають значенню $\lambda_1^{(s)} = 0,8 + 0,1(j-1)$. Швидкість руху поверхневого навантаження пронормована по величині $c_{12}^{(s)2}$.

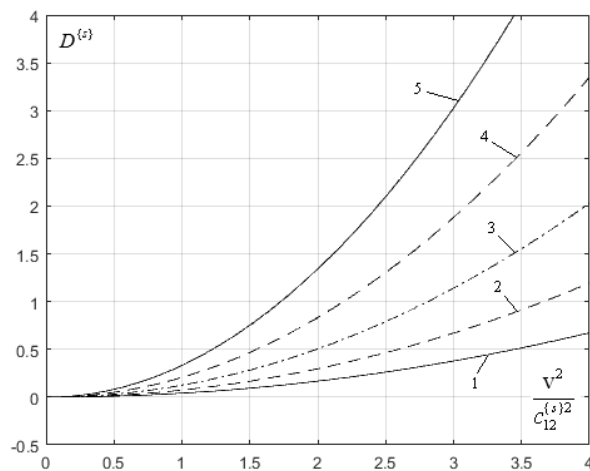


Рис. 1

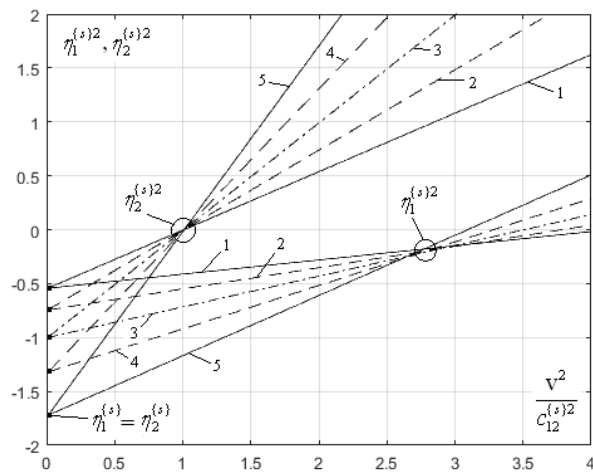


Рис. 2

Аналіз отриманих результатів свідчить про суттєвий вплив початкових (залишкових) деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь.

§3. Нестисливий матеріал.

Введемо позначення

$$\tilde{\rho} d^{(s)} = \tilde{q}_{11}^{(s)2} \tilde{\kappa}_{2222}^{(s)} + \tilde{q}_{22}^{(s)2} \tilde{\kappa}_{1111}^{(s)} - 2\tilde{q}_{11}^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)} (\tilde{\kappa}_{1122}^{(s)} + \tilde{\kappa}_{1212}^{(s)}); \quad \tilde{\rho} c_i^{(s)2} = \tilde{\kappa}_{iji}^{(s)}; \quad i \neq j. \quad (3.1)$$

Використовуючи (3.1), співвідношення (1.4) можна записати у вигляді

$$2A^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)2} c_2^{(s)2} = \tilde{q}_{22}^{(s)2} v^2 - d^{(s)}; \quad A_1^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)2} c_2^{(s)2} = \tilde{q}_{11}^{(s)2} (c_1^{(s)2} - v^2). \quad (3.2)$$

В формулах (3.1) і (3.2) через $c_i^{(s)}$ позначені швидкості поширення поперечних хвиль вздовж осей Oy_i в необмеженому нестисливому тілі з початковими напруженнями [8].

Рівняння $D^{(s)} = 0$ – біквадратні алгебраїчні рівняння відносно швидкості v . Корені цих рівнянь визначаються за формулою

$$v_i^{(s)2} = \tilde{q}_{22}^{(s)-2} \left[d^{(s)} - 2\tilde{q}_{11}^{(s)2} c_2^{(s)2} + (-1)^i 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)} \sqrt{\tilde{q}_{11}^{(s)2} c_2^{(s)2} + \tilde{q}_{22}^{(s)2} c_1^{(s)2} - d^{(s)}} \right]. \quad (3.3)$$

Із (3.3) випливає, що рівняння $D^{(s)} = 0$ мають дійсні корені у випадку, якщо виконується умова

$$d^{(s)} \leq \tilde{q}_{11}^{(s)2} c_2^{(s)2} + \tilde{q}_{22}^{(s)2} c_1^{(s)2}. \quad (3.4)$$

Для швидкостей $v_i^{(s)}$, що визначаються формулою (3.3), справедлива нерівність

$$v_i^{(s)} \leq c_1^{(s)}. \quad (3.5)$$

Умова $v_i^{(s)2} \geq 0$ виконується, якщо

$$d^{(s)} \leq -2\tilde{q}_{11}^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} c_2^{(s)}; \quad d^{(s)} \geq 2\tilde{q}_{11}^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} c_2^{(s)}. \quad (3.6)$$

Дослідимо функцію $A^{(s)}$. Із першої формули (3.2) випливає, що $A^{(s)} \geq 0$ при $v \geq v_{12}^{(s)}$ і $A^{(s)} < 0$ при $v < v_{12}^{(s)}$. Тут

$$v_{12}^2 = \tilde{q}_{22}^{(s)-2} d^{(s)}. \quad (3.7)$$

Неважко довести, що $v_{12}^{(s)} < 0$, якщо $d^{(s)} < 0$; $0 \leq v_{12}^{(s)} \leq c_1^{(s)}$, якщо $0 \leq d^{(s)} \leq \tilde{q}_{22}^{(s)2} c_1^{(s)2}$ і $c_1^{(s)} < v_{12}^{(s)}$, якщо $d^{(s)} > \tilde{q}_{22}^{(s)2} c_1^{(s)2}$.

Із другої формули (3.2) випливає, що $A_1^{(s)} > 0$ при $v < c_1^{(s)}$, $A_1^{(s)} = 0$ при $v = c_1^{(s)}$ і $A_1^{(s)} < 0$ при $v > c_1^{(s)}$.

Введемо позначення

$$d_0^{(s)} = \tilde{q}_{11}^{(s)2} c_2^{(s)2} + \tilde{q}_{22}^{(s)2} c_1^{(s)2}; \quad d_1^{(s)*} = -2\tilde{q}_{11}^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} c_2^{(s)}; \\ d_2^{(s)*} = 2\tilde{q}_{11}^{(s)} \tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} c_2^{(s)}; \quad d_1^{(s)} = \tilde{q}_{22}^{(s)2} c_1^{(s)2}. \quad (3.8)$$

Для величин $d_0^{(s)}, d_1^{(s)*}, d_2^{(s)*}, d_1^{(s)}, d_2^{(s)}$ виконуються такі умови:

якщо $\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} < \tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}$ і $\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)} < \tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} < 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}$, то $d_1^{(s)*} < d_1^{(s)} < d_2^{(s)*} < d_0^{(s)}$;

якщо $\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} = \tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}$, то $d_1^{(s)*} < d_1^{(s)} < d_2^{(s)*} = d_0^{(s)}$;

якщо $\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} = 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}$, то $d_1^{(s)*} < d_1^{(s)} = d_2^{(s)*} < d_0^{(s)}$;

якщо $\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} > 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}$, то $d_1^{(s)*} < d_2^{(s)*} < d_1^{(s)} < d_0^{(s)}$. \quad (3.9)

З урахуванням формул (3.3 – 3.9) значення функцій $A^{(s)}$, $A_1^{(s)}$, $D^{(s)}$, $\eta_1^{(s)2}$ і $\eta_2^{(s)2}$ можна визначити для всіх значень швидкості руху поверхневого навантаження і вказати умови існування кратних коренів рівняння (1.2). В табл. 3 вказані умови існування кратних коренів для нестисливого матеріалу.

Таблиця 3

v	$d^{(s)}$	$\eta_1^{(s)2}$	$\eta_2^{(s)2}$
$v = v_1^{(s)}$	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} \geq 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; d_2^{(s)*} \leq d^{(s)} \leq d_0^{(s)}$	–	
$v = v_2^{(s)}$	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} < 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; d_1^{(s)} < d^{(s)} \leq d_2^{(s)*}$	–	
	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} > 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; d^{(s)} = d_0^{(s)}; d_2^{(s)*} < d^{(s)} < d_1^{(s)}$		
	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} = 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; d_2^{(s)*} \leq d^{(s)} \leq d_0^{(s)}$		
	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} \geq 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; d^{(s)} = d_1^{(s)}$	0	
	$d_1^{(s)*} < d^{(s)} \leq 0$	+	
	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} \leq 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; 0 < d^{(s)} < d_1^{(s)}$		
$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} > 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; 0 < d^{(s)} \leq d_2^{(s)*}; d_1^{(s)} < d^{(s)} < d_0^{(s)}$			
$v = c_1^{(s)}$	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} < 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; d_1^{(s)} < d^{(s)} \leq d_0^{(s)*}$	–	0
	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} = 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; d_2^{(s)*} \leq d^{(s)} \leq d_0^{(s)}$		
	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} > 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; d_2^{(s)*} < d^{(s)} < d_1^{(s)}; d^{(s)} = d_0^{(s)}$		
	$d^{(s)} > d_0^{(s)}$		
	$d^{(s)} = d_1^{(s)}$	0	
	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} = 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; d^{(s)} = d_2^{(s)*}$		
	$d^{(s)} \leq 0$	0	+
	$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} \leq 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; 0 < d^{(s)} < d_1^{(s)}$		
$\tilde{q}_{22}^{(s)} c_1^{(s)} > 2\tilde{q}_{11}^{(s)} c_2^{(s)}; 0 < d^{(s)} \leq d_2^{(s)*}; d_1^{(s)} < d^{(s)} < d_0^{(s)}$			

Потенціал Бартенева – Хазановича. Розглянемо випадок нестисливого матеріалу з пружним потенціалом типу Бартенева – Хазановича [4]. Компоненти тензора $\tilde{\kappa}^{(s)}$ при цьому можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{1111}^{(s)} = \tilde{\kappa}_{2222}^{(s)} = -p^{(s)o}; \quad \tilde{\kappa}_{1122}^{(s)} = \tilde{\kappa}_{2211}^{(s)} = 0; \\ \tilde{\kappa}_{1212}^{(s)} = \tilde{\kappa}_{2121}^{(s)} = -\frac{2\mu^{(s)}\lambda_1^{(s)}}{\lambda_1^{(s)2} + 1} - p^{(s)o}; \quad \tilde{\kappa}_{1221}^{(s)} = \frac{2\mu^{(s)}\lambda_1^{(s)3}}{\lambda_1^{(s)2} + 1}; \quad \tilde{\kappa}_{2112}^{(s)} = \frac{2\mu^{(s)}}{\lambda_1^{(s)}(\lambda_1^{(s)2} + 1)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Підставивши значення (3.10) в вирази (1.4) і (3.8), для випадку нестисливого матеріалу з пружним потенціалом Бартенева – Хазановича маємо, що

$$d^{(s)} = d_2^{(s)*}. \quad (3.11)$$

Результати оцінки функцій $\eta_i^{(s)2}$ для матеріалу з пружним потенціалом Бартенева – Хазановича приведені в табл. 4.

Таблиця 4

v	$\lambda_1^{(s)}$	$\eta_1^{(s)2}$	$\eta_2^{(s)2}$
$0 < v < c_1^{(s)}$	$\lambda_1^{(s)} \leq 1; c_1^{(s)} \leq c_2^{(s)}$	–	–
$0 < v < v_2^{(s)}$	$\lambda_1^{(s)} > 1; c_1^{(s)} > c_2^{(s)}$	с	с
$v = v_2^{(s)}$	$1 < \lambda_1^{(s)} > \sqrt{2}; c_2^{(s)} < c_1^{(s)} < 2c_2^{(s)}$	–	–
	$\lambda_1^{(s)} = \sqrt{2}; c_1^{(s)} = 2c_2^{(s)}$	0	0
	$\lambda_1^{(s)} > \sqrt{2}; c_1^{(s)} > 2c_2^{(s)}$	+	+
$v_2^{(s)} < v < c_1^{(s)}$	$1 < \lambda_1^{(s)} > \sqrt{2}; c_2^{(s)} < c_1^{(s)} < 2c_2^{(s)}$	–	–
	$\lambda_1^{(s)} = \sqrt{2}; c_1^{(s)} = 2c_2^{(s)}$	с	с
	$\lambda_1^{(s)} > \sqrt{2}; c_1^{(s)} > 2c_2^{(s)}$	+	+
$v = c_1^{(s)}$	$\lambda_1^{(s)} < \sqrt{2}; c_1^{(s)} < 2c_2^{(s)}$	–	0
	$\lambda_1^{(s)} = \sqrt{2}; c_1^{(s)} = 2c_2^{(s)}$	0	0
	$\lambda_1^{(s)} > \sqrt{2}; c_1^{(s)} > 2c_2^{(s)}$	0	+
$v > c_1^{(s)}$		–	+

Із табл. 4 маємо, що при дозвуковій швидкості руху поверхневого навантаження ($v < c_1^{(s)}$) для потенціалу типу Бартенева – Хазановича характеристичне рівняння (1.2) може мати кратні корені при $v = v_2^{(s)}$ і $\lambda_1^{(s)} > 1$. Також завжди будуть існувати кратні корені при $v = c_1^{(s)}$.

На рис. 3 і 4 для нестисливого матеріалу с потенціалом типу Бартенева – Хазановича показані залежності функції $D^{(s)}$ і функцій $\eta_1^{(s)2}$ і $\eta_2^{(s)2}$ від початкових деформацій і швидкості руху навантаження. Так само, як і з нестисливим матеріалом, розглядається випадок, коли $S_0^{22(s)} = 0$. При цьому $p^{(s)o} = -2\mu^{(s)} \lambda_1^{(s)-1}$.

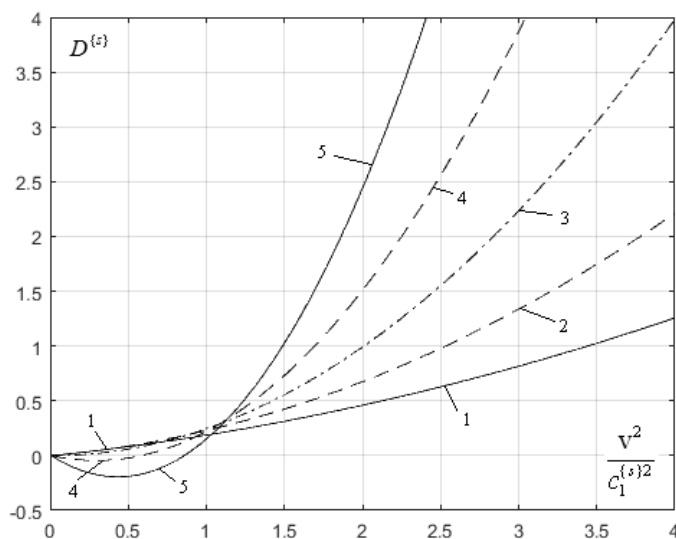


Рис. 3

На рис. 3 і 4 лінії з індексом $j (j = \overline{1,5})$ відповідають значенню $\lambda_1^{(s)} = 0,8 + 0,1(j-1)$. Швидкість руху поверхневого навантаження пронормована по величині $c_1^{(s)2}$.

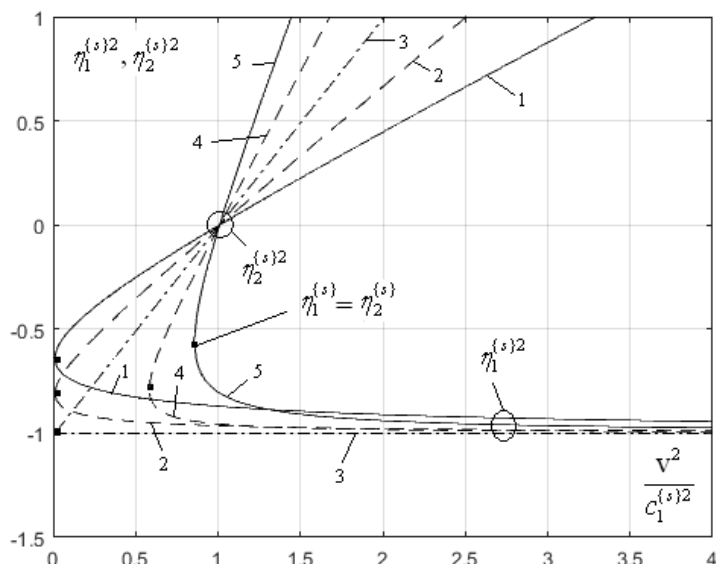


Рис. 4

Аналіз отриманих результатів свідчить про суттєвий вплив початкових (залишко-вих) деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь.

Висновки.

Таким чином, в даній статті досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху елементів шаруватого півпростору. Проведена оцінка можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Вказані необхідні і достатні умови існування кратних коренів. Для матеріалів з гармонічним потенціалом і з потенціалом типу Бартенева – Хазановича виконані чисельні дослідження. Отримані результати можуть бути використані для дослідження напружено-деформованого стану елементів багатошарового заздалегідь деформованого півпростору при дії рухомого поверхневого навантаження.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконані за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху стисливих та нестисливих елементів шаруватого півпростору. Проведено оцінку можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Отримано необхідні і достатні умови існування кратних коренів характеристичного рівняння. Для матеріалів з пружним потенціалом гармонічного типу та з пружним потенціалом типу Бартенева – Хазановича проведено чисельні дослідження.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: багатошаровий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження, характеристичні рівняння.

1. Глухов Ю.П. Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 52 – 57.
2. Глухов Ю.П. Многослойная предварительно напряженная плита на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. Плоская задача // Доп. НАН України. – 2011. – № 11. – С. 65 – 69.
3. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для многослойной плиты на жестком основании // Доп. НАН України. – 2011. – № 8. – С. 48 – 53.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: «А.С.К», 2004. – 672 с.
5. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг: Издательство «Кременчуг», 2007. – 795 с.
6. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
7. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. – Киев: Наук. думка, 1977. – 151 с.
8. Осипов И.О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // Прикл. математика и механика. – 1969. – 33, № 3. – С. 543 – 555.
9. Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. Bending a Plate on Prestressed Elastic Foundation under Live Static Load // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 287 – 299.
10. Guz A.N., Bagno A.M. Effect of Prestresses on the Dispersion of Lamb Waves in a System Consisting of a Viscous Liquid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 3. – P. 249 – 258.
11. Guz A.N., Bagno A.M. Effect of Prestresses on Lamb Waves in a System Consisting of an Ideal Liquid Half-Space and an Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 5. – P. 495 – 505.
12. Guz A.N., Bagno A.M. Effect of Prestresses on Quasi-Lamb Waves in a System Consisting of a Compressible Viscous Liquid Half-Space and an Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 6. – P. 617 – 627.
13. Guz A.N., Bagno A.M. Propagation of Quasi-Lamb Waves in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 5. – P. 459 – 469.
14. Guz A.N., Bagno A.M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 6. – P. 585 – 595.

Надійшла 30.05.2019

Затверджена до друку 15.12.2020