

В.С. Кирилюк, О.І. Левчук

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОГО ЕЛЕКТРОПРУЖНОГО
СЕРЕДОВИЩА З ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНОЮ
ЕЛІПТИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ ОДНООСНОМУ РОЗТЯЗІ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, e-mail: kirilyuk_v@ukr.net*

Abstract. A problem on electro and stress state in a piezoelectric space with an arbitrary orientated elliptical crack under force and electric homogeneous loading is considered. The solution of this problem is obtained on the base of using the triple Fourier transform and Fourier image of the Green function for an infinite electroelastic space. Testing of the used approach for particular cases confirms its effectiveness. The numerical study is carried out and stress intensity factors along the elliptical crack front are studied for different crack orientation in the orthotropic electroelastic space under tension.

Key words: orthotropic piezoelectric material, flat elliptical crack, arbitrary orientation, stress intensity factors.

Вступ.

Використання п'єзоелектричних матеріалів при створенні перетворювачів енергії та елементів вимірювальних пристроїв різного призначення викликає значний інтерес до вивчення і аналізу концентрації силових і електричних полів в електропружних тілах з дефектами типу порожнин, включень, тріщин. Розв'язок задач електропружності в тривимірній постановці, яка враховує зв'язаність силових і електричних полів, пов'язаний зі значними математичними труднощами, оскільки в цьому випадку вихідна система рівнянь електропружності представляє зв'язану систему диференціальних рівнянь складної структури [1, 4]. На даний час з великою повнотою вивчено двовимірні задачі електропружності, серед яких можна відзначити роботи [8, 9, 20, 23], в яких вивчено напружений стан як поблизу одиночних порожнин, включень, тріщин, так і при взаємодії концентраторів електричних і механічних полів в п'єзоелектричному матеріалі. Для побудови загальних розв'язків тривимірних зв'язаних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропних тіл в роботах [17, 21] запропоновано структурно подібні підходи, за допомогою яких знайдено точні розв'язки ряду задач електропружності при спеціальній орієнтації концентратора силових і електричних полів відносно осі симетрії п'єзоелектричного матеріалу. Так, при використанні вказаних підходів зазвичай припускалось, що вісь симетрії електропружного матеріалу орієнтована вздовж осі обертання концентратора напружень або вона перпендикулярна площині, в якій розміщена плоска тріщина [5 – 7, 12 – 14, 17 – 19, 21, 23]. В той же час, при інших орієнтаціях концентраторів силових і електричних полів відносно осі симетрії п'єзоелектричного матеріалу ці підходи виявляються неефективними при розв'язанні просторових задач. Відзначимо також, що для пружних ізотропних тіл з круговими і еліптичними тріщинами результати досліджень щодо коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) з достатньою повнотою відображено в монографіях [3, 10]. Для електропружних тіл (при згаданих обмеженнях на орієнтацію тріщин) подібні дослідження проведено в роботах [5, 6, 11, 12, 18], для магнітопружних – в [15, 16]. Розподіл напружень у ортотропному електропружному просторі з тривісним еліпсоїдальним включенням при розтязі вивчено в [14].

В даній роботі на основі узагальнення підходу [22] (для анізотропного чисто пружного середовища з еліптичною тріщиною) на випадок ортотропного п'єзоелектричного матеріалу розглянуто задачу про довільно орієнтовану еліптичну тріщину в ортотропному електропружному середовищі при одноосному розтязі. При проведенні досліджень використано потрібне перетворення Фур'є за просторовими змінними, Фур'є-образ функції Гріна для електропружного анізотропного середовища, а також теореми Коші про лишки і квадратурні формули Гауса. Для частинних випадків досліджуваної задачі (при розташуванні еліптичної тріщини в площині ізотропії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу) результати досліджень співпадають з даними, отриманими іншими підходами. Знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) вздовж границі еліптичної тріщини при різних її орієнтаціях в ортотропному електропружному матеріалі.

1. Основні рівняння і постановка задачі.

Нехай ортотропний електропружний матеріал містить плоску еліптичну тріщину. Припускаємо, що електропружний матеріал перебуває під дією одноосного розтягу, направленого перпендикулярно до площини еліптичної тріщини, а електрична індукція в цьому ж напрямку дорівнює нулеві. Наявність тріщини в матеріалі, як концентратора силових і електричних полів, призводить до виникнення збурення електричного і напруженого станів.

Повна система рівнянь статки електропружності має наступний вигляд:

рівняння рівноваги за відсутності об'ємних сил

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

рівняння вимушеної електростатики

$$D_{i,i} = 0; \quad E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

рівняння стану

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{nij}\Psi_{,n}; \quad D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} - k_{in}\Psi_{,n}, \quad (3)$$

де σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , D_i , E_i , Ψ – компоненти напружень, деформацій, переміщень, електричних переміщень (індукції), електричного поля і електричний потенціал відповідно.

Також введено наступні позначення тензорів: C_{ijmn} , e_{imn} , k_{ij} – пружні модулі, п'єзомодулі, діелектричні проникності. Для п'єзоелектричних ортотропних тіл пружні властивості матеріалу описуються дев'ятьма незалежними сталими $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$; п'єзомодулі – п'ятьма величинами $e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{32}, e_{33}$; діелектричні проникності – трьома незалежними сталими k_{11}, k_{22}, k_{33} . Компоненти тензора пружних модулів, п'єзомодулів і діелектричних проникностей зв'язані зі згаданими незалежними сталими наступним чином:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; \quad C_{2222} = c_{22}; \quad C_{3333} = c_{33}; \quad C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; \quad C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; \quad C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; \quad C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}; \\ e_{113} &= e_{131} = e_{15}; \quad e_{223} = e_{232} = e_{24}; \quad e_{311} = e_{31}; \quad e_{322} = e_{32}; \quad e_{333} = e_{33}; \\ k_{11}; \quad k_{22}; \quad k_{33}. \end{aligned} \quad (4)$$

Інші компоненти цих трьох тензорів дорівнюють нулеві.

Із співвідношень (1) – (3) і приведених компонентів тензорів (4) випливають рівняння статички електропружності відносно переміщень і електричного потенціалу для ортотропного електропружного тіла.

При вивченні задачі, що розглядається, зручно ввести нову систему координат, в якій одна з осей співпадає з нормаллю до площини тріщини. Припустимо, що вихідна система координат $Oxyz$ пов'язана з новою (локальною) системою $Ox^1y^1z^1$ таким чином, що її можна отримати з вихідної системи поворотом навколо осі Ox на кут α . Тоді тензори пружних модулів, п'єзомодулів і діелектричних сталих C_{ijkl}^α , e_{ijk}^α , k_{ij}^α у новій системі координат отримаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних порядків $C_{ijkl}^\alpha = C_{mnpk} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq}$, $e_{ijk}^\alpha = e_{mnp} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp}$, $k_{ij}^\alpha = k_{mn} \alpha_{im} \alpha_{jn}$, де α_{ij} – матриця перетворення виду

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Довільну орієнтацію плоскої еліптичної тріщини можемо отримати, проводячи послідовно обертання на кути α , β , γ навколо осей старої системи координат Ox, Oy, Oz відповідно. Матрицю перетворення T_{ij} знаходимо наступним чином:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Наведена матриця є результатом послідовного перемноження трьох матриць, що відображають праві обертання навколо кожної з осей координат, отриманих аналогічно виразу (5).

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді нові тензори пружних модулів, п'єзомодулів і діелектричних сталих $C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, $e_{ijk}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, $k_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ отримаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних порядків

$$C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = C_{mnpk} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}; \quad e_{ijk}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = e_{mnp} T_{im} T_{jn} T_{kp}; \quad k_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = k_{mn} T_{im} T_{jn},$$

де по індексах, що повторюються, проводиться сумування.

Зауважимо, що в подальшому тексті використовуватимемо звичайний тензорний запис виразів, тобто матимемо на увазі, що по індексах, що повторюються, у виразах проводиться підсумовування. Відмітимо також, що принципово нічого не змінюючи в схемі розв'язку задачі, замість перетворення T_{ij} , пов'язаного з обертанням навколо осей координат Ox, Oy, Oz , можна було б ввести інше перетворення, наприклад, що відповідає поворотам з кутами Ейлера. Але для наочності в даній роботі вибрано перетворення, що відповідає послідовним обертанням навколо трьох різних осей координат. Для опису напруженого і електричного станів використаємо більш уніфіковані позначення [7]. Представимо в наступному вигляді:

пружні переміщення і електричний потенціал

$$U_M = \begin{cases} u_m, M = 1, 2, 3; \\ \Psi, M = 4; \end{cases} \quad (6)$$

пружні деформації або електричне поле

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, M = 1, 2, 3; \\ \Psi_{,n}, M = 4; \end{cases} \quad (7)$$

напруження або електричні переміщення

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, J = 1, 2, 3; \\ D_i, J = 4; \end{cases} \quad (8)$$

електропружні модулі

$$E_{iJMn}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \begin{cases} C_{ijmn}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, J, M = 1, 2, 3; \\ e_{nij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, J = 1, 2, 3; M = 4; \\ e_{imn}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, J = 4; M = 1, 2, 3; \\ -k_{in}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, J, M = 4. \end{cases} \quad (9)$$

За допомогою позначень (6) – (9) рівняння стану (3) можемо записати як

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn}^{(\alpha, \beta, \gamma)} Z_{Mn}. \quad (10)$$

Відмітимо, що задача, яка розглядається для ортотропного електропружного матеріалу з довільно орієнтованою еліптичною тріщиною не розпадається на дві незалежні задачі – симетричну і антисиметричну. Вона розглядається у загальній постановці, коли в граничні умови одночасно входять і нормальні і дотичні зусилля, а також нормальна складова вектора електричної індукції на поверхні тріщини

$$\tau_{13}^{\pm} = f^{(\alpha, \beta, \gamma)}; \quad \tau_{23}^{\pm} = g^{(\alpha, \beta, \gamma)}; \quad \sigma_{33}^{\pm} = -p^{(\alpha, \beta, \gamma)}; \quad (11)$$

$$D_3^{\pm} = -D^{(\alpha, \beta, \gamma)}; \quad (x_1, x_2) \in S; \quad U_M(\vec{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\vec{x}| \rightarrow \infty,$$

де S – поверхня тріщини, віднесена до нової системи координат (яка отримана послідовним обертанням на кути α, β, γ навколо осей старої системи), а навантаження мають бути записані в новій системі координат. При заданому основному напруженому станові і електричній індукції в матеріалі, а також вільній від силових і електричних впливів поверхні тріщини, представляючи напружений і електричний стан, що задовольняє рівнянням (10), суперпозицією основного і збуреного станів, за допомогою (11) отримуємо граничні умови для визначення збуреного стану.

2. Метод розв'язку.

При розгляді задачі скористаємося функцією Гріна $G_{JM}(\vec{x} - \vec{x}')$ для нескінченного електропружного анізотропного простору, яка задовольняє рівнянням

$$E_{kJMn}^{(\alpha, \beta, \gamma)} G_{JM, kn} + \delta_{JM} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 0, \quad (12)$$

де $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ – дельта-функція Дірака; δ_{JM} – символ Кронекера, а кома після індексу означає диференціювання по відповідній змінній. Функцію Гріна, що задовольняє (12), використовуючи потрійне перетворення Фур'є, можемо представити у вигляді

$$G_{JM}(\bar{x} - \bar{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{JM}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) e^{i\bar{\xi} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (13)$$

У виразі (13) $A_{JM}(\bar{\xi})$ позначено відповідні алгебраїчні доповнення елементів матриці

$$\{K_{JM}(\bar{\xi})\} = \{E_{iJMn}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_i \xi_n\}, \quad (14)$$

а $D(\bar{\xi})$ – визначник матриці (14), який є многочленом восьмого порядку.

Представимо збурений електричний і напружений стан, узагальнюючи чисто пружний випадок [22], за допомогою невідомих стрибків переміщень і електричного потенціалу через поверхню тріщини у вигляді

$$U_I(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{N=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{iJM3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_i^N A_{iJ}(\bar{\xi}^N)}{\partial D(\bar{\xi}^N) / \partial \xi_3} \iint_S b_M(\bar{x}') e^{-i\bar{\xi}^N \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2,$$

де для еліптичної тріщини невідомий вектор $\bar{b}(\bar{x})$ у випадку однорідних силових і електричних навантажень в матеріалі набуває виду

$$\bar{b}(\bar{x}) = \bar{b}(1 - x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2)^{1/2}; \quad (15)$$

a_1, a_2 – значення півосей еліптичної тріщини; \bar{b} у виразі (15) – сталий вектор четвертого порядку, компоненти якого в загальному випадку є комплексними величинами. Сумування в записаних виразах проводиться для ξ_3^M – коренів рівняння $D(\bar{\xi}) = 0$ з від'ємною уявною частиною для $x_3 > 0$, а $\bar{\xi}^M$ є вектором виду $\bar{\xi}^M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2))$. Компоненти напружень і електричної індукції визначаються наступним виразом

$$\begin{aligned} \Sigma_{iJ}(\bar{x}) &= E_{iJKL}^{(\alpha, \beta, \gamma)} U_{K,L} = \\ &= \left(\frac{-i}{4\pi^2} \right) \sum_{N=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \frac{E_{iJKL}^{(\alpha, \beta, \gamma)} E_{pQM3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_p^N \xi_l^N A_{KQ}(\bar{\xi}^N)}{\partial D(\bar{\xi}^N) / \partial \xi_3} b_M(\bar{x}') e^{-i\bar{\xi}^M \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Проводячи перетворення виразів (16) аналогічно пружному випадку [22], компоненти напружень і електричної індукції в площині тріщини для однорідних силових і електричних полів отримуємо у вигляді

$$\Sigma_{iJ}(\bar{x}) = \left(\frac{-i}{4} \right) \int_0^{2\pi} \sum_{N=1}^4 F_{iJM}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\eta_1/a_1, \eta_2/a_2, \xi_3^N(\eta_1/a_1, \eta_2/a_2)) b_M^{(0,0)} d\varphi, \quad (17)$$

де функція $F_{iJM}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ визначається виразом

$$F_{iJM}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = E_{iJKL}^{(\alpha, \beta, \gamma)} E_{pQM3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_p^N \xi_l^N \frac{A_{KQ}(\bar{\xi}^N)}{\partial D(\bar{\xi}^N) / \partial \xi_3}.$$

Після додаткового аналізу асимптотичних виразів для напружень і електричної індукції в площині тріщини коефіцієнти інтенсивності напружень і електричної індукції K_I, K_{II}, K_{III} і K_D отримуємо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} k_{iJ} &= i\sqrt{\pi a} (x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{-1/4} \sum_{N=1}^4 F_{JM}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x_1/a_1^2, x_2/a_2^2, \xi_3^N(x_1/a_1^2, x_2/a_2^2)) b_M^{(0,0)}; \\ K_I &= k_{33}; \quad K_{II} = k_{31}n_1 + k_{32}n_2; \quad K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32}n_1; \quad K_{IV} = K_D = k_{34}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для плоскої еліптичної тріщини компоненти вектора нормалі до її контуру мають вигляд

$$n_1 = (x_1 / a_1^2) / (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{1/2}; \quad n_2 = (x_2 / a_2^2) / (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{1/2}.$$

Задовольняючи граничним умовам на поверхні тріщини, а також скориставшись при обчисленнях одновимірних інтегралів (17) методом квадратур Гауса, визначаємо невідомі значення стрибків переміщень і електричної індукції через поверхню еліптичної тріщини, а далі, згідно (18), знаходимо коефіцієнти інтенсивності напружень і електричної індукції.

Проведемо апробацію підходу, що використовується, на частинному випадку досліджуваної проблеми, для якої відомо точний розв'язок. Для цього розглянемо задачу про плоску еліптичну тріщину в трансверсально-ізотропному електропружному просторі, розташовану в площині ізотропії п'єзоелектричного матеріалу, при одноосному розтязі σ_{33}^0 і зсувних зусиллях σ_{23}^0 . Нормальна компонента електричної індукції D_z^0 покладається рівною нулеві. В цьому випадку коефіцієнти інтенсивності напружень K_I для діелектрично непроникної тріщини згідно результатів [11] не залежать від властивостей матеріалу і співпадають з їх виразом для чисто пружного ізотропного матеріалу при тій самій формі тріщини і значенні тиску σ_{33}^0 . При цьому коефіцієнт інтенсивності електричної індукції K_D набуває нульового значення вздовж контуру тріщини. У той же час, коефіцієнти інтенсивності напружень K_{II} , K_{III} при зсуві залежать як від пружних, так і електричних властивостей матеріалу згідно результатів [12]. Згідно даних [12] можемо взяти вирази K_{II} , K_{III} для ізотропного пружного матеріалу при таких самих зсувних навантаженнях і тій самій формі плоскої тріщини, а замість коефіцієнта Пуассона ν у відповідні вирази потрібно підставити значення ν_{PIEZO} , яке обчислюється спеціальним чином на основі електропружних властивостей п'єзоелектричного матеріалу. Оскільки процедура обчислення величини ν_{PIEZO} детально описана в [12], наведемо у табл. 1 лише знайдені значення цієї величини для ряду п'єзокерамічних матеріалів [12]. Вихідні дані по властивостям п'єзоелектричних матеріалів, що використовувались при розрахунках, містяться в [1, 5, 7, 12]. У другому рядку табл. 1 наведено значення ν_{ELAST} , які знайдено лише тільки за пружними властивостями трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу (без врахування його електричних властивостей) [10]. Значення $\nu_{CONTROL}$ в третьому рядку табл. 1 знайдено з виразу ν_{PIEZO} , якщо покласти близькими до нуля електричні проникності і п'єзомодулі електропружного матеріалу. При розрахунках вихідних значень п'єзомодулів e_{31} , e_{15} , e_{33} і діелектричних проникностей k_{11} , k_{33} відповідних матеріалів їх значення перемножались на 10^{-12} . Видно, що значення ν_{ELAST} і $\nu_{CONTROL}$, які обчислено за допомогою двох різних виразів, співпадають.

Таблиця 1

Значення	PZT-4	PXE-5	ЦТС-19	PZT-7A	BaTiO3	PZT-5H
ν_{PIEZO}	0,48513	0,48815	0,45958	0,47324	0,34369	0,37867
ν_{ELAST}	0,35034	0,34591	0,36359	0,35239	0,29768	0,30074
$\nu_{CONTROL}$	0,35034	0,34591	0,36359	0,35239	0,29768	0,30074

На основі результатів [11, 12] для електропружного трансверсально-ізотропного простору, що містить внутрішню плоску еліптичну тріщину, розташовану в площині ізотропії матеріалу, при одноосному розтязі вздовж осі симетрії σ_{33}^0 і зсуві σ_{23}^0 , а також при $D_z^0 = 0$ (відсутність нормальної до поверхні тріщини складової вектора електричної індукції) отримуємо наступні вирази КІН вздовж контуру тріщини:

$$K_I = \frac{\sigma_{33}^0}{E(k)} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^{1/2} (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4}; \quad (19)$$

$$K_{II} = (\pi a b)^{1/2} \frac{k^2 \sigma_{23}^0 \sin \beta}{[(k^2 + \nu_{PIEZO} k_1^2)E(k) - \nu_{PIEZO} k_1^2 K(k)](a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4}}; \quad (20)$$

$$K_{III} = \left(\frac{\pi b^3}{a} \right)^{1/2} \frac{(1 - \nu_{PIEZO}) k^2 \sigma_{23}^0 \cos \beta}{[(k^2 + \nu_{PIEZO} k_1^2)E(k) - \nu_{PIEZO} k_1^2 K(k)](a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4}}; \quad (21)$$

$$K_D = 0,$$

де $k = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$, $k_1 = b/a$; $K(k)$ і $E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду.

Результати порівняння на основі двох підходів (по формулам (18) і згідно виразів (19) – (21)) для матеріалу PZT-4 відображено в табл. 2 – 4. В табл. 2, 3 і 4 наведено результати обчислень КІН K_I , K_{II} і K_{III} відповідно. Значення КІН, які знайдено за допомогою формул (17) – (18), наведено без дужок, а на основі виразів (19) – (21) – у круглих дужках. Обчислення одновимірних інтегралів в (17) при знаходженні стрибків вектора переміщень і електричного потенціалу через поверхню еліптичної тріщини проводились за квадратурними формулами Гауса по 24 вузлах.

Таблиця 2

a_2/a_1	φ					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,7	0,922061 (0,922061)	0,944164 (0,944164)	0,995662 (0,995662)	1,049943 (1,049943)	1,088403 (1,088403)	1,102073 (1,102073)
0,5	0,731778 (0,731780)	0,779345 (0,779347)	0,874177 (0,874179)	0,960134 (960136)	1,015842 (1,015844)	1,034891 (1,034893)
0,3	0,484906 (0,484949)	0,574152 (0,574204)	0,705990 (0,706054)	0,805592 (0,805664)	0,865420 (0,865497)	0,885313 (0,885392)
0,1	0,174191 (0,174455)	0,313217 (0,313690)	0,424300 (0,424943)	0,496109 (0,496860)	0,537334 (0,538148)	0,550841 (0,551676)

Таблиця 3

a_2/a_1	φ					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,7	0 (0)	0,484247 (0,484247)	0,873452 (0,873452)	1,140050 (1,140050)	1,292851 (1,292852)	1,342522 (1,342523)
0,5	0 (0)	0,486011 (0,486020)	0,824163 (0,824176)	1,032808 (1,032825)	1,147555 (1,147574)	1,184402 (1,184421)
0,3	0 (0)	0,452036 (0,452178)	0,699259 (0,699478)	0,843453 (0,843717)	0,922991 (0,923281)	0,948683 (0,948981)
0,1	0 (0)	0,303017 (0,303738)	0,425474 (0,426487)	0,500851 (0,502043)	0,543613 (0,544907)	0,557573 (0,558898)

Відзначимо, що приблизно така ж точність узгодження результатів обчислень двома підходами мала місце на всьому інтервалі $[0, 2\pi]$ зміни кута φ . Для контролю значень цей інтервал розбивався на 100 однакових підінтервалів, в кінцях яких проводилось порівняння значень. При проведенні обчислень КІН для інших п'єзокерамічних матеріалів з табл. 1 (порівняння проводилось при значеннях кутів φ , наведених в табл. 2 – 4) результати обчислень двома підходами узгоджувались приблизно з тією ж точністю, що і для матеріалу PZT-4.

Таблиця 4

a_2/a_1	φ					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,7	0,578320 (0,578320)	0,537139 (0,537139)	0,433285 (0,433285)	0,298525 (0,298525)	0,151398 (0,151398)	0 (0)
0,5	0,431202 (0,431210)	0,385068 (0,385074)	0,292024 (0,292029)	0,193174 (0,193177)	0,095988 (0,095990)	0 (0)
0,3	0,267534 (0,267618)	0,214890 (0,214957)	0,148660 (0,148707)	0,094655 (0,094684)	0,046323 (0,046337)	0 (0)
0,1	0,090782 (0,090998)	0,048016 (0,048130)	0,030152 (0,030223)	0,018736 (0,018780)	0,009094 (0,009116)	0 (0)

Відмітимо також, що при апробації алгоритму обчислень для ортотропного електропружного матеріалу з довільно орієнтованою плоскою еліптичною тріщиною на основі формул (17) – (18) було проведено тестування на частинному випадку – для еліптичної тріщини в чисто пружному ортотропному матеріалі.

3. Аналіз результатів числових досліджень.

Розглянемо ортотропний п'єзоелектричний матеріал $Ba_2NaNb_5O_{15}$, електропружні властивості якого (всього 17 незалежних електропружних параметрів) наведено в [4].

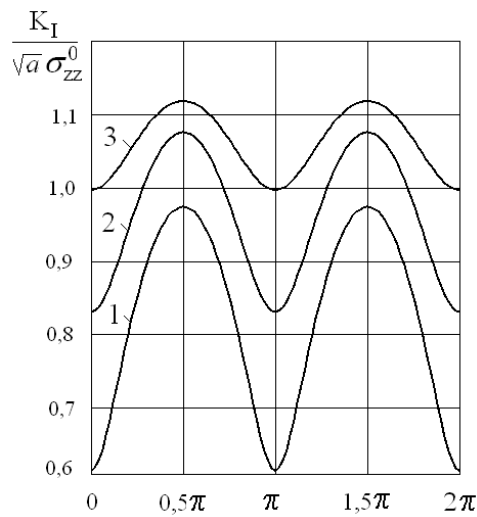


Рис. 1

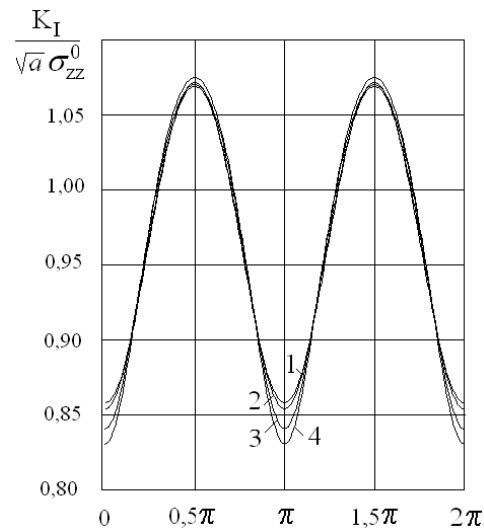


Рис. 2

Припускаємо, що еліптична тріщина розміщена в площині xu п'єзоелектричного матеріалу. На рис. 1 показано розподіл КІН K_I вздовж фронту еліптичної тріщини при одноосному розтязі σ_{zz}^0 в цьому ортотропному електропружному матеріалі. Криві 1, 2, 3 відповідають відношенням півосей $b/a = 0,4; 0,6; 0,8$. При цьому найбільші значення КІН досягаються в точках малої півося еліптичної тріщини.

На рис. 2 показано зміну КІН K_I вздовж границі тріщини в матеріалі $Ba_2NaNb_5O_{15}$ (при одноосному розтязі σ_{zz}^0 , $b/a = 0,6$) в залежності від орієнтації тріщини в матеріалі. Лінії 1, 2, 3, 4 відповідають кутам повороту $\alpha = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$.

На рис. 3 наведено зміну КІН K_I для еліптичної тріщини, розміщеної в трансверсально-ізотропному електропружному матеріалі PZT-4 [1] при таких самих розрахункових параметрах (геометрії тріщини, навантаженні і кутах повороту в матеріалі), що

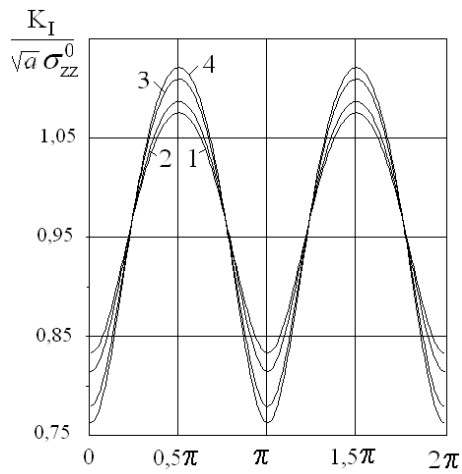


Рис. 3

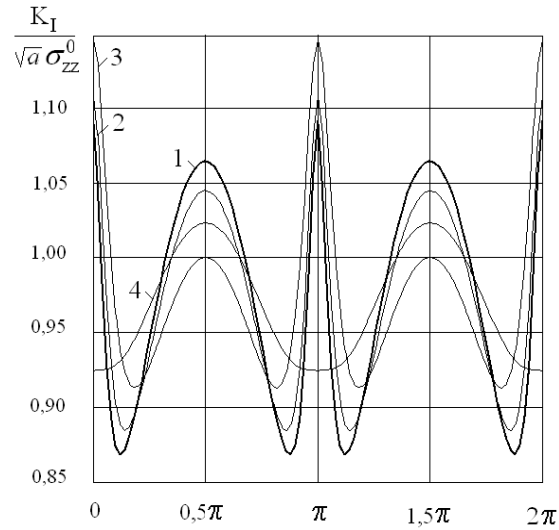


Рис. 4

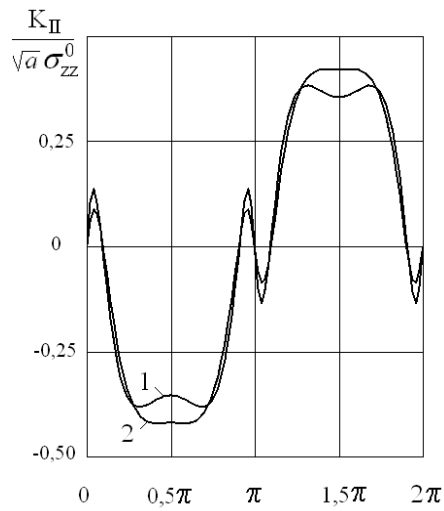


Рис. 5

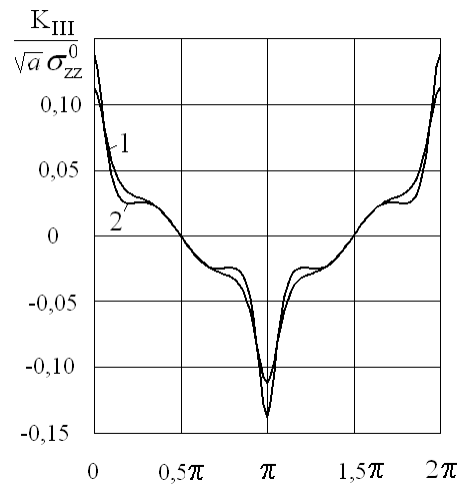


Рис. 6

і в попередньому випадку. Видно, що для PZT-4 значення КІН K_I більше залежать від орієнтації тріщини в матеріалі, ніж для $Ba_2NaNb_5O_{15}$.

На рис. 4 – 6 наведено зміну КІН K_I , K_{II} , K_{III} вздовж границі еліптичної тріщини в пружному ортотропному матеріалі склопластику (ортогонально-армований 2:1) згідно [2] (стор. 64). Для цього матеріалу розподіл КІН суттєво залежить від орієнтації тріщини. На рис. 4 показано, що максимальні значення КІН K_I з розглянутих випадків мають місце при $\alpha = \pi/3$. На рис. 5, 6 наведено зміну зна-

чень КІН K_{II} і K_{III} вздовж фронту еліптичної тріщини, навантаженої внутрішнім тиском. Відмітимо, що ненульові значення КІН K_{II} і K_{III} при симетричних навантаженнях виникають для плоскої еліптичної тріщини в ортотропному матеріалі при її розташуванні не в площині симетрії матеріалу. Криві 1, 2 на цих рисунках відповідають значенням $\alpha = \pi/6$ і $\alpha = \pi/3$, а при $\alpha = 0$ і $\alpha = \pi/2$ значення K_{II} і K_{III} дорівнюють нулеві вздовж всього контуру тріщини (в цих випадках тріщина розташована в одній з площин симетрії ортотропного матеріалу).

Висновок.

Таким чином, в даній роботі розвинуто підхід до дослідження напруженого стану в ортотропному електропружному просторі з довільно орієнтованою плоскою еліптичною тріщиною при однорідних силових і електричних навантаженнях. Досліджено розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж контуру плоскої еліптичної тріщини при різних її орієнтаціях в ортотропному п'єзоелектричному матеріалі при одноосному розтязі.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про електричний та напружений стани у ортотропному п'єзоелектричному просторі з довільно орієнтованою еліптичною тріщиною при однорідних силових та електричних навантаженнях. Розв'язок задачі отримано за допомогою використання потрібного перетворення Фур'є та Фур'є-образу функції Гріна для нескінченного електропружного простору. Тестування підходу на частинних випадках підтверджує його ефективність. Проведено числові дослідження, вивчено розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж фронту еліптичної тріщини для різної орієнтації тріщини у ортотропному електропружному матеріалі при розтязі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ортотропний п'єзоелектричний матеріал, плоска еліптична тріщина, довільна орієнтація, коефіцієнти інтенсивності напружень.

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-и томах. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
3. Панасюк В.В. (ред.) Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие: в 4-х томах. Т. 2. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.
4. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин – Київ: Наук. Думка, 2008. – 270 с.
5. Chen W.Q., Lim C.W. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium //; Int. J. Fract. – 2005. – **131**, N 3. – P. 231 – 246.
6. Chiang C. R., Weng G.J. The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material // Int. J. Fract. – 2005. – **134**, N 3 – 4. – P. 319 – 337.
7. Dunn M.L., Taya M. Electroelastic field concentrations in and around inhomogeneities in piezoelectric solids // J. Appl. Mech. – 1994. – **61**, N 4. – P. 474 – 475.
8. Hodes A.Y., Loboda V.V. A contact zone approach for an arc crack at the interface between two electrostrictive materials // Int. J. Solids Struct. – 2017. – **128**, N 1. – P. 262 – 271.
9. Kaloerov S.A. Determination of Intensity Factors for Stresses, Induction and Field Strength in Multi-Connected Electro-Elastic Anisotropic Media // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 6. – P. 631 – 637.
10. Kassir M.K., Sih G. Three-dimensional Crack Problems. – Leyden: Nordhoff Interen. Publ., 1975. – 425 p. – (Mechanics of fracture; V. 2).
11. Kirilyuk V.S. On the Stress State of a Piezoceramic Body with a Flat Crack under Symmetric Loads // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 11. – P. 1263 – 1271.

12. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoelectric Ceramic Body with a Plane Crack under Antisymmetric Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 2. – P. 152 – 161.
13. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoceramic Body with a Plane Crack opened by a Rigid Inclusion // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 7. – P. 757 – 768.
14. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Body with a Triaxial Ellipsoidal Inclusion Subject to Tension // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 3. – P. 305 – 310.
15. *Mol'chenko L.V., Loos I.I.* Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Isotropic Shells of Revolution Subject to Joule Heating // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 1. – P. 68 – 78.
16. *Mol'chenko L.V., Loos I.I.* Thermomagnetoelastic Deformation of a Flexible Orthotropic Conical Shell with Electrical Conductivity and Joule Heat Taken into Account // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 5. – P. 534 – 543.
17. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the General Solution of Statics Equations of the Electroelasticity of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body in Terms of Harmonic Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 7. – P. 623 – 628.
18. *Podil'chuk Yu.N.* Electroelastic Equilibrium of Transversally Isotropic, Piezoceramic Media Containing Cavities, Inclusions, and Cracks // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 10. – P. 1023 – 1034.
19. *Shang F., Kuna M., Kitamura T.* Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2003. – **40**, N 3. – P. 237 - 246.
20. *Sosa H., Khutoryansky N.* New developments concerning piezoelectric materials with defects // *Int. J. Solids and Struct.* – 1996. – **33**, N 23. – P. 3399 – 3414.
21. *Wang Z.K., Zheng B.L.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, N 1. – P. 105 – 115.
22. *Willis J. R.* The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium // *Int. J. Eng. Sci.* – 1968. – **6**, N 5. – P. 253 – 263.
23. *Zhang T.Y., Gao C.F.* Fracture behaviors of piezoelectric materials // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2004. – **41**, N 1 - 3. – P. 339 - 379.

Надійшла 21.06.2019

Затверджена до друку 15.12.2020