

М. П. Семенюк, Н. Б. Жукова

**ВПЛИВ МЕХАНІЧНИХ І ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ КОМПОЗИТНИХ
ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ЛОКАЛІЗОВАНИМ ПРОГИНОМ
НА ХАРАКТЕР РІВНОВАЖНИХ КРИВИХ ПРИ ОСЬОВОМУ СТИСКУ**

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: zhukova_n@ukr.net*

Abstract. A procedure is developed for the analytical solution of the problem of stability and post-buckling behavior of composite cylindrical shells with local deflection at axial compression. To build the calculation algorithm, a Timoshenko-Mindlin variant of the non-linear theory of shells and the Biskov-Hutchinson asymptotic method are used. The dependence of ultimate loads and curves of equilibrium states on the mechanical and geometric characteristics of the shells and the structure of the layers package is studied.

Key words: cylindrical shell, composite materials, local imperfections, stability, post-buckling behavior, axial compression, asymptotic method.

Вступ.

Циліндричні оболонки з композитів широко використовуються в різноманітних конструкціях сучасної техніки. У багатьох випадках умови їх експлуатації такі, що в оболонках виникають стискаючі напруження, які можуть досягати критичних значень. Вимоги до надійності, ваги і вартості ракет-носіїв, корпусів літаків, підводних човнів та інших конструкцій, для яких навантаження, що відповідає втраті стійкості є важливою характеристикою, можуть задовольнятися шляхом проведення ретельних експериментальних і теоретичних досліджень, що спрямовані на виявлення факторів, які впливають на їх стійкість. Роботи [1, 12, 13, 15 – 17, 19] із стійкості оболонок показали, що початкові геометричні недосконалості – домінуючий чинник серед причин, що впливають на невідповідність між теорією і експериментом. Рекомендації, що наразі використовуються, у дизайні чутливих до недосконалостей оболонок беруть за основу інструкції NASA SP-8007 [20], в яких наведено криву нижньої межі значень критичних навантажень для циліндричних оболонок різної геометрії. За допомогою даних, що містяться в ньому, теоретичне критичне навантаження коригується шляхом застосування емпіричного коефіцієнта зниження («нокдаун чинника»), що враховує відмінності між теорією і експериментом.

Проте в інструкції NASA SP-8007 [20] не врахована чутливість оболонок з композиційних матеріалів до особливостей їх структури. Тому деякі автори пропонують нову криву нижньої межі, спираючись на статистичний аналіз експериментальних даних, отриманих на конкретних композитних матеріалах. Проблема цього підходу полягає в тому, що діапазон його застосування обмежений об'ємом необхідної бази даних.

Зближення теорії з експериментом досягається також шляхом вдосконалення методів розрахунку на стійкість оболонок з композитних матеріалів. Останні підрозділяються на декілька груп. До першої з них відносяться прості аналітичні методи, по-

будовані на прийнятті ряду гіпотез, що істотно полегшують процес обчислень наближених значень критичних навантажень, до другої – уточнені (як аналітичні, так і чисельні) [2, 3, 5, 6, 10]. Деформації недосконалої циліндричної оболонки залишаються предметом досліджень з особливим акцентом на моделюванні реальних недосконалостей.

Серед чисельних методів найбільш репрезентативною є модель скінченних елементів, що дозволяє вивчати широку область можливостей з точки зору дизайну [5]. Його використання в роботах [8, 11, 18, 21] показало хороше співпадіння з експериментальними результатами. Метод скінченних різниць, судячи з результатів роботи [3], також показав непогану відповідність між розрахунком і експериментом. Нові детерміновані методології, такі як «підхід з одним збуджуючим навантаженням» (SPLA), що запропонований європейським проектом DESICOS і нові статистичні підходи [24] можуть бути використані для попереднього проектування і визначення коефіцієнта зниження розрахункового критичного навантаження. Статистичний аналіз експериментальних результатів дозволяє розраховувати новий «нокдаун чинник», менш консервативний, ніж підхід NASA SP-8007. Одна з основних проблем цього підходу полягає в тому, що зазвичай недоліки, які вимірюються, не є доступними на попередніх етапах проектування. Найбільш поширений метод моделювання розподілених геометричних дефектів оснований на використанні даних про дефекти, які взяті з реальних зразків. Автори в роботі [9] провели експериментальні і теоретичні дослідження впливу геометричних дефектів на навантаження випучування тонких циліндричних оболонок при осьовому стиску. В їх роботах недосконалості знайдених розмірів апроксимуються модальними рядами Фур'є. Вони можуть бути використані для аналізу або проектування. Подібний підхід використовувався в інших дослідженнях. Наприклад, для тонких металевих [9] і тонких композитних оболонок [6].

На основі загальної теорії Койтера [19] подано асимптотичний аналіз випучування з осесиметричними заглибленнями ізотропних циліндричних оболонок [7]. Поведінка і несуча здатність циліндричних оболонок з розподіленими і локальними недосконалостями при осьовому стиску експериментально і за допомогою методу скінченних елементів проаналізовані в роботі [21].

У даній статті розглядається стійкість і початкова закритична поведінка при осьовому стиску недосконалих циліндричних оболонок з композитів з використанням аналітичного розв'язку. Процедура асимптотичного методу Біскова – Хатчінсона [14], розробленого для дослідження впливу взаємодії загальних і локальних форм випучування підкріплених ізотропних циліндричних оболонок, узагальнена на випадок оболонок з композитів з локальними початковими прогинами. На відміну від задач, які характеризуються відомою кількістю взаємодіючих мод, у випадку локальних недосконалостей ця кількість визначається збіжністю отриманих результатів. Досліджується залежність граничних навантажень і рівноважних кривих від механічних і геометричних характеристик оболонок і структури шаруватого композиту. Аналітичний розв'язок отримано в тригонометричних рядах. Він менш загальний, ніж розв'язок, отриманий за допомогою методу скінченних елементів [5, 11, 21]. Його перевагою є можливість проведення параметричних досліджень без значних витрат часу на розрахунки, а також отримання результатів, які розширюють розуміння явища, що досліджується. В першу чергу це стосується початкової закритичної поведінки оболонок з локальними недосконалостями в околі критичної точки. В цьому випадку асимптотичний метод є більш точним [19] у порівнянні з методом скінченних елементів, який використовує для розв'язку нелінійної задачі штучний параметр демпфування.

1. Постановка задачі. Основні співвідношення і рівняння.

Розглянемо шарувату циліндричну оболонку з радіусом серединної поверхні R , загальною товщиною t і довжиною L . Вона зібрана з шарів однонаправленого препрега, що складається з вуглецевого волокна і епоксидної матриці. Оболонка навантажена осьовими стискаючими зусиллями $T_{11,0}$, які пропорційні деякому параметру λ .

На поверхні приведення задано ортогональну систему координат, осі якої x , y спрямовані вздовж твірної і напрямної оболонки, а вісь z має напрямок внутрішньої нормалі до даної поверхні.

Надамо необхідні для проведення розрахунків співвідношення, використовуючи нелінійну теорію оболонок Тимошенка – Міндліна [2, 18].

Співвідношення пружності матеріалу можна записати в такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ S \\ M_{11} \\ M_{22} \\ H \\ T_{23} \\ T_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^k; \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^k z_k; \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^N (D_{ij}^k + C_{ij}^k z_k^2) \quad (i, j = 1, 2, 6);$$

C_{ij}^k, D_{ij}^k – жорсткості k -го моношару: $C_{ij}^k = b'_{ij} t_k$, $D_{ij}^k = t_k^3 b'_{ij} / 12$; z_k – значення координати z , що визначає положення серединної поверхні k -го шару,

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{12} = \nu_2 b_{11} = \nu_1 b_{22}; \quad b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{44} = G_{23}, b_{55} = G_{13}.$$

Для компонентів векторів ε і κ використовуються наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \theta_1^2); \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \theta_2^2); \quad \varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \theta_1 \theta_2; \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}; \quad \omega_1 = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R}; \\ k_{11} &= \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad k_{22} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad k_{12} = \tau_1 + \tau_2; \quad \tau_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \tau_2 = \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\omega_1}{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

Вираз принципу можливих переміщень буде мати вигляд

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[T_{11} \delta \varepsilon_1 + T_{22} \delta \varepsilon_2 + T_{12}^* \delta \omega_1 + T_{21}^* \delta \omega_2 + T_{13}^* \delta \theta_1 + T_{23} \delta \theta_2 + T_{13} \delta \theta + T_{23}^* \delta \psi + M_{11} \delta k_1 + \right. \\ \left. + M_{22} \delta k_2 + H (\delta \tau_1 + \delta \tau_2) \right] dx dy - \delta A = 0. \quad (3)$$

Проекції зусиль на осі серединної поверхні до деформації $T_{12}^*, T_{21}^*, T_{13}^*, T_{23}^*$ мають вигляд

$$T_{12}^* = S + T_{11} \omega_1; \quad T_{21}^* = S + \frac{1}{R} H + T_{22} \omega_2; \quad T_{13}^* = T_{13} + T_{11} \theta_1 + S \theta_2; \quad T_{23}^* = T_{23} + S \theta_1 + T_{22} \theta_2.$$

Нелінійні диференціальні рівняння рівноваги, які будемо використовувати при розв'язку задач стійкості і початкової закритичної поведінки циліндричних оболонок, отримані з варіаційного рівняння (3). Вони мають вигляд

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + T_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + T_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - q\theta_1 = 0; \\
& \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} - \frac{1}{R} T_{23} + T_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2S \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + T_{22} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R^2} \right) - q\theta_2 = 0; \\
& \frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} + \frac{1}{R} T_{22} + T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\
& + T_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{R^2} \right) + q(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0; \\
& \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = 0; \quad \frac{\partial M_{22}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{22} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Варіація роботи зовнішніх навантажень δA має різний вигляд в залежності від характеру їх розподілу по поверхні оболонки. У випадку, що розглядається, будемо мати рівняння

$$\delta A = \int_0^L \int_0^{2\pi R} T_{11}^0 \delta u \, dx dy.$$

Співвідношення, що становлять основу методу Біскова – Хатчінсона [14], зручно отримати в загальному вигляді, ввівши узагальнені переміщення, напруження і деформації оболонки як вектори

$$\begin{aligned}
U &= (u, v, w, \theta, \psi); \quad \sigma = (T_{11}, T_{22}, S, T_{23}, T_{13}, M_{11}, M_{22}, H); \\
\varepsilon &= (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, k_{11}, k_{22}, \tau_1, \tau_2).
\end{aligned}$$

При цьому будемо використовувати компактність формулювань Будянського [12].

Позначимо через ξ_i амплітуди мод випучування. Вектори переміщень, напружень і деформацій подамо у вигляді асимптотичних розкладів

$$\begin{aligned}
U &= \lambda U_0 + \xi_i U_i + \xi_i \xi_j U_{ij}; \quad \sigma = \lambda \sigma_0 + \xi_i \sigma_i + \xi_i \xi_j \sigma_{ij} + \dots; \\
\varepsilon &= \lambda \varepsilon_0 + \xi_i \varepsilon_i + \xi_i \xi_j \varepsilon_{ij} + \dots.
\end{aligned} \tag{5}$$

Параметр навантаження буде мати вигляд

$$\lambda = \lambda_c + \xi_i \lambda_i + \xi_i^2 \lambda_2 + \dots$$

Підставивши їх в рівняння (3), отримаємо варіаційне рівняння стійкості для циліндричної оболонки в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ T_{11}^i \delta \varepsilon_1 + S^i \delta \omega_1 + T_{22}^i \delta \varepsilon_2 + \left(S^i + \frac{2}{R} H^i \right) \delta \omega_2 + T_{13}^i (\delta \theta_1 + \delta \theta) + \right. \\
& \left. + H^i \delta k_{12} + T_{23}^i (\delta \theta_2 + \delta \psi) + M_{11}^i \delta k_{11} + M_{22}^i \delta k_{22} + \lambda_i T_{11}^0 (\omega_1^i \delta \omega_1 + \theta_1^i \delta \theta_1) \right\} dx dy = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Варіаційне рівняння щодо змінних другого порядку в теорії оболонок Тимошенка – Міндліна представляємо у вигляді

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ T_{11}^{ij} \delta \varepsilon_1 + S^{ij} \delta \omega_1 + T_{22}^{ij} \delta \varepsilon_2 + \left(S^{ij} + \frac{2}{R} H^{ij} \right) \delta \omega_2 + T_{13}^{ij} (\delta \theta_1 + \delta \theta) + \right. \\
& \left. + T_{23}^{ij} (\delta \theta_2 + \delta \psi) + M_{11}^{ij} \delta k_{11} + M_{22}^{ij} \delta k_{22} + H^{ij} \delta k_{12} + \lambda_i T_{11}^0 (\omega_1^{ij} \delta \omega_1 + \theta_1^{ij} \delta \theta_1) \right\} dx dy =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[(T_{11}^i \omega_1^{ji} + T_{11}^j \omega_1^i) \delta \omega_1 + (T_{22}^i \omega_2^j + T_{22}^j \omega_2^i) \delta \omega_2 + \right. \quad (7)$$

$$\left. + (T_{11}^i \theta_1^j + S^i \theta_2^j + T_{11}^j \theta_1^i + S^j \theta_2^i) \delta \theta_1 + (T_{22}^i \theta_2^j + S^i \theta_2^i + T_{22}^j \theta_{21}^i + S^j \theta_2^i) \delta \theta_2 \right] dx dy ,$$

де індексами i, j позначено номер члена в асимптотичному розкладі (5).

Якщо розв'язані однорідна (6) і неоднорідна (7) крайові задачі, то відносно амплітуд ξ_i отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь [14, 22, 23]

$$\xi_r \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r} \right) + \xi_i \xi_j a_{ijr} + \xi_i \xi_j \xi_k b_{ijk} = \bar{\xi}_r \frac{\lambda}{\lambda_r} \quad (r = 1, \dots, M), \quad (8)$$

де

$$a_{ijr} = -A_{ijr} / 2D; \quad b_{ijk} = -B_{ijk} / D;$$

$$A_{ijr} = \sigma_r \varepsilon'' U_i U_j + 2\sigma_i \varepsilon'' U_j U_r; \quad D = \lambda_r (\sigma_0 \varepsilon'' U_r^2 - \Delta'' U_r^2); \quad (9)$$

$$B_{ijk} = \frac{1}{2} (\sigma_i \varepsilon'' U_r U_{jk} + \sigma_j \varepsilon'' U_k U_r + \sigma_r \varepsilon'' U_i U_{jk} + \sigma_{ir} \varepsilon'' U_j U_k + 2\sigma_i \varepsilon'' U_j U_{kr}).$$

Рівняння (8) можуть бути використані для дослідження нелінійного деформування недосконалих конструкцій на всій траєкторії деформування, включаючи критичні (граничні) навантаження, а також закритичної поведінки конструкцій, що розглядаються.

Крім того, система (8) може бути застосована в разі співпадаючих, майже співпадаючих мод або мод, що істотно розрізняються. Ця властивість методу Біскова – Хатчінсона використовується нижче для розробки методики розрахунку стійкості і закритичної поведінки шаруватих композитних циліндричних оболонок з мультимодальними недосконаліостями, зокрема, з локальними недосконаліостями, які можуть бути описані тригонометричними рядами Фур'є.

Якщо отримано розв'язки крайових задач (6) і (7), за формулами (9) визначаються коефіцієнти a_{ijr} і b_{ijk} системи рівнянь (8).

Присутні в виразах (9) значення величин D , A_{ijr} і B_{ijk} знаходимо за допомогою формул

$$D = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[T_{11,r} \varepsilon_{1,r} + S_r \omega_{1,r} + T_{22,r} \varepsilon_{2,r} + T_{21,r} \omega_{2,r} + T_{13,r} \varepsilon_{13,r} + T_{23,r} \omega_{23,r} + \right. \\ \left. + M_{11,r} k_{11,r} + M_{22,r} k_{22,r} + Hk_{12,r} \right] dx dy;$$

$$A_{ijr} = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[2T_{11,i} (\omega_{1,j} \omega_{1,r} + \theta_{1,j} \theta_{1,r}) + 2T_{22,i} (\omega_{2,j} \omega_{2,r} + \theta_{2,j} \theta_{2,r}) + \right. \\ \left. + 2S_i (\theta_{1,j} \theta_{2,r} + \theta_{2,j} \theta_{1,r}) + T_{11,r} (\omega_{1,i} \omega_{1,j} + \theta_{1,i} \theta_{1,j}) + \right. \\ \left. + T_{22,r} (\omega_{2,i} \omega_{2,j} + \theta_{2,i} \theta_{2,j}) + S_r (\theta_{1,i} \theta_{2,j} + \theta_{2,i} \theta_{1,j}) \right] dx dy;$$

$$B_{ijk} = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[2T_{11,i} (\omega_{1,j} \omega_{1,kr} + \theta_{1,j} \theta_{1,kr}) + 2T_{22,i} (\omega_{2,j} \omega_{2,kr} + \theta_{2,j} \theta_{2,kr}) + 2S_i (\theta_{1,j} \theta_{2,kr} + \theta_{2,j} \theta_{1,kr}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +T_{11,i}(\omega_{1,jk}\omega_{1,r} + \theta_{1,jk}\theta_{1,r}) + T_{22,i}(\omega_{2,jk}\omega_{2,r} + \theta_{2,jk}\theta_{2,r}) + S_i(\theta_{1,jk}\theta_{2,r} + \theta_{2,jk}\theta_{1,r}) + \quad (10) \\
& +T_{11,r}(\omega_{1,i}\omega_{1,jk} + \theta_{1,i}\theta_{1,jk}) + T_{22,r}(\omega_{2,i}\omega_{2,jk} + \theta_{2,i}\theta_{2,jk}) + S_r(\theta_{1,i}\theta_{2,jk} + \theta_{2,ij}\theta_{1,k}) + \\
& +T_{11,ij}(\omega_{1,k}\omega_{1,r} + \theta_{1,k}\theta_{1,r}) + T_{22,ij}(\omega_{2,k}\omega_{2,r} + \theta_{2,k}\theta_{2,r}) + S_{ij}(\theta_{2,k}\theta_{1,r} + \theta_{1,k}\theta_{2,r}) + \\
& +T_{11,ri}(\omega_{1,j}\omega_{1,k} + \theta_{1,j}\theta_{1,k}) + T_{22,ri}(\omega_{2,j}\omega_{2,k} + \theta_{2,j}\theta_{2,k}) + S_{ri}(\theta_{2,j}\theta_{1,k} + \theta_{2,k}\theta_{1,j}) \Big] dx dy .
\end{aligned}$$

2. Розв'язання задачі стійкості і початкової закритичної поведінки.

Для побудови системи рівнянь, яку зручно використовувати для отримання аналітичного розв'язку, запишемо всі змінні, розв'язувальні функції і жорсткості в безрозмірному вигляді. Вважаємо

$$x = R\xi; \quad y = R\varphi; \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{R}{t^2}(u, v); \quad \tilde{w} = \frac{1}{t}w; \quad (\tilde{\theta}, \tilde{\psi}) = \frac{R}{t}(\theta, \psi);$$

$$(\bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{22}, \bar{\varepsilon}_{12}) = \frac{R}{t^2}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}); \quad (\bar{\varepsilon}_{13}, \bar{\varepsilon}_{23}) = \frac{R^2}{t^2}(\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}); \quad (\bar{k}_{11}, \bar{k}_{22}, \bar{k}_{12}) = \frac{R^2}{t}(k_{11}, k_{22}, k_{12});$$

$$t_{ij} = \frac{T_{ij}R^2}{C_0 t^2}; \quad m_{ij} = \frac{M_{ij}R^2}{C_0 t^3}; \quad m_i = \frac{T_{11}^0 R^2}{C_0 t^2}; \quad h = \frac{t}{R}.$$

При цьому безрозмірні жорсткісні параметри знаходяться за формулами

$$\alpha_{11} = \frac{A_{11}}{C_0}; \quad \alpha_{12} = \frac{A_{12}}{C_0}; \quad \alpha_{13} = \frac{E_{11}}{C_0 t}; \quad \alpha_{14} = \frac{E_{12}}{C_0 t};$$

$$\alpha_{22} = \frac{A_{12}}{C_0}; \quad \alpha_{23} = \frac{E_{23}}{C_0 t}; \quad \alpha_{24} = \frac{E_{22}}{C_0 t}; \quad \alpha_{66} = \frac{A_{33}}{C_0};$$

$$\alpha_{22} = \frac{E_{12}}{C_0 t}; \quad \alpha_{23} = \frac{D_{11}}{C_0 t^2}; \quad \alpha_{24} = \frac{D_{12}}{C_0 t^2}; \quad \alpha_{66} = \frac{D_{22}}{C_0 t^2}; \quad \alpha_{55} = \frac{A_{55}R}{C_0 t}; \quad \alpha_{77} = \frac{A_{44}R}{C_0 t}.$$

Варіаційне рівняння (6) відносно безрозмірних величин набуває вигляду

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^{L/R} \left[t_{11} \delta \bar{\varepsilon}_{11} + t_{22} \delta \bar{\varepsilon}_{22} + s \delta \bar{\varepsilon}_{12} + \frac{1}{h} t_{13} \delta \bar{\varepsilon}_{13} + \frac{1}{h} t_{23} \delta \bar{\varepsilon}_{23} + m_{11} \delta \bar{k}_{11} + \right. \\
& \left. + \mu \delta \bar{k}_{22} + m_{22} \delta \bar{k}_{12} - \lambda {}_c m_t \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial \alpha_1} h^2 + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \alpha_1} \right) \right] d\xi d\varphi = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Тут враховується тільки докритичне осьове зусилля.

Розв'язок задачі будемо шукати при граничних умовах

$$t_{11} = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad m_{11} = 0; \quad \psi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad L/R. \quad (12)$$

З огляду на ці умови, переміщення можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
u_i &= A_{m,n}^i \cos l_m \xi \cos n_i \varphi; \quad v_i = B_{m,n}^i \sin l_m \xi \sin n_i \varphi; \quad w_i = C_{m,n}^i \sin l_m \xi \cos n_i \varphi; \\
\theta_i &= D_{m,n}^i \cos l_m \xi \cos n_i \varphi; \quad \psi_i = E_{m,n}^i \sin l_m \xi \sin n_i \varphi, \quad (13)
\end{aligned}$$

де $l_m = m\pi R/L$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Для визначення коефіцієнтів в цих виразах отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, яка для різних поєднань хвильових чисел m і n має вигляд

$$\begin{aligned}
& X_{11}^{m,n} A_{m,n}^{(1)} - X_{12}^{m,n} B_{m,n}^{(1)} + X_{13}^{m,n} C_{m,n}^{(1)} + X_{14}^{m,n} D_{m,n}^{(1)} - X_{15}^{m,n} \varepsilon_{m,n}^{(1)} = 0; \\
& -X_{12}^{m,n} A_{m,n}^{(1)} + X_{22}^{m,n} B_{m,n}^{(1)} - X_{23}^{m,n} C_{m,n}^{(1)} + X_{24}^{m,n} D_{m,n}^{(1)} + X_{25}^{m,n} \varepsilon_{m,n}^{(1)} - \lambda_c h^3 l_m^2 B_{m,n}^{(1)} = 0; \\
& X_{13}^{m,n} A_{m,n}^{(1)} - X_{23}^{m,n} B_{m,n}^{(1)} + X_{33}^{m,n} C_{m,n}^{(1)} + X_{34}^{m,n} D_{m,n}^{(1)} - X_{35}^{m,n} \varepsilon_{m,n}^{(1)} - \lambda_c h^3 l_m^2 C_{m,n}^{(1)} = 0; \\
& X_{14}^{m,n} A_{m,n}^{(1)} - X_{24}^{m,n} B_{m,n}^{(1)} + X_{34}^{m,n} C_{m,n}^{(1)} + X_{44}^{m,n} D_{m,n}^{(1)} - X_{45}^{m,n} \varepsilon_{m,n}^{(1)} = 0; \\
& X_{15}^{m,n} A_{m,n}^{(1)} + X_{25}^{m,n} B_{m,n}^{(1)} - X_{35}^{m,n} C_{m,n}^{(1)} - X_{45}^{m,n} D_{m,n}^{(1)} + X_{55}^{m,n} \varepsilon_{m,n}^{(1)} = 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

де

$$\begin{aligned}
X_{11}^{m,n} &= h \left[\alpha_{11} l_m^2 + (\alpha_{66} + 2h\alpha_{68} + h^2\alpha_{88}) n^2 \right]; & X_{12}^{m,n} &= h(\alpha_{12} + \alpha_{66} + h\alpha_{68} + h\alpha_{14}) l_m n; \\
X_{13}^{m,n} &= (\alpha_{66} + h\alpha_{14}) l_m; & X_{14}^{m,n} &= h \left[\alpha_{13} l_m^2 + (\alpha_{68} + h\alpha_{88}) n^2 \right]; \\
X_{15}^{m,n} &= h(\alpha_{14} + \alpha_{68} + h\alpha_{88}) l_m n; & X_{22}^{m,n} &= h \left[\alpha_{66} l_m^2 + (\alpha_{13} + 2h\alpha_{24} + h^3\alpha_{44}) n^2 + h\alpha_{77} \right]; \\
X_{23}^{m,n} &= (\alpha_{22} + 2h\alpha_{24} + h^2\alpha_{44}) n + h\alpha_{77}; & X_{33}^{m,n} &= \frac{1}{h} (\alpha_{22} + h\alpha_{24} + h^2\alpha_{44}) + \alpha_{55} l_m^2 + \alpha_{77} n^2; \\
X_{34}^{m,n} &= (\alpha_{55} + \alpha_{23} + h\alpha_{34}) l_m; & X_{44}^{m,n} &= \left(\alpha_{33} l_m^2 + \alpha_{88} n^2 + \frac{1}{n} \alpha_{55} \right); \\
X_{55}^{m,n} &= h \left(\alpha_{88} l_m^2 + \alpha_{44} n^2 + \frac{1}{n} \alpha_{77} \right); & X_{24}^{m,n} &= h(\alpha_{67} + \alpha_{23} + h\alpha_{34}) l_m n; \\
X_{25}^{m,n} &= n \left[\alpha_{68} l_m^2 + (\alpha_{24} + h\alpha_{44}) n^2 + \alpha_{77} \right].
\end{aligned}$$

Мінімальне власне число однорідної системи (14), отримане шляхом перебору параметрів хвилеутворення m і n , визначає критичні навантаження, а відповідні числа m_1 і n_1 – форму втрати стійкості, яка в даному випадку буде описуватися одним членом в розкладах (13).

Через те, що розв'язок однорідної системи знаходиться з точністю до константи, необхідно провести нормування, поклавши $(w_1)_{\max} = 1$. Для цього приймемо $C_{mn}^{(1)} = 1$, пронормувавши відповідним чином $A_{mn}^{(1)}$, $B_{mn}^{(1)}$, $D_{mn}^{(1)}$, $\varepsilon_{mn}^{(1)}$.

Локальний прогин циліндричної поверхні будемо задавати у вигляді функції двох змінних x, y , які співпадають в деякій локальній області поверхні приведення з осями координат глобальної системи $(0 \leq x \leq L, -\pi R \leq y \leq \pi R)$, де L – довжина твірної циліндра; $2\pi R$ – довжина напрямної. Локальна область обмежена контуром $L_1 \leq x \leq L_1 + l_1, -y_1 \leq y \leq y_1$. Початковий прогин у вказаній області представимо у вигляді

$$\bar{w} = \bar{\xi} \sin \frac{\pi(x-L_1)}{l_1} \cos \frac{\pi y}{2y_1}. \tag{15}$$

Оскільки амплітуда кожної функції у виразі (15) дорівнює одиниці, то амплітуда початкового прогину \bar{w} дорівнює $\bar{\xi}$. Розв'язок збуреної задачі будемо шукати у вигляді тригонометричних рядів Фур'є, враховуючи, що тригонометричні функції є власними для однорідної задачі (6). Визначимо

$$\sin \frac{\pi(x-L_1)}{l_1} = \sum_m B_m \sin \frac{m\pi x}{L_1}; \quad B_m = \frac{2}{L} \left(\alpha \cos \frac{\pi L_1}{l_1} - \beta \sin \frac{\pi L_1}{l_1} \right); \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} [\sin \gamma_1 (L_1 + l) - \sin \gamma_1 L_1] - \frac{1}{\gamma_2} [\sin \gamma_2 (L_1 + l) - \sin \gamma_2 L_1] \right\};$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} [\cos \gamma_1 (L_1 + l) - \cos \gamma_1 L_1] - \frac{1}{\gamma_2} [\cos \gamma_2 (L_1 + l) - \cos \gamma_2 L_1] \right\};$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{l_1} - \frac{m\pi}{L}; \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{l_1} + \frac{m\pi}{L}.$$

Так як

$$y = R\varphi; \quad y_1 = R\varphi_1, \quad \text{то} \quad \cos \frac{\pi y}{2y_1} = \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} = A_0 + \sum_n A_n \cos n\varphi,$$

де

$$A_0 = \frac{2\varphi_1}{\pi^2}; \quad A_n = \cos n\varphi_1 / \varphi_1 \left[\left(\frac{\pi}{2\varphi_1} \right)^2 - n^2 \right].$$

Використовуючи зазначені розклади, початковий прогин представимо у вигляді подвійного ряду Фур'є

$$\bar{w} = \bar{\xi} \sum_{m=1} \sum_{n=0,1} B_m A_n \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi. \quad (17)$$

Розв'язок неоднорідної задачі (7) представимо у вигляді

$$u_{ij} = \sum_k \left[A_{k,1}^{ij} \cos(n_i - n_j)\varphi + A_{k,2}^{ij} \cos(n_i + n_j)\varphi \right] \cos l_k \zeta;$$

$$v_{ij} = \sum_k \left[B_{k,1}^{ij} \sin(n_i - n_j)\varphi + B_{k,2}^{ij} \sin(n_i + n_j)\varphi \right] \sin l_k \zeta;$$

$$w_{ij} = \sum_k \left[C_{k,1}^{ij} \cos(n_i - n_j)\varphi + C_{k,2}^{ij} \cos(n_i + n_j)\varphi \right] \sin l_k \zeta; \quad (18)$$

$$\theta_{ij} = \sum_k \left[D_{k,1}^{ij} \cos(n_i - n_j)\varphi + D_{k,2}^{ij} \cos(n_i + n_j)\varphi \right] \cos l_k \zeta;$$

$$\psi_{ij} = \sum_k \left[E_{k,1}^{ij} \sin(n_i - n_j)\varphi + E_{k,2}^{ij} \sin(n_i + n_j)\varphi \right] \sin l_k \zeta.$$

Для розв'язку системи (8) при початковому значенні параметра навантаження λ використовується метод Ньютона – Канторовича. Розглянемо покрокову процедуру збільшення навантаження. Отриманий розв'язок на i -му кроці використаємо в якості початкового значення на наступному ($i+1$) кроці. Для побудови розв'язку в тих точках, де якобіан системи (8) дорівнює нулю, використовується метод неперервного

продовження [4]. Вводимо вектор \bar{X} розмірності $(M+1)$ з компонентами $(\xi_1, \dots, \xi_M, \xi_{M+1})^T$. Система (8) в цьому випадку може бути записана в компактному вигляді

$$F_r(\bar{X}) = 0 \quad (r = 1, \dots, M). \quad (19)$$

Диференціюючи (19) по параметру s , що відповідає просуванню уздовж кривої рівноважних станів, отримуємо систему лінійних однорідних рівнянь для $M+1$ невідомих, тобто

$$\sum_{j=1}^{M+1} F_{r,j} \frac{d\xi_j}{ds} = 0 \quad (r = 1, \dots, M), \quad (20)$$

де $\bar{J} = [F_{r,j}] = [\partial F_r / \partial \xi_i]$ – матриця Якобі системи (19). Ранг $[\bar{J}] = M$ в регулярних і граничних точках

$$F_{r,i} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}\right) \delta_r^i + (a_{ijr} + a_{jir}) \xi_j + (b_{ijkr} + b_{jikr} + b_{kijr}) \xi_j \xi_k - (\xi_r + \bar{\xi}_r).$$

Розв'язок системи (20) представимо у вигляді задачі Коші

$$\frac{d\bar{X}}{ds} = \text{ort}(J, Q)$$

з початковою умовою $\bar{X}(s_0) = \bar{X}_0$.

Операція $\text{ort}(J, Q)$ позначає процес ортогоналізації векторів-рядків матриці \bar{J} і визначення орта, що доповнює вихідний базис до базису розмірності $(M+1)$ [4]. В якості початкового значення $\bar{X}(s_0)$ використовується розв'язок, який обчислений за методом Ньютона – Канторовича при $\lambda \ll \lambda_s$. Викладена процедура відповідає методу неперервного продовження [4]. Вона виявилася досить ефективною при вирішенні багатьох нелінійних задач [8].

3. Розрахунок і обговорення результатів.

При проведенні дослідження стійкості недосконалих оболонок з початковою увігнутістю, вигляд якої задається виразом (15) в будь-якому варіанті, будемо задавати інтервал $(L_1, L_1 + l_1)$ з початковим значенням $L_1 = 3L/8$ і кінцевим $L_1 + L/4$. Центр дуги по поздовжній координаті знаходиться при $x = L/2$, по коловій координаті – $\varphi = 0$ ($-0,748 < \varphi < 0,748$).

Відношення площ увігнутої ділянки поверхні до всієї поверхні приведення оболонки становить 0,06.

Розглянемо два приклади оболонок із шаруватих вуглепластиків, які були досліджені в ряді Європейських організацій і опубліковані в статтях [8, 19]. Перший приклад під назвою циліндр «Z22», другий – «Z33». Механічні характеристики кожного шару у власних осях, геометрія і структура шаруватого пластику для циліндрів Z22 і Z33, що взято зі статті [8], будуть наступними:

для циліндра Z22 – $E_1 = 142,5$ Гпа, $E_2 = 8,7$ Гпа, $G_{12} = 5,1$ Гпа, $\nu_{12} = 0,28$, довжина $L = 500,0$ мм, радіус $R = 250,3$ мм, $R/L = 0,506$, товщина $t = 0,486$ мм, $R/t = 200,5$;

для циліндра Z33 – $E_1 = 123,55$ Гпа, $E_2 = 8,7$ Гпа, $G_{12} = 5,7$ Гпа, $\nu_{12} = 0,31$, довжина $L = 510,0$ мм, радіус $R = 250,625$ мм, $R/L = 0,491$, товщина $t = 1,25$ мм, $R/t = 515$.

Як бачимо, оболонки мало розрізняються по радіусу і довжині, але суттєво – товщиною, так як оболонка Z22 – чотиришарова, а Z33 – десятишарова. Механічні характеристики препрега, що використовується, також близькі, крім модуля E_1 .

Розглянемо два варіанти армування шарів: для першого – кути армування шарів $[\pm 41^\circ, \pm 24^\circ]$, $[\pm 51^\circ, \pm 45^\circ, \pm 37^\circ, \pm 19^\circ, \pm 0^\circ]$, для другого із симетричною по модулю відносно серединної поверхні орієнтацією армуючих волокон в шарах – $[+ 41^\circ, + 24^\circ, - 24^\circ, - 41^\circ]$, $[+ 51^\circ, + 45^\circ, + 37^\circ, + 19^\circ, 0^\circ, 0^\circ, - 19^\circ, - 37^\circ, - 45^\circ, - 51^\circ]$.

Так як співвідношення теорії оболонок отримано в системі координат з напрямом нормалі в середину оболонки, то нумерація шарів в дужках починається з верхнього шару.

Використовуючи наведені дані про механічні та геометричні параметри оболонок при розв'язанні однорідної системи (14), отримаємо спектр власних значень і відповідних хвильових чисел, які визначають критичні навантаження і форми втрати стійкості.

У розкладах (5) враховуються M форм $U_i, \sigma_i, \varepsilon_i$ ($i = 1, \dots, M$). Функції U_{ij} при відомих $U_i, \sigma_i, \varepsilon_i$ визначаються при розв'язанні неоднорідних алгебраїчних рівнянь, які виводяться з варіаційного рівняння (7). Система відносно коефіцієнтів $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}$ в розкладах (18) має вигляд (14). Найменше значення в отриманому спектрі визначає критичне навантаження ідеальної оболонки, яке для оболонки Z22 дорівнює 25,7 кН (26,20 кН) і 172,73 кН (173,86 кН) – для Z33. У дужках наведено значення критичних навантажень для оболонок симетричної структури. Ці значення приймемо в якості еталонних, позначивши як λ_1 і λ_2 . У роботах [8, 18] для обчислення аналогічних величин використовується формула, згідно з якою $\lambda_1 = 33,7$ кН і $\lambda_2 = 198,7$ кН, що суттєво більше еталонних навантажень цієї роботи. Якщо в якості реальних критичних навантажень приймемо експериментальні для циліндра Z22 – 22,4 кН і 172,8 кН – для циліндра Z33, то для оболонки Z22 відношення $\lambda_{ex} / \lambda_1 = 0,872$, а для Z33 – $\lambda_{ex} / \lambda_2 = 1,0$. Це свідчить про те, що реальна оболонка Z33 в порівнянні з оболонкою Z22 менш чутлива до характерних для кожної з них недосконалостей.

Нижче розглянемо вплив локальних недосконалостей на критичні значення осьового навантаження зазначених двох варіантів оболонок. У таблиці наведено відносні значення критичних навантажень оболонок з недосконалостями λ_s до критичних навантажень ідеальних оболонок при наявності описаних вище локальних прогинів з різною амплітудою.

Амплітуда прогину $\bar{\xi}$	Оболонка Z22 λ_s / λ_1	Оболонка Z33 λ_s / λ_2
0,5	0,896	1,00
1,0	0,755	0,972
2,0	0,601	0,912

Порівнюючи наведені в них дані, відзначимо, що при однакових амплітудах локальних вмятин зменшення критичних навантажень значніше для оболонки Z22.

На рис. 1, а – 3, а (Z22) і рис. 1, б – 3, б (Z33) показано діаграми деформування, що ілюструють залежність між стискаючим зусиллям і зближенням торців в безперервній послідовності рівноважних станів. При розв'язку нелінійної системи (19) використовувався метод неперервного продовження, відповідно до якого виконується умова рівноваги в кожній точці діаграми. Тому ці діаграми можна називати також кривими рівноважних станів.

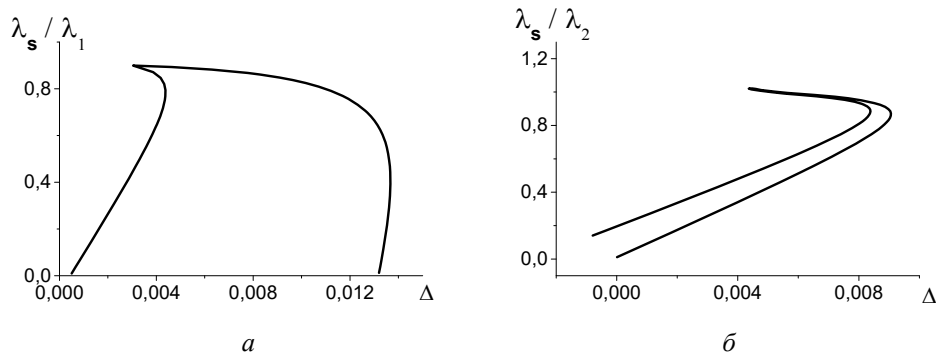


Рис. 1

На рис. 1, *a* – 3, *a* на осі ординат нанесено відносні величини λ_s / λ_1 зусиль для оболонки Z22, на рис. 1, *б* – 3, *б* – величини λ_s / λ_2 для оболонки Z33. На осі абсцис координатної системи кожного рисунка нанесено відносні величини укорочень $\Delta = (u_2 - u_1) / t$ відповідної оболонки. Відзначимо, що значення зусиль і переміщень обчислюються за умови існування розв'язку в регулярних і граничних точках рівноважних кривих.

Між діаграмами для оболонок Z22 і Z33 є істотна різниця, яка залежить від їх геометрії, структури шаруватого пакету, анізотропії та різної чутливості оболонок розглянутих типів до початкових недосконалостей. Рівноважні криві на рис. 1, *a* і на рис. 1, *б* отримано для оболонок обох типів при $\bar{\xi} = 0,5$. Тут для оболонки Z22 граничне навантаження $\lambda_s / \lambda_1 = 0,896$, для оболонки Z33 – $\lambda_s / \lambda_2 = 1$.

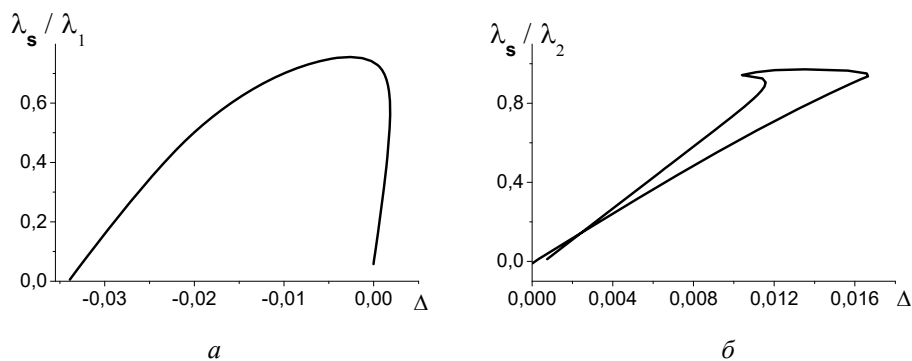


Рис. 2

На рис. 2, *a*, *б* при $\bar{\xi} = 1$ нанесено значення граничного навантаження для оболонки Z22 = 0,755, для оболонки Z33 – $\lambda_s / \lambda_2 = 0,972$. Порівнюючи ці результати, відзначимо, що локальний прогин розглянутого типу більш небезпечний для оболонки зі структурою і властивостями Z22, так як при осьовому навантаженні для таких оболонок зменшення граничного навантаження істотніше, ніж для оболонок типу Z33. Крім того, рівноважні криві відрізняються також за виглядом. Однак ці результати справедливі тільки при початковому несиметричному укладанні шарів відносно серединної поверхні оболонки. Ламінування, яке виконується таким чином, що кожному шару з позитивним кутом укладання відносно серединної поверхні відповідає шар з негативним кутом, призводить до протилежного висновку.

На рис. 3, *a*, *б* наведено рівноважні криві для оболонок з симетричним відносно серединної поверхні розташуванням шарів при $\bar{\xi} = 1$. Їх вигляд відрізняється від приведеного на рис. 1 і 2. Це пояснюється несиметричністю, що призводить до появи розтягуючих деформацій, незважаючи на стискаюче навантаження.

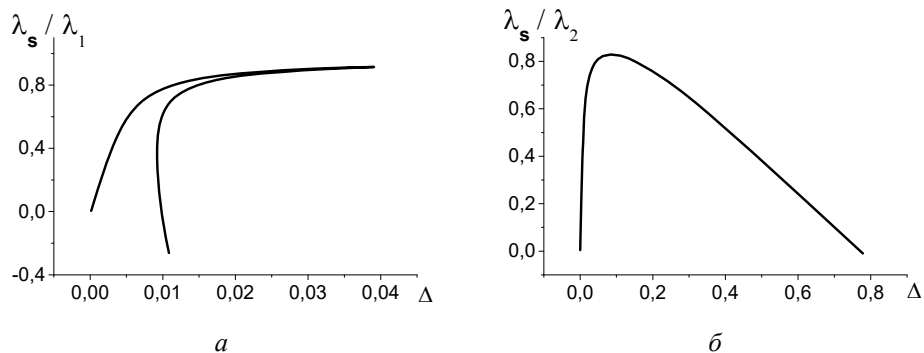


Рис. 3

Для оболонки Z22 відношення $\lambda_s / \lambda_1 = 0,915$, для Z33 маємо $\lambda_s / \lambda_2 = 0,829$. Той факт, що критичні навантаження залежать від порядку розташування шарів, використовується при оптимізації конструкцій з композиційних матеріалів. В той же час початкові недосконалості можуть значно погіршити оптимальний проєкт.

Висновки.

1. В роботі викладено варіант нелінійної теорії оболонок з композитів Тимошенка – Міндліна [2]. Крім врахування деформацій поперечного зсуву, цей варіант отримано без традиційних обмежень довжини і товщини оболонки. Нелінійні рівняння використано при побудові алгоритму розрахунку стійкості і початкової закритичної поведінки циліндричних композитних оболонок. Для цього використовується асимптотичний метод Біскова – Хатчінсона, який є узагальненням методу Койтера на конструкції з взаємодіючими модами. У наведеному підході в якості таких прийняті власні функції однорідної задачі, які використовуються також для апроксимації початкових локальних прогинів.

2. В якості прикладів, які розглядалися в роботі, взято оболонки (Z22 і Z33), що раніше досліджувалися в ряді Європейських організацій [8, 19]. Авторами цих робіт основна увага приділялася розробці уточненого методу визначення коефіцієнта зниження розрахункового навантаження з метою його зближення з очікуваним експериментальним. Як було показано вище, це можливо не тільки рекомендованими методами, але і шляхом вдосконалення розрахункової моделі вихідної оболонки без врахування і з врахуванням реальних недосконалостей.

У даній роботі передбачалось, що на поверхні оболонок є локалізований початковий прогин. Застосування побудованого алгоритму розв'язку задач на власні значення для оболонки Z33 призвело до майже співпадіння експериментальних і розрахункових критичних навантажень.

3. Показано, що в разі заданого несиметричного розташування шарів матеріалу оболонки типу Z33 будуть менш чутливі до досліджуваних недосконалостей, ніж оболонки типу Z22. Якщо змінити тільки порядок розташування шарів, то ефект виявляється протилежним.

4. Форма рівноважних кривих для оболонок досліджуваного типу суттєво залежить від шаруватості їх структури.

5. Викладена вище методика може бути використана для оцінки якості реальних оболонок.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розроблено процедуру аналітичного розв'язування задачі про стійкість і закритичне деформування композитних циліндричних оболонок з локальним прогином при осьовому стиску. При побудові алгоритму розрахунку використано варіант нелінійної теорії оболонок Тимошенка –

Міндліна та асимптотичний метод Біскова – Хатчинсона. Досліджено залежність граничних навантажень та кривих рівноважних станів від механічних та геометричних характеристик оболонок та структури пакету шарів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: циліндричні оболонки, композитні матеріали, локальні недосконалості, стійкість, закритична поведінка, осьовий стиск, асимптотичний метод.

1. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. 2-е изд. – Москва: Стройиздат, 1965. – 279 с.
2. Ванин Г.А., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – Киев: Наук. думка, 1987. – 200 с.
3. Гавриленко Г.Д., Красовский Л.П. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек с одиночной локальной вмятиной // Пробл. прочности. – 2004. – № 3. – С. 52 – 58.
4. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – Москва: Наука. – 1988. – 232 с.
5. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев – Лейпциг: Вища шк. – Фахбухферлаг, 1982. – 480 с.
6. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. Начальное закритическое поведение слоистых цилиндрических оболочек из композитов // Механика композитных материалов. – 1987. – № 1. – С. 88 – 93.
7. Amazigo J.C., Budiansky B. Asymptotic Formulas for the Buckling Stresses of Axially Compressed Cylinders with Localized or Random Axisymmetric Imperfections // J. Appl. Mech. – 1972. – 39. – P. 179 – 184.
8. Arbelo M.A., Degenhardt R., Castro S.G.P., Zimmermann R. Numerical Characterization of Imperfection Sensitive composite Structures // Composite Struct. – 2014. – 108. – P. 295 – 303.
9. Arbocz J., Babcock C.D. The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells // J. Appl. Mech. – 1969. – 36, N 1. – P. 28 – 38.
10. Bepalova E. I., Boreiko N. P. Determination of the Natural Frequencies of Compound Anisotropic Shell Systems Using Various Deformation Models // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 1. – P. 41 – 54.
11. Bisagni C. Experimental buckling of thin composite cylinders in compression // AIAA J. – 1999. – 37, N 2. – P. 276 – 278.
12. Budiansky B. Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Structures // Adv. Appl. Mech. – 1974. – 14. – P. 2 – 65.
13. Budiansky B., Hutchinson J.W. A survey of some buckling problems // AIAA J. – 1966. – 4, N 9. – P. 1505 – 1510.
14. Byskov E., Hutchinson J.W. Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells // AIAA J. – 1977. – 16, N 7. – P. 941 – 948.
15. Donnell L.H., Wan C.C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression // J. Appl. Mech. – 1950. – 17, N 1. – P. 73 – 83.
16. Elishakoff I. Probabilistic resolution of the twenty's century conundrum in elastic stability // Thin-Walled Struct. – 2012. – 59. – P. 35 – 57.
17. Flugge W. Die Stabilität der Kreiszylinderschale // Ing. Archiv. – 1932. – N 5. – P. 463-506.
18. Hilburger M.W. Developing the next generation shell buckling design factors and technologies // Proc. 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conf. – AIAA paper 2012-1686, Honolulu, HI, April 23 – 26, 2012.
19. Koiter W.T. Elastic stability and post-buckling behavior // Proc. Symp. Nonlinear Problems. – Madison: Univ. of Wisconsin Press. – 1963. – P. 257 – 275.
20. Peterson J.P., Seide P., Weingarten V.I. Buckling of thin-walled circular cylinders // Technical Report NASA-SP-8007, 1968. – 60 p.
21. Prabu B., Rathinam N., Srinivasan R., Naarayan K.A.S. Finite Element Analysis of Buckling of Thin Cylindrical Shell Subjected to Uniform Pressure // J. Solid Mech. – 2009. – 1, N 2. – P. 148 – 158.
22. Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B. Stability and Initial Post-Buckling Behavior of Orthotropic Cylindrical Sandwich Shells with Unidirectional Elastic Filler // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 6. – P. 636 – 647.
23. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 1. – P. 40 – 53.
24. Takano A. Statistical knockdown factors of buckling anisotropic cylinders under axial compression // J. Appl. Mech. – 2012. – 79, 051004. – P. 1 – 17.

Надійшла 04.03.2019

Затверджена до друку 15.12.2020