

В.І.Козлов<sup>1</sup>, Л.П.Зінчук<sup>1</sup>,  
Т.В.Карнаухова<sup>2</sup>, В.М.Січко<sup>3</sup>

### ВИМУШЕНІ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТОНКИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ ШАРАМИ

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: term@ipmtech.kiev.ua  
<sup>2</sup>Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,  
пр. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: karn@ipmtech.kiev.ua  
<sup>3</sup>Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського,  
вул. Нікольська, 24, 54001, Миколаїв, Україна;

**Abstract.** The numerical-analytical method is proposed for the study of geometrically nonlinear forced vibrations of thin shells of revolution with piezoelectric layers. It is based on using the finite element method and the method of harmonic linearization. The results of numerical simulation for the cylindrical panel consisting of the identical external piezoelectric layers and an internal passive viscoelastic layer are presented. The behavior of the deflection in the neighborhood of the first resonance at various damping coefficients is studied in detail.

**Key words:** forced vibration, geometric nonlinearity, piezoelectric layer, shell of revolution, finite element method.

#### Вступ.

У різних галузях сучасної техніки знаходять широке застосування тонкостінні шаруваті оболонкові конструктивні елементи, які містять в'язкопружні п'єзоелектричні шари, що викликає потребу в дослідженні їхньої поведінки при статичних і динамічних навантаженнях.

Високі характеристики міцності і жорсткості ряду п'єзоелектричних матеріалів дозволяють проектувати тонкостінні елементи з урахуванням їх роботи при значних переміщеннях. У зв'язку з цим актуальною є розробка методів геометрично нелінійного аналізу динамічної поведінки п'єзоелектричних неоднорідних пластин і оболонок в околі резонансних частот.

Основні підходи до вивчення нелінійної динаміки пружних пластин і оболонок досить докладно представлені, наприклад, в оглядових роботах і монографіях [1, 6, 8 – 11, 18 – 20]. Питання нелінійної динаміки магнітопружних оболонок відображено в публікаціях [2, 22, 23].

Детальний огляд наявних у даний час досліджень стосовно геометрично нелінійних теорій для шаруватих пластин і оболонок, що містять п'єзоелектричні шари, представлено в [14, 26]. Результатам багатьох досліджень з цієї тематики присвячено, зокрема, роботи [15 – 17, 21, 24].

Одним з найбільш універсальних чисельних методів розв'язування нелінійних задач теорії неоднорідних пластин і оболонок є метод скінченних елементів (МСЕ), детальний виклад якого є в роботах [3, 4, 12].

Дану роботу присвячено розробці чисельно-аналітичної методики дослідження вимушених геометрично нелінійних коливань шаруватих п'єзоелектричних оболонок обертання при механічному і електричному навантаженні. Розглядаються тонкі шаруваті оболонки, для моделювання механічної поведінки яких використовуються гіпоте-

зи Кірхгофа – Лява і нелінійна теорія тонкостінних елементів Кармана, які доповнено гіпотезами щодо електричних величин, коли відмінними від нуля вважаються тільки нормальні складові векторів напруженості електричного поля і електричної індукції.

В основі запропонованого підходу лежить використання методу скінченних елементів у варіаційній постановці з дванадцятивузловими ізопараметричними чотирикутними елементами [21]. Для апроксимації переміщень і геометрії оболонки в межах елемента використовуються кубічні поліноми, а прогин оболонки апроксимується бікубічними поліномами Ерміта. Для розв'язування отриманого матричного рівняння використано класичний метод розкладання невідомих величин за гармоніками, які знаходяться з розв'язку узагальненої задачі на власні значення і власні функції для електропружної задачі без урахування дисипації енергії. Це дозволяє звести матричне рівняння руху до звичайного диференціального рівняння другого порядку з нелінійними квадратичним і кубічним членами. Для розв'язування останнього використовується метод гармонічної лінеаризації.

Для перевірки точності розробленої методики розглянуто задачу про вимушені коливання шарнірно опертої циліндричної тришарової панелі окремо при механічному і електричному навантаженні, для якої підсумкове нелінійне диференціальне рівняння можна отримати, представляючи розв'язок задачі у вигляді подвійних тригонометричних рядів.

Представлено результати чисельного моделювання для циліндричної панелі, що складається з однакових зовнішніх п'єзоелектричних шарів і внутрішнього пасивного в'язкопружного шару, і детально досліджено поведінку прогину в околі першого резонансу при різних коефіцієнтах демпфування.

### §1. Варіаційна постановка задачі.

Розглянемо тришарову оболонку обертання товщини  $H = h_1 + h_2 + h_3$ , що складається з трансверсально-ізотропних в'язкопружних шарів. Шари можуть бути виготовлені як з п'єзоелектричного матеріалу з товщиною поляризацією, так і з пасивного матеріалу.

Оболонку віднесено до криволінійної ортогональної системи координат  $(s, \theta, z)$  (рис. 1). За базисну поверхню вибираємо серединну поверхню внутрішнього шару оболонки. Меридіан її базисної поверхні описується рівнянням  $r = r(x)$ . На поверхнях  $z = a_0, a_1, a_2, a_3$  є суцільні або дискретні електродні покриття, на яких задаються відповідні значення потенціалів  $V_0, V_1, V_2, V_3$ . Тут  $a_k$  – значення товщинної координати границь кожного шару. Так, наприклад, перший внутрішній шар має координати границь  $a_0$  та  $a_1$ . На поверхнях спряження шарів виконуються умови ідеального електромеханічного контакту.

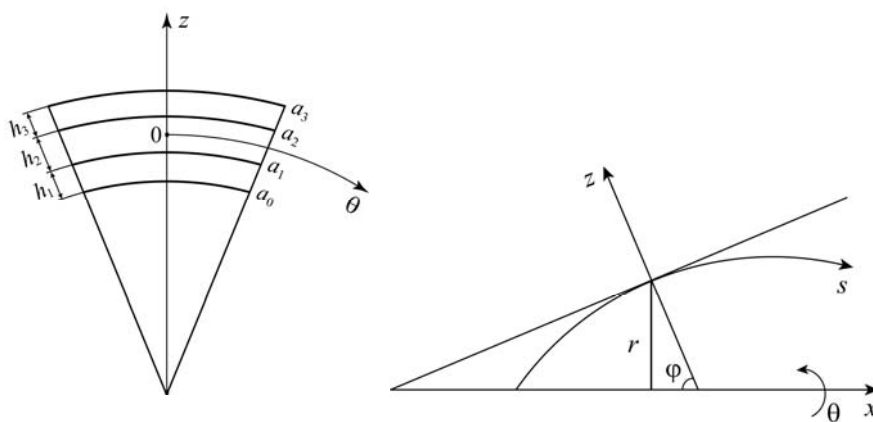


Рис. 1.

Припускаємо, що оболонка досить тонка, тому для моделювання її механічної поведінки можна використовувати гіпотези Кірхгофа – Лява, згідно з якими  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\sigma_{zs} = 0$ ,  $\sigma_{z\theta} = 0$ . При розв’язуванні задач електропружності ці класичні гіпотези Кірхгофа – Лява мають бути доповнені адекватними їм гіпотезами щодо електричних величин, коли вважається, що відмінними від нуля є лише нормальні складові векторів напруженості електричного поля і електричної індукції ( $E_z \neq 0$ ,  $D_z \neq 0$ ).

Відповідно до згаданих вище гіпотез щодо електромеханічних величин рівняння стану для  $k$ -го шару можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_{ss} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_{\theta\theta} - \gamma_{11}^{(k)} E_z^{(k)}; & \sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= B_{12}^{(k)} \varepsilon_{ss} + B_{22}^{(k)} \varepsilon_{\theta\theta} - \gamma_{11}^{(k)} E_z^{(k)}; \\ \sigma_{s\theta}^{(k)} &= 2G_{12}^{(k)} \varepsilon_{s\theta}; & D_z^{(k)} &= \gamma_{33}^{(k)} E_z^{(k)} + \gamma_{11}^{(k)} (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

де

$$B_{11}^{(k)} = c_{11}^{E(k)} - (c_{13}^{E(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}; \quad B_{12}^{(k)} = c_{12}^{E(k)} - (c_{13}^{E(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}; \quad B_{22}^{(k)} = B_{11}^{(k)};$$

$$\gamma_{11}^{(k)} = e_{13}^{(k)} - c_{13}^{E(k)} e_{33}^{(k)} / c_{33}^{E(k)}; \quad \gamma_{33}^{(k)} = \mu_{33}^{S(k)} + (e_{33}^{(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}; \quad 2G_{12}^{(k)} = c_{11}^{E(k)} - c_{12}^{E(k)},$$

$c_{ij}^E$ ,  $e_{ij}$  – відповідно пружні та п’єзоелектричні модулі, а  $\mu_{ij}^S$  – діелектричні проникливості п’єзоелектричного матеріалу. Якщо середній шар ( $k=2$ ) пасивний, то  $e_{ij}^{(2)} = 0$ .

Надалі будемо розглядати такі оболонки, для яких значеннями  $z/R_1$  і  $z/R_2$  можна знехтувати у порівнянні з одиницею ( $R_1$ ,  $R_2$  – радіуси головних кривизн поверхні відліку). У цьому випадку відповідно до нелінійної теорії тонкостінних елементів компоненти вектора переміщень та компоненти тензора деформацій можна записати у вигляді [5, 7, 17]

$$\begin{aligned} u(s, \theta, z) &= u_0(s, \theta) - \frac{\partial w(s, \theta)}{\partial s} z; & v(s, \theta, z) &= v_0(s, \theta) - \frac{\partial w(s, \theta)}{r \partial \theta} z; & w(s, \theta, z) &= w(s, \theta); \\ \varepsilon_{ss} &= \varepsilon_{ss}^0 + \kappa_{ss} z; & \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_{\theta\theta} z; & \varepsilon_{s\theta} &= \varepsilon_{s\theta}^0 + \kappa_{s\theta} z, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2; & \varepsilon_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2; \\ \varepsilon_{s\theta}^0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v_0 + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right); & \kappa_{ss} &= \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \\ \kappa_{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial s}; & \kappa_{s\theta} &= - \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial s} - \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Відповідно до вказаних вище гіпотез щодо напруженості електричного поля та електричної індукції після інтегрування за товщинною координатою  $z$  залежності

$$E_z^{(k)} = \frac{1}{\gamma_{33}^{(k)}} D_z^{(k)} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}} [\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0 + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) z], \quad (1.4)$$

отримаємо

$$D_z^{(k)}(s, \theta) = - \frac{V_k - V_{k-1}}{H_1^{(k)}} + (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}}. \quad (1.5)$$

У (1.5) використовуються наступні позначення:

$$H_1^{(k)} = \frac{a_k - a_{k-1}}{\gamma_{33}^{(k)}}; \quad H_2^{(k)} = \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}}(a_k - a_{k-1}); \quad H_3^{(k)} = \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{2\gamma_{33}^{(k)}}(a_k^2 - a_{k-1}^2) \quad (k=1, 2, 3).$$

Підставляючи (1.4), (1.5) в (1.1) і беручи до уваги співвідношення (1.2) – (1.3), рівняння стану (1.1) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^{(k)} &= A_{11}^{(k)}(\varepsilon_{ss}^0 + \kappa_{ss}z) + A_{12}^{(k)}(\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_{\theta\theta}z) - \\ &- \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}} \left( -\frac{V_k - V_{k-1}}{H_1^{(k)}} + (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}} \right); \\ \sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= A_{12}^{(k)}(\varepsilon_{ss}^0 + \kappa_{ss}z) + A_{11}^{(k)}(\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_{\theta\theta}z) - \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$- \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}} \left( -\frac{V_k - V_{k-1}}{H_1^{(k)}} + (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}} \right); \quad \sigma_{s\theta}^{(k)} = 2G_{12}^{(k)}(\varepsilon_{s\theta}^0 + \kappa_{s\theta}z),$$

де

$$A_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)} + \frac{\gamma_{11}^{(k)}\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}}; \quad A_{12}^{(k)} = B_{12}^{(k)} + \frac{\gamma_{11}^{(k)}\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}}.$$

Розв'язок задачі про нелінійні коливання тришарової оболонки знаходитимемо з використанням тривимірних варіаційних рівнянь електромеханіки, які представлено в [5]. З урахуванням гіпотез Кірхгофа – Лява і припущення про сталість нормальної складової вектора електричної індукції в кожному шарі після інтегрування по всьому пакету шарів оболонки зведемо тривимірне варіаційне рівняння [5] до двовимірного рівняння виду

$$\delta E = \delta(E_1 + E_2 + E_3) = 0, \quad (1.7)$$

де

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} \iint_F \left\{ C_{11}(\varepsilon_{ss}^0)^2 + 2C_{12}\varepsilon_{ss}^0\varepsilon_{\theta\theta}^0 + C_{22}(\varepsilon_{\theta\theta}^0)^2 + 4C_{44}(\varepsilon_{s\theta}^0)^2 + 2K_{11}\varepsilon_{ss}^0\kappa_{ss} + \right. \\ &+ 2K_{12}\varepsilon_{ss}^0\kappa_{\theta\theta} + 2K_{21}\varepsilon_{\theta\theta}^0\kappa_{ss} + 2K_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^0\kappa_{\theta\theta} + 8K_{44}\varepsilon_{s\theta}^0\kappa_{s\theta} + \\ &+ D_{11}(\kappa_{ss})^2 + 2D_{12}\kappa_{ss}\kappa_{\theta\theta} + D_{22}(\kappa_{\theta\theta})^2 + 4D_{44}(\kappa_{s\theta})^2 + \\ &+ \rho_1 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} u_0 + \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} v_0 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w \right) + \zeta_1 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial t} v_0 + \frac{\partial w}{\partial t} w \right) \left. \right\} r ds d\theta; \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$E_2 = - \iint_F (P_s u_0 + P_\theta v_0 + P_z w) r ds d\theta - \int_L \left( N_s u_0 + N_\theta v_0 - M_s \frac{\partial w}{\partial s} - M_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) dL; \quad (1.9)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \iint_F \left[ (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) Q^0 + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) Q^1 \right] r ds d\theta. \quad (1.10)$$

У функціоналах (1.8) – (1.10) введені наступні позначення:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^3 \left( \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^{(k)} dz - \frac{H_2^{(k)} H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}} \right); \quad K_{ij} = \sum_{k=1}^3 \left( \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^{(k)} z dz - \frac{H_2^{(k)} H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}} \right);$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^3 \left( \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^{(k)} z^2 dz - \frac{H_3^{(k)} H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}} \right) \quad (i, j = 1, 2);$$

$$C_{44} = \sum_{k=1}^3 \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^{(k)} dz; \quad K_{44} = \sum_{k=1}^3 \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^{(k)} z dz; \quad D_{44} = \sum_{k=1}^3 \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^{(k)} z^2 dz; \quad \zeta_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{a_{k-1}}^{a_k} \zeta^{(k)} dz;$$

$$Q^0 = \sum_{k=1}^3 (V_k - V_{k-1}) \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}}; \quad Q^1 = \sum_{k=1}^3 (V_k - V_{k-1}) \frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}}; \quad \rho_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^{(k)} dz,$$

$P_z, P_s, P_\theta$  – компоненти вектора поверхневого навантаження;  $N_s, N_\theta, M_s, M_\theta$  – зусилля і моменти на торцях оболонки;  $\rho^{(k)}, \zeta^{(k)}$  – відповідно густина та коефіцієнт в'язкого тертя матеріалу  $k$ -го шару оболонки.

У випадку симетричного розташування шарів оболонки маємо

$$K_{11} = K_{22} = K_{12} = K_{21} = K_{44} = 0. \quad (1.11)$$

## §2. Скінченно-елементний метод розв'язування задачі.

Розв'язок варіаційної задачі знаходимо методом скінченних елементів з використанням дванадцятивузлових ізопараметричних чотирикутних елементів. Для апроксимації переміщень та геометрії оболонки використовуються кубічні поліноми у межах чотирикутника [13]. При цьому прогин оболонки в межах скінченного елемента апроксимується бікубічними поліномами Ерміта

$$w = \sum_{i=1}^4 L_i w_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+8} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+12} \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i, \quad (2.1)$$

де  $w_i, \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_i, \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_i, \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i$  – амплітудні значення прогину і його похідних в кутових точках елемента, а  $L_i$  – поліноми Ерміта виду

$$L_1 = \frac{1}{16} (2 - 3\xi + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3); \quad L_2 = \frac{1}{16} (2 + 3\xi + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3);$$

$$L_3 = \frac{1}{16} (2 + 3\xi + \xi^3)(2 + 3\eta + \eta^3); \quad L_4 = \frac{1}{16} (2 - 3\xi + \xi^3)(2 + 3\eta + \eta^3);$$

$$L_5 = \frac{\ell_{12}}{32} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3); \quad L_6 = \frac{\ell_{12}}{32} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3);$$

$$L_7 = \frac{\ell_{34}}{32} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3); \quad L_8 = \frac{\ell_{34}}{32} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3);$$

$$L_9 = \frac{\ell_{14}}{32} (2 - 3\xi + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3); \quad L_{10} = \frac{\ell_{23}}{32} (2 + 3\xi - \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{11} = \frac{\ell_{23}}{32} (2 + 3\xi - \xi^3)(-1 - \eta - \eta^2 + \eta^3); \quad L_{12} = \frac{\ell_{14}}{32} (2 - 3\xi - \xi^3)(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{13} = \frac{\ell_{12}\ell_{14}}{64} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3); \quad L_{14} = \frac{\ell_{12}\ell_{23}}{64} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{15} = \frac{\ell_{23}\ell_{34}}{64} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3);$$

$$L_{16} = \frac{\ell_{14}\ell_{34}}{64} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3)$$

( $\ell_{ij}$  – відстань між відповідними вершинами елемента).

Тангенціальні складові переміщень серединної поверхні оболонки в межах елемента апроксимуються кубічними поліномами

$$u_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i u_{0i}; \quad v_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i v_{0i}, \quad (2.2)$$

де

$$N_1 = \frac{1}{32} (1 - \xi)(1 - \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10]; \quad N_2 = \frac{1}{32} (1 + \xi)(1 - \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10];$$

$$N_3 = \frac{1}{32} (1 + \xi)(1 + \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10]; \quad N_4 = \frac{1}{32} (1 - \xi)(1 + \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10];$$

$$N_5 = \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 - \eta); \quad N_6 = \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 - \eta);$$

$$N_7 = \frac{9}{32} (1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta); \quad N_8 = \frac{9}{32} (1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta);$$

$$N_9 = \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 + \eta); \quad N_{10} = \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 + \eta);$$

$$N_{11} = \frac{9}{32} (1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta); \quad N_{12} = \frac{9}{32} (1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta).$$

Як глобальна система координат, тобто система, в якій об'єднуються всі елементи, використовується циліндрична система координат  $(r, \theta, s)$  (рис. 1). Меридіональна  $s$  і осьова  $x$  координати пов'язані співвідношенням

$$ds = A dx; \quad A = \sqrt{1 + (dr/dx)^2}.$$

Як локальна система координат, в якій визначаються апроксимуючі функції і виконується інтегрування, використовується нормалізована система координат  $(\xi, \eta)$ . При цьому зв'язок між координатами  $s, r, \theta$  та координатами локальної системи  $\xi, \eta$  визначається залежностями

$$s = \sum_{i=1}^{12} N_i s_i; \quad r = \sum_{i=1}^{12} N_i r_i; \quad \theta = \sum_{i=1}^{12} N_i \theta_i,$$

де  $s_i, r_i, \theta_i$  – вузлові значення координат.

Співвідношення (2.1), (2.2) показують, що використовуваний елемент має 40 ступенів свободи: 6 ступенів ( $w$ ,  $\partial w / \partial s$ ,  $\partial w / r \partial \theta$ ,  $\partial^2 w / (r \partial s \partial \theta)$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ ) у кожній кутовій точці і 2 ступеня свободи ( $u_0$ ,  $v_0$ ) в кожному вузлі, розташованому на сторонах чотирикутника.

У роботах [12, 17] такий скінченний елемент використовується при розв'язуванні статичних та динамічних задач для одношарових і багатшарових оболонок. Проведено чисельне порівняння результатів розрахунку напружено-деформованого стану пружних і в'язкопружних оболонок з результатами, що отримано аналітичними та іншими чисельними методами. Відзначено, що використання таких функцій апроксимації дозволяє з високою точністю отримати розв'язок для оболонок різної геометричної форми.

Представимо енергію деформації оболонки  $E$  у вигляді суми двох складових

$$E = E_L + E_{NL}, \quad (2.3)$$

де  $E_L$  – лінійна частина, що містить члени квадратичні по переміщеннях та їх похідних;  $E_{NL}$  – нелінійна частина, що включає усі інші члени більш високого порядку. Для оболонки симетричної структури (при  $N_s = 0$ ,  $N_\theta = 0$ ,  $M_s = 0$ ,  $M_\theta = 0$ ,  $P_s = 0$ ,  $P_\theta = 0$ ) вирази для  $E_L$  и  $E_{NL}$  можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} E_L = & \frac{1}{2} \iint_F \left\{ C_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1} \right)^2 + 2C_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2} \right) + \right. \\ & + C_{11} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2} \right)^2 + C_{44} \left( \frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v_0 \right)^2 + \\ & + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right) + \\ & + D_{11} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + D_{44} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 + \\ & + \rho_1 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} u_0 + \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} v_0 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w \right) + \zeta_1 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial t} v_0 + \frac{\partial w}{\partial t} w \right) \Big\} r ds d\theta + \\ & + \iint_F \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2} \right) Q^0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) Q^1 \right] - P_z w \right\} r ds d\theta; \\ E_{NL} = & \frac{1}{2} \iint_F \left\{ C_{11} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^4 \right] + C_{12} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \Big] + \\
& + C_{11} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^4 \right] + \\
& + C_{44} \left[ 2 \left( \frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v_0 \right) \left( \frac{\partial w}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \Big\} r ds d\theta .
\end{aligned}$$

Представляючи компоненти механічних і електричних навантажень, які діють у межах елемента, у вигляді розкладу за функціями апроксимації (2.1) – (2.2)

$$P = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) P_i; \quad V = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) V_i$$

і враховуючи вирази для переміщень і деформацій (1.2), з умови стаціонарності функціоналу (1.7) отримаємо систему нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку для визначення тангенціальних переміщень, прогину і його похідних

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_j} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_j^s} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j^s} = 0; \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_j^\theta} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j^\theta} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_j^{s\theta}} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j^{s\theta}} = 0; \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{0j}} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_{0j}} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_{0j}} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_{0j}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

При цьому диференціювання за  $u_0$ ,  $v_0$  проводиться в усіх вузлових точках елемента, а за  $w$ ,  $w^s = \partial w / \partial s$ ,  $w^\theta = \partial w / r \partial \theta$ ,  $w^{s\theta} = \partial^2 w / (r \partial s \partial \theta)$  – тільки в кутових точках чотирикутного елемента.

У матричній формі систему диференціальних рівнянь (2.4) можна записати у вигляді

$$[M] \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + [C] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + [K] \mathbf{U} + \mathbf{G}_{NL}(\mathbf{U}) = \mathbf{Q}(t), \tag{2.5}$$

де  $[M]$  – матриця мас;  $[C]$  – матриця втрат;  $[K]$  – матриця жорсткості;  $\mathbf{Q}(t)$  – вектор-стовпець зовнішнього навантаження;  $\mathbf{U}$  – вектор-стовпець прогину і його похідних, а також тангенціальних складових переміщень у вузлових точках;  $\mathbf{G}_{NL}(\mathbf{U})$  – вектор-стовпець, компоненти якого отримані на основі диференціювання нелінійної складової функціоналу (2.3) за значеннями величин, що визначаються у вузлових точках, причому цей вектор містить елементи з квадратичною і кубічною нелінійностями стосовно прогину оболонки.

Як початкові умови вибираємо такі:

$$\mathbf{U} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0. \tag{2.6}$$

Розв'язок матричного рівняння (2.5) при початкових умовах (2.6) представимо у вигляді розкладу за власними формами коливань електропружної оболонки (без урахування розсіювання енергії)



$$\mathbf{U}(w, \dots, v_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{W}_n(w, \dots, v_0) f_n(t), \quad (2.7)$$

які отримано в результаті розв'язання узагальненої задачі на власні значення

$$[K] \mathbf{W}_n - \omega_n^2 [M] \mathbf{W}_n = 0. \quad (2.8)$$

У рівнянні (2.8)  $\mathbf{W}_n$  – це ортонормований власний вектор, який задовольняє таким умовам:

$$\mathbf{W}_m^T [M] \mathbf{W}_n = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 1 & \text{при } m = n \end{cases}; \quad \mathbf{W}_m^T [K] \mathbf{W}_n = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \omega_m^2 & \text{при } m = n \end{cases};$$

$$\mathbf{W}_m^T [C] \mathbf{W}_n = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 2\omega_m \zeta_m & \text{при } m = n \end{cases}. \quad (2.9)$$

Тут  $\omega_m$  – кругова частота власних коливань оболонки;  $\zeta_m$  – коефіцієнт демпфування  $m$ -ї форми коливань, а знак «Т» позначає транспонування.

Підставляючи розв'язок (2.7) у векторне рівняння (2.5), помножуючи його на транспонований вектор  $\mathbf{W}_n^T$  і враховуючи (2.9), отримаємо

$$\frac{\partial^2 f_n(t)}{\partial t^2} + 2\omega_n \zeta_n \frac{\partial f_n(t)}{\partial t} + \omega_n^2 f_n(t) + \mathbf{W}_n^T \mathbf{G}_{NL}(\mathbf{W}_n, f_n(t)) = \mathbf{W}_n^T \mathbf{Q}(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Зауважимо, що у рівнянні (2.10) після виконання цієї підстановки вектор-стовпець  $\mathbf{G}_{NL} = \mathbf{G}_{NL}(\mathbf{W}_n, f_n(t))$  буде залежати від  $\mathbf{W}_n$  і скалярної функції  $f_n(t)$ , що і відображено в символічному записі.

Обчислюючи компоненти вектора  $\mathbf{G}_{NL}(\mathbf{W}_n, f_n(t))$  та множачи зліва отриманий вектор на транспонований вектор  $\mathbf{W}_n^T$  і групуючи коефіцієнти при  $(f_n(t))^2$  і  $(f_n(t))^3$ , нелінійне диференціальне рівняння другого порядку (2.10) для визначення функції часу  $f_n(t)$  можна записати у вигляді

$$\frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} + 2\omega_n \zeta_n \frac{df_n(t)}{dt} + \omega_n^2 f_n(t) + \beta_1 (f_n(t))^2 + \beta_2 (f_n(t))^3 = F_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

де  $\beta_1, \beta_2$  – коефіцієнти, які визначаються під час застосування МСЕ.

Розглянемо випадок одночастотних коливань при гармонічному навантаженні  $F_n(t) = F_{0n} \cos \Omega t$ .

Увівши безрозмірні параметри

$$\tau = \omega_n t; \quad y = f_n \frac{\omega_n^2}{F_{0n}}; \quad \eta_1 = \frac{\Omega}{\omega_n}; \quad D = 2\zeta_n; \quad \mu_1 = \beta_1 \frac{F_{0n}}{\omega_n^4}; \quad \mu_2 = \beta_2 \frac{F_{0n}}{\omega_n^6},$$

рівняння (2.11) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + D \frac{dy}{d\tau} + y + \mu_1 y^2 + \mu_2 y^3 = \cos \eta_1 \tau. \quad (2.12)$$

Використовуючи метод гармонічної лінеаризації і представляючи розв'язок рівняння (2.12) у вигляді

$$y = A \cos \eta_1 \tau + B \sin \eta_1 \tau + Z, \quad (2.13)$$

для визначення коефіцієнтів  $A, B, Z$  отримаємо систему трьох нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
A(1-\eta_1^2) + DB\eta_1 + 2\mu_1 AZ + \mu_2 \left( \frac{3}{4}A^3 + \frac{3}{4}AB^2 + 3AZ^2 \right) &= 1; \\
B(1-\eta_1^2) - DA\eta_1 + 2\mu_1 Bz + \mu_2 \left( \frac{3}{4}B^3 + \frac{3}{4}A^2B + 3BZ^2 \right) &= 0; \\
Z + \mu_1 \left( \frac{X}{2} + Z^2 \right) + \mu_2 \left( \frac{3}{2}XZ + Z^3 \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Якщо невідомими вважати квадрат амплітуди  $X$  ( $X = A^2 + B^2$ ) і сталу  $Z$ , то система рівнянь (2.14) спрощується і набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{9}{16}\mu_2^2 X^3 + \frac{3}{2}\mu_2(1-\eta_1^2)X^2 + [(1-\eta_1^2)^2 + D^2\eta_1^2]X + 9\mu_2^2 XZ^4 + 12\mu_1\mu_2 XZ^3 + \frac{9}{2}\mu_2 X^2 Z^2 + \\
+ 6\mu_2(1-\eta_1^2)XZ^2 + 4\mu_1 XZ^2 + 3\mu_1\mu_2 X^2 Z + 4\mu_1(1-\eta_1^2)XZ = 1; \\
X \left( \frac{3}{2}\mu_2 Z + \frac{1}{2}\mu_1 \right) + \mu_2 Z^3 + \mu_1 Z^2 + Z = 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Виключаючи квадрат амплітуди  $X$  з рівнянь (2.15), для визначення  $Z$  отримаємо алгебраїчне рівняння 9-го степеня

$$A_0 + A_1 Z + A_2 Z^2 + A_3 Z^3 + A_4 Z^4 + A_5 Z^5 + A_6 Z^6 + A_7 Z^7 + A_8 Z^8 + A_9 Z^9 = 0, \tag{2.16}$$

коефіцієнти якого мають вигляд

$$\begin{aligned}
A_0 &= 2\mu_1^3; \quad A_1 = 18\mu_1^2\mu_2 + 4\mu_1^2\mu_3; \quad \mu_3 = (D\eta_1)^2 + (1-\eta_1^2)^2; \\
A_2 &= 54\mu_1\mu_2^2 + (16\mu_1^3 - 12\mu_1\mu_2)(1-\eta_1^2) + 4\mu_3(\mu_1^3 + 6\mu_1\mu_2); \\
A_3 &= 9\mu_2^2 - 24\mu_1^2\mu_2 + 4\mu_3(7\mu_1^2\mu_2 + 9\mu_2^2) + (1-\eta_1^2)(-36\mu_2^2 + 16\mu_1^4 + \\
&\quad + 96\mu_1^2\mu_2) + 54\mu_2^3 + 16\mu_1^4; \\
A_4 &= -81\mu_1\mu_2^2 + 60\mu_1\mu_2^2\mu_3 + (1-\eta_1^2)(124\mu_1^3\mu_2 + 192\mu_1\mu_2^2) + 96\mu_1^3\mu_2 + 16\mu_1^5; \\
A_5 &= -81\mu_2^3 + 231\mu_1^2\mu_2^2 + (1-\eta_1^2)(384\mu_1^2\mu_2^2 + 144\mu_2^3) + 136\mu_1^4\mu_2 + 36\mu_2^3\mu_3; \\
A_6 &= 270\mu_1\mu_2^3 + 420\mu_1\mu_2^3(1-\eta_1^2) + 465\mu_1^3\mu_2^2; \quad A_7 = 135\mu_2^4 + 795\mu_1^2\mu_2^3 + 180\mu_2^4(1-\eta_1^2); \\
A_8 &= 675\mu_1\mu_2^4; \quad A_9 = 225\mu_2^5.
\end{aligned}$$

Визначивши дійсні корені рівняння (2.16), квадрат амплітуди  $X$  і коефіцієнти  $A$  і  $B$  можна знайти за формулами

$$X = -2 \frac{\mu_2 Z^3 + \mu_1 Z^2 + Z}{3\mu_2 Z + \mu_1}; \quad A = \frac{3}{4}\mu_2 X^2 + [(1-\eta_1) + 2\mu_1 Z + 3\mu_2]X; \quad B = XD\eta_1.$$

### §3. Аналітично-числовий розв'язок задачі про нелінійні коливання тришарової циліндричної панелі з шарнірно закріпленими торцями.

Нелінійні задачі про динамічну поведінку замкнутої циліндричної оболонки і циліндричної панелі з шарнірно закріпленими торцями мають аналітичний розв'язок у вигляді подвійних тригонометричних рядів. Ці розв'язки можна використати з метою верифікації результатів при розробці чисельних методів.

Розглянемо задачу про нелінійні коливання тришарової циліндричної панелі радіуса  $R$ , що знаходиться під дією рівномірно розподіленого тиску  $P_z = P_0 \cos \Omega t$ . На електродованих поверхнях оболонки задано значення потенціалу. У задачах про згинні коливання тонкостінних елементів переважаючими є інерційні сили в нормальному напрямку. Ввівши позначення  $x = s$  ( $0 \leq x \leq a$ ),  $y = R\theta$  ( $0 \leq y \leq b$ ) і нехтуючи інерційними силами для тангенціальних складових, спрощене варіаційне рівняння, яке використовується при розв'язуванні даної задачі, запишемо у вигляді

$$\delta E = 0, \quad (3.1)$$

де

$$E = E_1 + E_2;$$

$$\begin{aligned} E_1 = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ C_{11} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + 2C_{12} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ & + C_{11} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + C_{44} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \\ & \left. + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{44} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w + \zeta_1 \frac{\partial w}{\partial t} w \right\} dx dy; \\ E_2 = & \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) Q^0 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) Q^1 \right] - P_z w \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Дану задачу зводимо до розв'язування варіаційного рівняння (3.1) при наступних початкових

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (3.3)$$

і граничних умовах:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad v_0 = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a; \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad u_0 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Враховуючи граничні умови (3.4), розв'язок задачі знаходимо у вигляді подвійних тригонометричних рядів

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(t) \sin(k_m x) \sin(p_n y); \\ u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(t) \cos(k_m x) \sin(p_n y); \\ v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}(t) \sin(k_m x) \cos(p_n y), \end{aligned} \quad (3.5)$$

де  $k_m = m\pi/a$ ,  $p_n = n\pi/b$ , ( $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Представимо компоненти механічного та електричного навантажень також у вигляді розкладу за тригонометричними функціями

$$P_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin(k_m x) \sin(p_n y); \quad V_k - V_{k-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}^k \sin(k_m x) \sin(p_n y);$$

$$P_{mn} = \frac{16P_0}{abk_m p_n}; \quad V_{mn}^k = \frac{16(V_k - V_{k-1})}{abk_m p_n}. \quad (3.6)$$

Підставляючи (3.4), (3.5) в (3.2) та обчислюючи відповідні інтеграли, вираз для функціоналу E запишемо у вигляді

$$E = \frac{1}{2} \left\{ C_{11} k_m^2 u_{mn}^2 + 2C_{12} \left( k_m p_n u_{mn} v_{mn} - \frac{1}{R} k_m u_{mn} w_{mn} \right) + C_{11} \left( p_n v_{mn} - \frac{1}{R} w_{mn} \right)^2 + \right.$$

$$+ C_{44} (k_m v_{mn} + p_n u_{mn})^2 + D_{11} k_m^4 w_{mn}^2 + 2D_{12} k_m^2 p_n^2 w_{mn}^2 + D_{11} p_n^4 w_{mn}^2 + 4D_{44} k_m^2 p_n^2 w_{mn}^2 +$$

$$+ \frac{32}{9abk_m p_n} \left[ (C_{44} - C_{12})(k_m p_n^2 u_{mn} + k_m^2 p_n v_{mn}) - C_{11}(k_m^3 u_{mn} + p_n^3 v_{mn}) \right] w_{mn}^2 +$$

$$+ \frac{32}{9abk_m p_n} \frac{1}{R} (C_{12} k_m^2 + C_{11} p_n^2) w_{mn}^3 + \frac{1}{128} C_{11} \left[ 9(k_m^4 + p_n^4) + 2k_m^2 p_n^2 \right] w_{mn}^4 + \quad (3.7)$$

$$\left. + \rho_1 \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial t^2} w_{mn} + \zeta_{mn} \frac{\partial w_{mn}}{\partial t} w_{mn} \right\} -$$

$$-(k_m u_{mn} + p_n v_{mn}) Q_{mn}^0 - (k_m^2 + p_n^2) Q_{mn}^1 w_{mn} - P_{mn} w_{mn}.$$

У (3.7) введено позначення  $Q_{mn}^0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 V_{mn}^k \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}}$ ,  $Q_{mn}^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 V_{mn}^k \frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}}$ ,  $\zeta_{mn}$  – коефіцієнт в'язкого тертя.

Враховуючи, що  $D_{11} = D_{12} + 2D_{44}$  та  $C_{11} = C_{12} + 2C_{44}$ , з умови стаціонарності функціоналу (3.7) для визначення коефіцієнтів розкладу  $u_{mn}$ ,  $v_{mn}$  і  $w_{mn}$  отримаємо систему рівнянь

$$(C_{11} k_m^2 + C_{44} p_n^2) u_{mn} + (C_{12} + C_{44}) k_m p_n v_{mn} = C_{12} \frac{k_m}{R} w_{mn} +$$

$$+ \frac{16}{9abk_m p_n} \left[ C_{11} k_m^3 - (C_{44} - C_{12}) k_m p_n^2 \right] w_{mn}^2 + Q_{mn}^0 k_m;$$

$$(C_{12} + C_{44}) k_m p_n u_{mn} + (C_{11} p_n^2 + C_{44} k_m^2) v_{mn} = C_{11} \frac{p_n}{R} w_{mn} +$$

$$+ \frac{16}{9abk_m p_n} \left[ C_{11} p_n^3 - (C_{44} - C_{12}) k_m^2 p_n \right] w_{mn}^2 + Q_{mn}^0 p_n; \quad (3.8)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial t^2} + \zeta_{mn} \frac{\partial w_{mn}}{\partial t} + D_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 w_{mn} + C_{11} \frac{w_{mn}}{R^2} - C_{12} \frac{k_m}{R} u_{mn} - C_{11} \frac{p_n}{R} v_{mn} +$$

$$+ \frac{32}{9abk_m p_n} \left[ -C_{11} (k_m^3 u_{mn} + p_n^3 v_{mn}) + (C_{44} - C_{12}) (k_m p_n^2 u_{mn} + k_m^2 p_n v_{mn}) \right] w_{mn} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16}{3abk_m p_n} (C_{12}k_m^2 + C_{11}p_n^2) \frac{w_{mn}^2}{R} + \\
& + \frac{1}{64} C_{11} (9k_m^4 + 2k_m^2 p_n^2 + 9p_n^4) w_{mn}^3 - Q_{mn}^1 (k_m^2 + p_n^2) - P_{mn} = 0.
\end{aligned}$$

Розв'язок першого і другого рівнянь системи (3.8) можна записати у вигляді

$$u_{mn} = S_1 \frac{w_{mn}}{R} + Q_1 w_{mn}^2 + Q_{mn}^0 \frac{k_m}{C_{11}(k_m^2 + p_n^2)}; \quad v_{mn} = S_2 \frac{w_{mn}}{R} + Q_2 w_{mn}^2 + Q_{mn}^0 \frac{p_n}{C_{11}(k_m^2 + p_n^2)}, \quad (3.9)$$

де

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{k_m (C_{12}k_m^2 - C_{11}p_n^2)}{C_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2}; \quad S_2 = \frac{p_n [C_{11}(p_n^2 + k_m^2) - (C_{11} + C_{12})k_m^2]}{C_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2}; \\
Q_1 &= \frac{16}{9abk_m p_n} \frac{(5C_{12} + 4C_{44})k_m^3 p_n^2 - 2C_{11}k_m p_n^4 + C_{11}k_m^5}{C_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2}; \\
Q_2 &= \frac{16}{9abk_m p_n} \frac{(5C_{12} + 4C_{44})k_m^2 p_n^3 - 2C_{11}k_m^4 p_n + C_{11}p_n^5}{C_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2}.
\end{aligned}$$

Підставляючи знайдені вирази (3.9) для  $u_{mn}$  і  $v_{mn}$  у третє рівняння системи (3.8), для визначення  $w_{mn}$  отримаємо нелінійне диференційне рівняння другого порядку

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + 2\zeta_{mn}^* \frac{dw_{mn}}{dt} + \omega_{mn}^2 w_{mn} + \beta_1 (w_{mn})^2 + \beta_2 (w_{mn})^3 &= \frac{1}{\rho_1} P_{mn} + \\
& + \frac{1}{\rho_1} \left[ \frac{Q_{mn}^0}{R} \frac{(C_{12}k_m^2 + C_{11}p_n^2)}{C_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2} + Q_{mn}^1 (p_n^2 + k_m^2) \right], \quad (3.10)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\omega_{mn}^2 &= \left[ D_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2 + \frac{(C_{11}^2 - C_{12}^2)k_m^4}{C_{11}R^2(k_m^2 + p_n^2)^2} \right] \frac{1}{\rho_1}; \\
\beta_1 &= \frac{1}{\rho_1 R} \left\{ \frac{16}{3abk_m p_n} (C_{12}k_m^2 + C_{11}p_n^2) - C_{12}k_m Q_1 - C_{11}p_n Q_2 + \right. \\
& \left. + \frac{32}{9abk_m p_n} [(C_{44} - C_{12})(k_m p_n^2 S_1 + k_m^2 p_n S_2) - C_{11}(k_m^3 S_1 + p_n^3 S_2)] \right\}; \\
\beta_2 &= \frac{C_{11}}{64\rho_1} (9k_m^4 + 2k_m^2 p_n^2 + 9p_n^4) + \\
& + \frac{32}{9abk_m p_n \rho_1} [(C_{44} - C_{12})(k_m p_n^2 Q_1 + k_m^2 p_n Q_2) - C_{11}(k_m^3 Q_1 + p_n^3 Q_2)],
\end{aligned}$$

а  $\zeta_{mn}^* = \frac{\zeta_{mn}}{2\rho_1}$  – коефіцієнт демпфування.

Враховуючи, що механічне навантаження і значення електричного потенціалу є періодичними функціями часу, для розв'язання рівняння (3.10) можна використати метод, що описано у §2.

#### §4. Аналіз чисельних результатів.

Апробація розробленої методики проведена шляхом порівняння чисельних результатів, які отримані на основі аналітично-числового методу (АЧМ) та методу скінченних елементів (МСЕ).

Як приклад розглянуто задачу для тришарової шарнірно опертої циліндричної панелі постійної товщини з середнім пасивним в'язкопружним шаром при дії на неї рівномірно розподіленого механічного тиску  $P_z = P_0 \cos \Omega t$ . Зовнішні шари оболонки мають однакову товщину і виготовлені з п'єзоелектричного матеріалу. На електродованих поверхнях панелі підтримується нульове значення потенціалу.

Геометрія панелі та умови її навантаження характеризуються такими значеннями параметрів:  $H = 0,001 \text{ м}$ ,  $h_1 = h_3 = 0,00025 \text{ м}$ ,  $h_2 = 0,0005 \text{ м}$ ,  $R = 0,1 \text{ м}$ ,  $a = L = 0,1 \text{ м}$ ,  $b = R \cdot \theta = 0,1 \text{ м}$ ,  $P_0 = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Середній шар виготовлено з алюмінію з наступними характеристиками:  $E = 7,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$  (модуль Юнга),  $\nu = 0,34$  (коефіцієнт Пуассона),  $\rho = 0,28 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$ .

П'єзоелектричні шари мають такі фізико-механічні властивості [25]:

$$\begin{aligned} s_{11}^E &= 0,171 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}; & s_{12}^E &= -0,58 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}; & s_{13}^E &= -0,91 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}; \\ s_{33}^E &= 0,184 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}; & s_{55}^E &= 0,460 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}; & d_{31} &= -189,7 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \\ d_{33} &= 357 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; & d_{15} &= 609 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; & \varepsilon_{11}^T &= 0,20541 \cdot 10^{-7} \text{ Ф/м}; \\ \varepsilon_{33}^T &= 0,14803 \cdot 10^{-7} \text{ Ф/м}; & \rho &= 0,75 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Перехід від заданих вище параметрів  $s_{ij}^E$ ,  $d_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^T$  до фізико-механічних характеристик  $c_{ij}^E$ ,  $e_{ij}$ ,  $\mu_{ij}^S$ , для PZT (EC-65) здійснено на основі відомих формул перетворення [6].

Середнє значення коефіцієнта демпфування залежить від фізико-механічних характеристик шарів і змінюється в межах  $0,0001 \div 0,1$ . Далі будемо позначати коефіцієнт демпфування для першої моди через  $\zeta$  ( $n = m = 1$ ).

При розв'язанні задачі з використанням МСЕ чверть поверхні оболонки розбивали на 25 чотирикутних скінченних елементів з 456-ма вузловими точками.

У цій роботі представлені результати обчислень модуля амплітуди прогину для серединної точки панелі  $(a/2, b/2)$ , тобто по суті модуля максимального значення амплітуди прогину, в околі першої резонансної частоти. На рис. 2 – 4 та в табл. 1, 2 введено позначення  $\tilde{\Omega} = \Omega \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}$ ,  $\tilde{w} = |w(a/2, b/2)| \cdot 10^3 \text{ м}$ .

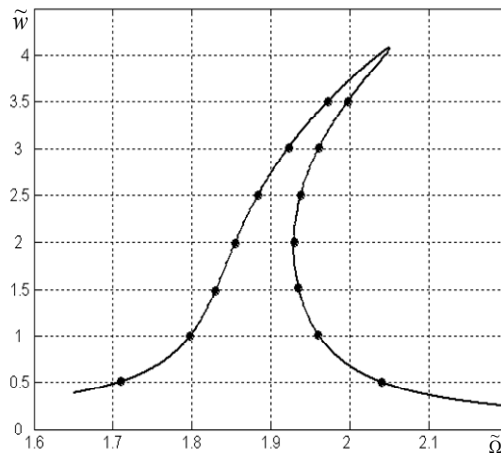


Рис. 2

На рис. 2 показано характер зміни  $\tilde{w}$  в околі першої резонансної частоти  $\omega_1 = 1,88186 \cdot 10^4$  рад/с при коефіцієнті демпфування для першої моди  $\zeta = 0,01$ . Суцільна лінія відповідає розв'язку задачі, який отримано на основі АЧМ, а маркерами позначено результати, що одержано з використанням МСЕ. Для порівняння у табл. 1 для виділених на рис. 2 точок представлено чисельні результати, що розраховано на основі вказаних методів.

Таблиця 1

$\tilde{\Omega}$	$\tilde{w}$ (АЧМ)	$\tilde{w}$ (МСЕ)
1,7100	0,508380	0,508759
1,7980	1,00295	1,00335
1,8300	1,49076	1,48853
1,8550	2,00123	1,99542
1,8840	2,50813	2,50112
1,9230	3,01676	3,01013
1,9730	3,51145	3,50566
2,0470	4,06551	4,06156
1,9980	3,51218	3,50500
1,9610	3,01120	3,00205
1,9380	2,51375	2,50030
1,9294	2,06401	2,00594
1,9350	1,51319	1,51658
1,9600	1,01169	1,01086
2,0410	0,499339	0,498758

Аналіз даних, які представлено у табл. 1, показує, що модулі максимальних значень амплітуд прогинів, які отримано на основі двох запропонованих підходів, відрізняються не більше, ніж на 0,2%. Для цієї ж задачі на рис. 3 показано значення  $\tilde{w}$  в околі першої резонансної частоти при різних коефіцієнтах демпфування:  $\zeta = 0,025$  (пунктирна крива),  $\zeta = 0,01$  (суцільна крива),  $\zeta = 0,005$  (штрих-пунктирна крива). На цьому рисунку наведено результати обчислень, які проводилися на основі АЧМ.

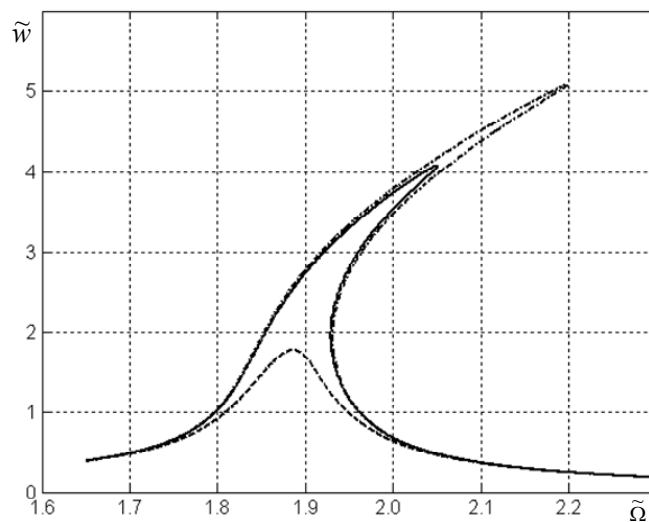


Рис. 3

Для оцінки точності запропонованого методу дослідження нелінійних поперечних коливань тонкостінних елементів при електричному навантаженні виконано розрахунки коливань зазначеної панелі, коли на зовнішніх електродованих поверхнях підтримується значення потенціалу  $V_0 = V_3 = 120\text{В}$  і нульові значення на внутрішньому електроді. Вважаємо, що товщина поляризація п'єзоелектричних шарів є однаковою. Таке навантаження дозволяє збуджувати поперечні коливання панелі.

У табл. 2 для порівняння наведено результати для окремих точок, що одержано на основі двох запропонованих підходів при  $\zeta = 0,00075$ . Аналіз даних, які представлені в табл. 2, показує, що значення  $\tilde{w}$ , які отримано на основі двох запропонованих підходів у разі електричного навантаження, відрізняються не більше ніж на 3% для окремих точок кривої.

Таблиця 2

$\tilde{\Omega}$	$\tilde{w}$ (АЧМ)	$\tilde{w}$ (МСЕ)
1,860	0,114682	0,115615
1,870	0,210962	0,214246
1,880	1,15470	1,15715
1,885	1,64319	1,63470
1,885	1,53405	1,52312
1,885	0,634156	0,615358
1,890	0,295857	0,289481
1,900	0,136152	0,134595

Таким чином, зіставлення результатів, які отримано на основі МСЕ, з аналітично-числовим розв'язком показало високу ефективність і точність запропонованого варіанту МСЕ при дослідженні нелінійних коливань тонкостінних циліндричних панелей з інтегрованими п'єзоелектричними шарами як для механічного, так і електричного навантажень.

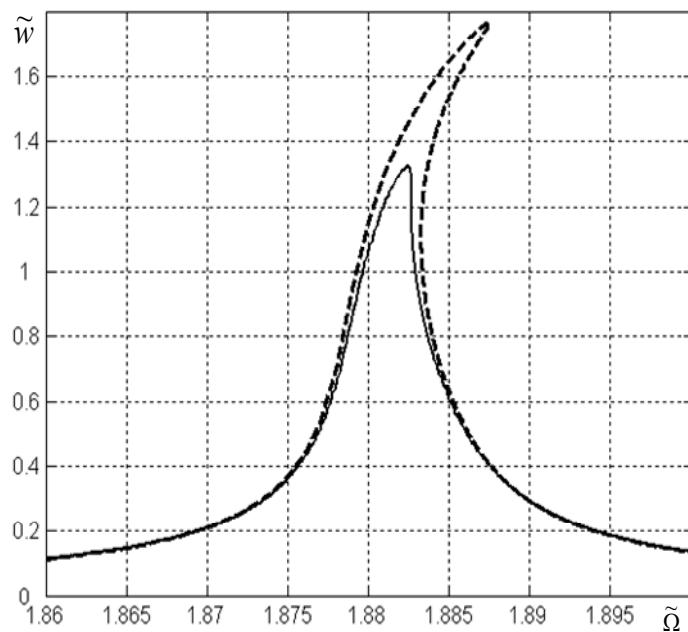


Рис. 4



На рис. 4 представлено частотні залежності  $\bar{w}$  в околі першої резонансної частоти при різних коефіцієнтах демпфування:  $\zeta = 0,001$  (суцільна крива),  $\zeta = 0,00075$  (пунктирна крива) у випадку зазначеного вище електричного навантаження. На цьому рисунку наведено результати обчислень, які проводилися на основі АЧМ.

За запропонованою чисельною методикою на основі МСЕ отримано розв'язок нелінійної задачі для наведеної вище циліндричної панелі при дії на неї рівномірно розподіленого механічного тиску  $P_z = P_0 \cos \Omega t$  з  $P_0 = 0,1 \cdot 10^6$  Па, коли бічні торці  $\varphi = 0$  і  $\varphi = \pi/3$  жорстко затиснені, а торці  $s = 0$  та  $s = 0,1$  вільні від зовнішнього навантаження. Для цього випадку отримати розв'язок задачі на основі аналітичного підходу складно.

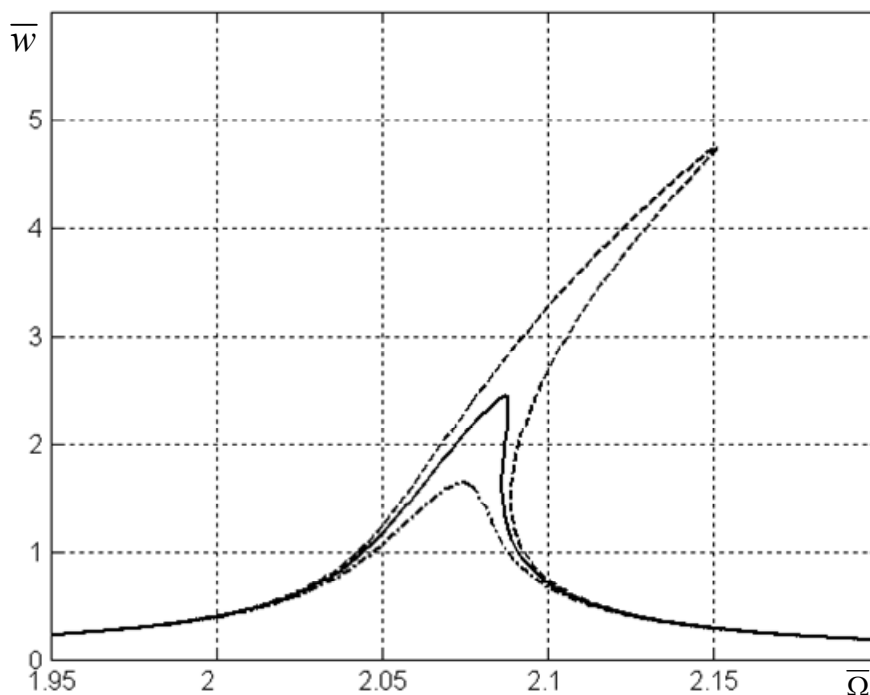


Рис. 5

На рис. 5 введено позначення  $\bar{\Omega} = \Omega \cdot 10^{-4}$  рад/с,  $\bar{w} = |w(a/2, b/2)| \cdot 10^4$  м. Тут представлено амплітудно-частотні характеристики в околі першої резонансної частоти  $\omega_1 = 2,0639 \cdot 10^4$  рад/с при різних коефіцієнтах демпфування для першої моди коливань:  $\zeta = 0,005$  (суцільна крива);  $\zeta = 0,0025$  (пунктирна крива);  $\zeta = 0,0075$  (штрихпунктирна крива).

#### Висновок.

Розроблено чисельно-аналітичну методику дослідження вимушених геометрично нелінійних коливань тонких шаруватих в'язкопружних п'єзоелектричних оболонок обертання і оболонкових конструктивних елементів при різних типах граничних умов. В основі запропонованого підходу лежить використання методу скінченних елементів у варіаційній постановці і представлення розв'язку отриманого матричного рівняння руху через власні функції відповідної електропружної задачі. Це дозволяє звести матричне рівняння руху до звичайного диференціального рівняння другого порядку з нелінійними квадратичним і кубічним членами. Використовуючи метод гармонічної лінеаризації, отримано наближений аналітичний розв'язок цього нелінійного рівняння.

Детально досліджено вплив в'язкопружних властивостей матеріалу на амплітудно-частотні характеристики прогину в околі основного резонансу для тришарової циліндричної панелі при різних граничних умовах.

Надалі доцільно поширити описану методика для випадку товстостінних п'єзоелектричних оболонок обертання, використовуючи уточнені теорії, що враховують деформації поперечного зсуву.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано чисельно-аналітичну методика дослідження геометрично нелінійних коливань тонких оболонок обертання з п'єзоелектричними шарами, яка базується на використанні методу кінцевих елементів та методу гармонічної лінеаризації. Представлено результати чисельного моделювання для циліндричної панелі, що складається з однакових зовнішніх п'єзоелектричних шарів і внутрішнього пасивного в'язкопружного шару і детально досліджено поведінку прогину в околі першого резонансу при різних коефіцієнтах демпфування.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** вимушені коливання, геометрична нелінійність, п'єзоелектричний шар, оболонка обертання, метод скінченних елементів.

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – Київ: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
2. *Будак В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В.* Нелинейные магнитоупругие оболочки. – Николаев: Иллион, 2016. – 136 с.
3. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Пер. с англ. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – Москва: Мир. – 1975. – 541 с.
5. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
6. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Выща шк., 1989. – 208 с.
7. *Механика связанных полей в элементах конструкций* (под ред. Гузя А.Н.): в 5-ти томах. Т.4. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с.
8. *Alijani F., Amabili M.* Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013 // *Int. J. of Non-Linear Mechanics*. – 2014. – **58**, N 1. – P. 233 – 257.
9. *Allahkarami F., Saryazdi M.G., Nikkha-Bahrami M.* Nonlinear Forced Vibration of Curved Microbeam Resting on Nonlinear Foundation Using the Modified Strain Gradient Theory // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 6. – P. 718 – 738.
10. *Amabili M., Paidoussis M.P.* Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid structure interaction // *Appl. Mech. Reviews*. – 2003. – **56**, N 4. – P. 349 – 381.
11. *Amabili M.* Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials. – New York: Cambridge University Press, 2018. – 582 p.
12. *Bathe K.J.* Finite Element Procedures. 2nd ed. – Watertown, MA: K.J. Bathe, 2016. – 1068 p.
13. *Bhimaraddi A., Carr A.J., Moss P.J.* A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution // *Computers & Struct.* – 1989. – **31**, N 3. – P. 299 – 308.
14. *Chróscielewski J., Schmidt R., Eremeyev V.A.* Nonlinear finite element modeling of vibration control of plane rod-type structural members with integrated piezoelectric patches // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. – 2019. – **31**, N 1. – P. 147 – 188.
15. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I.* Thermomechanics of Inelastic Thin-Walled Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (review) // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 1. – P. 6 – 58.

16. Kirichok I.F., Chernyushok O.A. Forced Vibration and Self-Heating of a Flexible Viscoelastic Beam with Piezoelectric Sensor and Actuator with Account of Shear Strain // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 5. – P. 568 – 576.
17. Kozlov V.I., Karnaukhova T.V., Peresun'ko M.V. Numerical modeling of the active damping of forced thermomechanical resonance vibrations of viscoelastic shells of revolution with the help of piezoelectric inclusions // *J. Math. Sci.* – 2010. – **171**, N 5. – P. 565 – 578.
18. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Nonlinear Problems of the Vibration of Thin Shells (review) // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 8. – P. 703 – 728.
19. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (review) // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 1. – P. 12 – 63.
20. Liu C.J., Zheng Z.L., Yang X.Y., Guo J.J. Geometric Nonlinear Vibration Analysis for Pretensioned Rectangular Orthotropic Membrane // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 1. – P. 104 – 119.
21. Moita J.M.S., Soares C.M.M., Soares C.A.M. Geometrically non-linear analysis of composite structures with integrated piezoelectric sensors and actuators // *Composite Struct.* – 2002. – **57**, N 1 – 4. – P. 253 – 261.
22. Mol'chenko L.V., Loos I.I. Thermomagnetoelastic Deformation of a Flexible Orthotropic Conical Shell with Electrical Conductivity and Joule Heat Taken into Account // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 5. – P. 534 – 543.
23. Mol'chenko L.V., Loos I.I., Vasil'eva L.Y. et al. Magnetoelastic Deformation of Isotropic Variable-Stiffness Shells of Revolution: Allowing for Joule Heat and Geometrical Nonlinearity // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 2. – P. 198 – 207.
24. Rao M.N., Schmidt R., Schröder K.U. Static and dynamic FE analysis of piezolaminated composite shells considering electric field nonlinearity under thermo-electro-mechanical loads // *Acta Mechanica.* – 2018. – **229**, N 12. – P. 5093 – 5120.
25. Sabat R.G., Mukherjee B., Ren W., Yung G. Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // *J. Appl. Phys.* – 2007. – **101**, N 6. – P. 064111 – 1 – 7.
26. Zhang S., Zhao G., Rao M.N., Schmidt R., Yu Y. A review on modeling techniques of piezoelectric integrated plates and shells // *J. of Intelligent Material Systems and Struct.* – 2019. – **30**, N 8. – P. 1133 – 1147.

Надійшла 05.11.2019

Затверджена до друку 15.12.2020