

Л.В.Мольченко¹, **І.І.Лоос**²

**МАГНІТОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ГНУЧКОЇ ОРТОТРОПНОЇ
КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ З ОРТОТРОПНОЮ ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЮ
ТА ДЖОУЛЕВИМ ТЕПЛОМ**

*Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського,
бул. Никольська, 24, 54030, Миколаїв, Україна;
e-mail: ¹l.molchenko@gmail.com, ²Loiri@ukr.net*

Abstract. The construction and method of solving the nonlinear equations of thermomagnetic elasticity of flexible orthotropic shells of revolution are presented with taking into account the orthotropic electrical conductivity and Joule heating. An analysis of the thermomagnetic elasticity of a flexible orthotropic circular plate in an axisymmetric statement.

Key words: circular plate, magnetoelasticity, geometric nonlinearity, orthotropy, Joule heat.

Вступ.

Дія змінних магнітних полів на металеві пружні елементи викликає появу об'ємних електродинамічних сил та джоулевого тепла, які при відповідних параметрах полів викликають великі деформації конструкцій [8, 11, 13, 14, 16 – 18, 23, 24]. Відмітимо, що урахування пондеромоторних сил та джоулевого тепла є визначаючими в зв'язаних задачах магнітопружності.

Аналіз фізико-механічних процесів при електромагнітній взаємодії включає рівняння руху пружного тіла та рівняння електродинаміки для області тіла (внутрішня задача), а також рівняння електродинаміки для вакууму (зовнішня задача).

Розвиток сучасної техніки, експлуатація якої пов'язана зі взаємодією різних фізичних факторів, обумовлює необхідність створення і розробки наближених теорій спряжених полів гнучких ортотропних оболонок. Побудову спрощених моделей можливо проводити, відкидаючи в більш «точних» моделях другорядні ефекти, наприклад, при переході від тривимірних теорій до двовимірних або одновимірних. Однак, в багатьох випадках теорії гнучких оболонок, проблема оцінки другорядних членів, якими можна знехтувати в рівняннях, доволі складна. Ціль досліджень полягає в оцінці, з точки зору тривимірних моделей, точності різноманітних нелінійних двовимірних моделей, число яких в застосуваннях велике. Необхідно мати на увазі, що природа об'єктів і процесів ніколи в усіх деталях невідома, тому немає абсолютно точних загальних теорій, які можна було б спрощувати стосовно до всіх конкретних задач.

В даній роботі розглянуто двовимірний варіант теорії гнучких скінченнопровідних ортотропних оболонок в мікросекундному діапазоні при дії нестаціонарних магнітних полів. Рівняння руху оболонки при урахуванні пондеромоторних сил отримано за допомогою принципу віртуальних переміщень при використанні гіпотез Кірхгофа – Лява. Наближені рівняння електродинаміки і відповідні їм граничні умови отримано шляхом введення деяких гіпотез про характер розподілу електромагнітного поля за товщиною гнучкої оболонки, близьких за змістом до гіпотез магнітопружності тонких тіл [1 – 4, 6, 7, 9, 15, 19 – 22].

До розв'язання таких доволі складних задач в даний час можливо підійти лише чисельно, якраз з таких позицій і дається формулювання основних розв'язувальних рівнянь механіки і електродинаміки ортотропних оболонок обертання змінної жорсткості з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла. Отримані рівняння записано в ортогональних криволінійних координатах з використанням теорії скінчених деформацій в лагранжевих змінних, як в рівняннях механіки, так і в електродинамічній групі рівнянь.

1. Двовимірні рівняння магнітопружності гнучких ортотропних оболонок обертання в нестационарному магнітному полі.

Розглянемо гнучкі ортотропні оболонки, які знаходяться під дією нестационарних поверхневих і контурних силових та нестационарних електромагнітних навантажень. Припускаємо, що матеріал оболонки підлягає узагальненому загону Гука. Вважаємо, що геометричні та механічні характеристики оболонки, методи її закріплення такі, що для описання процесу деформування можливо застосовувати варіант геометрично-нелінійної теорії тонких оболонок в квадратичному наближенні. Серединну поверхню оболонки в недеформованому стані віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат (s, θ) , де s – довжина меридіану; θ – центральний кут у паралельному колі (рис. 1)

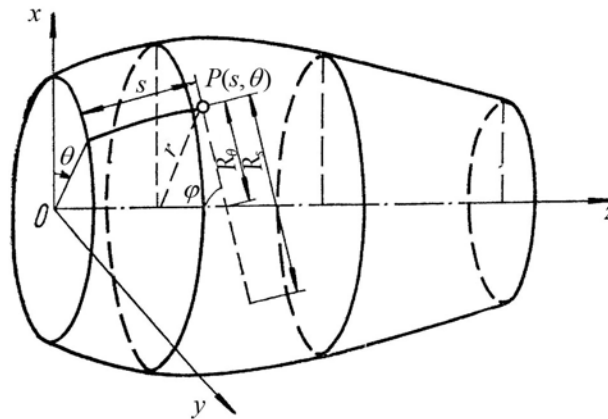


Рис. 1

Координатні лінії $s = \text{const}$ і $\theta = \text{const}$ є лініями головних кривизн серединної поверхні. Відраховуючи координату γ по нормалі до координатної поверхні обертання, віднесемо оболонку до ортогональної криволінійної просторової системи координат (s, θ, γ) .

Запишемо першу квадратичну форму серединної поверхні оболонки обертання у канонічному вигляді: $dS^2 = ds^2 + r^2 d\theta^2$, звідки видно, що коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні обертання в канонічному вигляді будуть $A = 1, B = r$.

Геометричні співвідношення Кодацці – Гаусса приймуть вигляд $dr / ds = \cos \varphi$, де φ – кут між віссю обертання і нормаллю до поверхні оболонки, а також має місце співвідношення $R_\theta \sin \varphi = r$ (R_θ – головний радіус кривизни).

У сучасних технологіях усе частіше використовуються конструкційні матеріали [12], які в недеформованому стані уже є анізотропними. Відмітимо, що пропонувану теорію нелінійної магнітопружності оболонок розроблено для пара- і діаманітних речовин. До таких речовин відносять берилій, бороалюміній, вольфрам, кадмій, цинк та багато інших. Поряд з анізотропією матеріалу вони володіють анізотропією електропровідності та температури. Всі ці матеріали мають монокристалічну будову. Монокристал – це однорідна анізотропна речовина, в усьому об'ємі якої атоми розташо-

вані регулярно, так що вся речовина складається із однакових кристалічних комірок, які періодично повторюються. Кристали в загальному випадку анізотропні по відношенню до електропровідності. Процес переносу струму в анізотропному кристалічному тілі підлягає узагальненому закону Ома. Вони характеризуються симетричними тензорами другого рангу електричної провідності σ_{ij} , магнітної проникності μ_{ij} та діелектричної проникності ε_{ij} .

Таким чином, як і довільні симетричні тензори другого рангу, тензори ε_{ij} , μ_{ij} та σ_{ij} шляхом відповідного вибору осей координат можуть бути приведені до діагонального вигляду. У загальному випадку тензори ε_{ij} , μ_{ij} та σ_{ij} визначаються трьома незалежними величинами – трьома головними значеннями. В залежності від тієї чи іншої симетрії кристалу число відмінних головних значень тензорів, що розглядаються, може бути і менше трьох.

Відмітимо також, що діелектричні та магнітні властивості пружного тіла змінюються не тільки при зміні його густини, але і при деформаціях, які не змінюють густину (зсувах). Деформація порушує ізотропію тіла, в результаті стають анізотропними також і його діелектричні та магнітні властивості, а скалярні діелектрична і магнітна проникності ε та μ замінюються діелектричними та магнітними тензорами ε_{ij} і μ_{ij} .

Таким чином, матеріальні співвідношення електродинаміки, узагальнений закон Ома та вираз пондеромоторних сил запишемо, відповідно, у вигляді

$$\vec{B} = \mu_{ij}\vec{H}; \vec{D} = \varepsilon_{ij}\vec{E}; \vec{J} = \sigma_{ij}(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}); \rho\vec{F}^\wedge = \sigma_{ij}(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{J}_{cm} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Тут \vec{J} – густина електричного струму; \vec{J}_{cm} – густина стороннього електричного струму; \vec{E} – напруженість електричного поля; \vec{H} – напруженість магнітного поля; \vec{B} – магнітна індукція; \vec{D} – електрична індукція; $\rho\vec{F}^\wedge$ – сила Лоренца; \vec{V} – швидкість деформування.

При побудові двовимірного варіанту рівнянь магнітопружності пружних ортотропних оболонок обертання скористаємося принципом віртуальних переміщень з застосуванням гіпотез Кірхгофа – Лява та електромагнітних гіпотез [4, 6, 20].

$$E_1 = E_1(s, \theta, t); E_2 = E_2(s, \theta, t); J_1 = J_1(s, \theta, t); J_2 = J_2(s, \theta, t); J_3 = 0;$$

$$H_1 = \frac{1}{2}(H_1^+ + H_1^-) + \frac{\gamma}{h}(H_1^+ - H_1^-); H_2 = \frac{1}{2}(H_2^+ + H_2^-) + \frac{\gamma}{h}(H_2^+ - H_2^-); H_3 = H_3(s, \theta, t).$$

Тут E_1, E_2 – компоненти напруженості електричного поля; J_1, J_2, J_3 – компоненти густини електричного струму; H_1, H_2, H_3 – компоненти напруженості магнітного поля; H_1^\pm, H_2^\pm – відомі компоненти напруженості магнітного поля на поверхнях оболонки; $h = h(s, \theta)$ – товщина оболонки.

Відмітимо, що при отриманні двовимірних співвідношень будемо нехтувати змінною густини тіла. Це спрощення не суперечить тому, що припускаючи скінченні деформації, вони можуть реалізуватись в металевих оболонках тільки при розвинутій пластичній течії.

Із загальних рівнянь магнітопружності гнучких ортотропних оболонок обертання [1, 6, 7] і складових сили Лоренца (1) отримуємо вихідні співвідношення гнучких оболонок обертання, які знаходяться в магнітному полі – рівняння магнітопружності:

$$\frac{\partial}{\partial s}(rN_s) - \cos\varphi N_\theta + \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{r}{R_s} Q_s + r(P_s + \rho F_s^\wedge) = r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 S) + \frac{\partial}{\partial s} (\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_s} H + \sin \varphi Q_\theta + r (P_\theta + \rho F_\theta^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial}{\partial s} (r Q_s) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{r}{R_s} N_s - \sin \varphi N_\theta + r (P_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial s} (r M_s) - \cos \varphi M_\theta - r Q_\theta - r \left(N_s - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta \right) \mathcal{G}_s - r S \mathcal{G}_\theta &= 0; \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - r Q_\theta - r \left(N_\theta - \frac{1}{R_s} M_s \right) \mathcal{G}_\theta - r S \mathcal{G}_s &= 0; \\
-\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_s}{\partial \theta} \right); \\
\sigma_1 \left[E_s - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma - 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \theta} + \frac{H_\theta^+ - H_\theta^-}{h}; \\
\sigma_2 \left[E_\theta - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] &= -\frac{\partial H_\gamma}{\partial s} + \frac{H_s^+ - H_s^-}{h};
\end{aligned} \tag{2}$$

вираз деформацій через переміщення:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ss} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w + \frac{1}{2} \mathcal{G}_\theta^2; \\
\varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{r} \right) + \mathcal{G}_s \mathcal{G}_\theta; \quad \chi_{ss} = \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s}; \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \\
\chi_{s\theta} &= \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_\theta + \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right) + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial s},
\end{aligned} \tag{3}$$

де $\mathcal{G}_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s}$; $\mathcal{G}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} v$ – кути повороту нормалі;

співвідношення пружності:

$$\begin{aligned}
N_s &= \frac{e_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta} [\varepsilon_{ss} + \nu_\theta \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu_s) \varepsilon_T]; \quad N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta} [\varepsilon_{\theta\theta} + \nu_s \varepsilon_{ss} - (1 + \nu_\theta) \varepsilon_T]; \\
S &= \frac{e_s h}{2(1 + \nu_\theta)} \varepsilon_{s\theta}; \quad H = \frac{e_\theta h^3}{12(1 + \nu_s)} \chi_{s\theta}; \\
M_s &= \frac{e_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} [\chi_{ss} + \nu_\theta \chi_{\theta\theta} - (1 + \nu_s) \chi_T]; \\
M_\theta &= \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} [\chi_{\theta\theta} + \nu_s \chi_{ss} - (1 + \nu_\theta) \chi_T];
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\nu_s = \nu_{\theta s}; \quad \nu_\theta = \nu_{s\theta}; \quad e_s \nu_\theta = e_\theta \nu_s.$$

Також

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) d\gamma; \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) \gamma d\gamma,$$

де ε_T, χ_T – інтегральні характеристики температурного поля; R_s – головний радіус кривизни; α – коефіцієнт лінійного температурного розширення; $T(s, \theta, \gamma, t)$ – джоулева температура оболонки.

Складові сили Лоренца $\rho \vec{F}^\wedge$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \rho F_s^\wedge &= h J_{\theta cm} B_\gamma + \sigma_1 h E_\theta B_\gamma + \sigma_1 h \left\{ 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25 (B_s^+ + B_s^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] \right\}; \\ \rho F_\theta^\wedge &= -h J_{scm} B_\gamma - \frac{h}{r\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} B_\gamma + \\ &\quad + \sigma_2 h \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25 (B_s^+ + B_s^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] \right\} - \frac{B_\theta^+ - B_\theta^-}{\mu} B_\gamma; \quad (5) \\ \rho F_\gamma^\wedge &= 0,5 h \left[J_{scm} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - J_{\theta cm} (B_s^+ + B_s^-) \right] + \frac{h}{2r\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \\ &\quad - 0,5 \sigma_2 h E_\theta (B_s^+ + B_s^-) + \sigma_2 h \left\{ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma - \frac{\partial w}{\partial t} \left[0,25 (B_s^+ + B_s^-)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-)^2 \right] \right\} + \frac{B_\theta^{+2} - B_\theta^{-2}}{\mu}. \end{aligned}$$

До отриманих рівнянь необхідно приєднати початкові та граничні умови. Тут N_s, N_θ – нормальні тангенціальні зусилля; S – зсувні зусилля; M_s, M_θ – згинальні моменти; H – крутильний момент; Q_s, Q_θ – поперечні зусилля; u, v, w – компоненти вектора переміщень; $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{s\theta}, \chi_{ss}, \chi_{\theta\theta}, \chi_{s\theta}$ – компоненти тензора деформацій; P_s, P_θ, P_γ – складові механічної сили; e_s, e_θ – модулі Юнга; ν_s, ν_θ – коефіцієнти Пуассона; σ_1, σ_2 – ортотропні компоненти тензора електропровідності; μ – коефіцієнт магнітної проникності.

2. Рівняння теплопровідності анізотропних тіл.

У загальному випадку закон Фур'є запишемо у тензорному вигляді [10, 12]:

$$q_i = -\lambda_{ij} \nabla_j T, \quad (i, j = s, \theta, \gamma). \quad (6)$$

Тут q_i – густина теплового потоку; λ_{ij} – тензор теплопровідності.

Тензор теплопровідності λ_{ij} в ортогональній криволінійній системі координат має наступний вигляд:

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{ss} & \lambda_{s\theta} & \lambda_{s\gamma} \\ \lambda_{\theta s} & \lambda_{\theta\theta} & \lambda_{\theta\gamma} \\ \lambda_{\gamma s} & \lambda_{\gamma\theta} & \lambda_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}.$$

Вибором системи координат тензор теплопровідності можна привести до діагонального вигляду:

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}.$$

Рівняння теплопровідності в цьому випадку приймає наступний вигляд:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\lambda_{ss} \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\lambda_{\gamma\gamma} \frac{\partial T}{\partial \gamma} \right) + q_v,$$

або

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_{ss}}{\rho C_v} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \frac{\lambda_{\theta\theta}}{\lambda_{ss}} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\lambda_{\gamma\gamma}}{\lambda_{ss}} \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{q_v}{\rho C_v}.$$

Тут q_v – густина теплового потоку; C_v – питома теплоємність.

Враховуючи позначення $a_{ss} = \lambda_{ss} / \rho C_v$; $K_\theta = \lambda_{\theta\theta} / \lambda_{ss}$; $K_\gamma = \lambda_{\gamma\gamma} / \lambda_{ss}$, рівняння теплопровідності приймає стандартний вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_{ss} \nabla_1^2 T + \frac{q_v}{\rho C_v}, \quad (7)$$

$$\text{де } \nabla_1^2 = \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + K_\theta \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + K_\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2}.$$

Таким чином, рівняння теплопровідності для анізотропної оболонки також приводиться до стандартного вигляду, однак змінюється вигляд оператора Лапласа, в ньому з'являються коефіцієнти анізотропії K_θ , K_γ , які коректують теплопровідність за напрямками.

3. Термодинамічні співвідношення для визначення температури провідних оболонок.

Розглянемо рівняння термодинаміки гнучких провідних оболонок з урахуванням джоулевої температури при дії магнітного поля в мікросекундному діапазоні (перехідний процес) [3, 7, 9, 15, 21, 22].

Густина магнітної енергії на одиницю об'єму запишемо у вигляді функції

$$W = 0,5(\vec{B}\vec{H}),$$

а кількість тепла, яке виділяється струмом \vec{J} за одиницю часу (потужність джоулевого тепла на одиницю маси), визначається виразом

$$\dot{Q}_{дж} = \frac{\vec{J}\vec{E}}{\rho}.$$

Запишемо магнітний тиск P у вигляді суми двох складових

$$P(\rho, T) = P_\chi(\rho) + P_T(\rho, T),$$

де $P_\chi(\rho)$ – складова тиску, яка залежить тільки від густини ρ ; $P_T(\rho, T)$ – теплова складова, яка залежить від температури і густини. Також представимо приріст внутрішньої енергії у вигляді суми «холодної» та теплової складових

$$\rho dU = \rho dU_\chi + \rho dU_T,$$

де

$$\begin{aligned} \rho dU_\chi &= \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik} + 3P_\chi de; \\ \rho dU_T &= 3P_T de + \rho \dot{Q}_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad} T) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут λ_T – коефіцієнт теплопровідності.

Прийmemo далі, що приріст теплової енергії пропорціональний приросту температури, тобто

$$dU_T = C_\varepsilon(T) dT; \quad U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT,$$

де C_ε – питома теплоємність при сталій деформації. Тоді рівняння (8) можемо використовувати для обчислення температури

$$\rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \dot{Q}_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad} T). \quad (9)$$

Враховуючи, що питома теплоємність металів для температур вище T_0 до точки плавлення змінюється неістотно (не більше ніж на 5 – 10 % від середнього значення), теплову енергію можна представити у вигляді

$$U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT \approx C_\varepsilon^{cp} (T - T_0) + U_{T0}; \quad U_{T0} = \int_0^{T_0} C_\varepsilon(T) dT,$$

де C_ε^{cp} – середнє значення теплоємності на інтервалі $[T_0, T]$.

Слідуючи [7], рівняння (9) перетворюється у відоме рівняння теплопровідності з джерелом джоулевого тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_\varepsilon^{cp}} \dot{Q}_{дж} + \alpha_T \nabla^2 T; \quad \alpha_T = \frac{\lambda_T}{\rho C_\varepsilon^{cp}}; \quad \lambda_T = \text{const}, \quad (10)$$

де α_T – коефіцієнт теплової дифузії.

Використовуючи вираз для підрахунку джоулевого тепла, оцінимо величину температури, яка виникає в результаті джоулевого нагріву в залежності від величини магнітної індукції \vec{B} . Використовуючи (8) і рівняння Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \sigma_{ij} \vec{E}$, із теорії розмірності та рівняння (10) маємо

$$\tilde{T} \approx T_0 + \frac{2}{\rho C_\varepsilon^{cp}} \tilde{W} + \frac{\alpha_T}{\alpha_D} \tilde{T}; \quad \tilde{W} = 0,5 \frac{\tilde{B}^2}{\mu}, \quad (11)$$

де $\alpha_D = 1/\sigma_{ij} \mu$ – коефіцієнт магнітної дифузії. За характерний час взято час дифузії магнітного поля на віддаль \tilde{L} , тобто $\tilde{t} = \tilde{L}^2/\alpha_D$. Так як $\alpha_T/\alpha_D \ll 1$ для металів (наприклад, для алюмінію при $T_0 = 20^\circ\text{C}$ – $\alpha_T/\alpha_D \approx 4,3 \cdot 10^{-6}$, для нержавіючої сталі – $\alpha_T/\alpha_D \approx 0,8 \cdot 10^{-5}$), тоді із символічного рівняння (11) випливає, що процесом теплопровідності в перехідному режимі можна знехтувати.

Таким чином, виходячи з оцінки членів рівняння (10) і у відповідності до формули (7), остаточно отримуємо рівняння для визначення величини температури, яка виникає під дією джоулевого нагріву у вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T_0 + \frac{1}{\sigma_{ij} \rho C_\varepsilon^{cp}} Q_{дж} . \quad (12)$$

Як відомо, при дії на оболонку магнітного поля в неї виникають об'ємні сили Лоренца $\rho \vec{F}^\wedge = \vec{J} \times \vec{B}$. Виходячи з рівнянь магнітної енергії оболонки та використовуючи тотожність

$$\vec{A} \times \text{rot } \vec{A} + \vec{A} \nabla \vec{A} = 0,5 \nabla (\vec{A} \vec{A}),$$

вираз для пондеромоторних сил запишемо у вигляді

$$\rho \vec{F}^\wedge = \vec{J} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{H} \times \vec{B} = \vec{B} \nabla \vec{H} - \frac{\partial W}{\partial \xi^k} \vec{G}^k,$$

де $\frac{\partial W}{\partial \xi^k} \vec{G}^k$ – член сили Лоренца, який відповідає джоулевому нагріву оболонки; \vec{G}^k – базовий вектор; ∇ – оператор в лагранжевій метриці; ξ^k – лагранжеві змінні ($k=1, 2, 3$).

Таким чином, вплив джоулевого тепла враховується як в рівняннях магнітопружності, так і для сили Лоренца.

Виходячи з рівняння (12), маємо

$$\frac{h}{2} Q_{дж} dt = \frac{h}{2} \rho C_\varepsilon^{cp} dT_{II} + \lambda_F (T_{II} - T_C) dt , \quad (13)$$

де T_{II} – температура на поверхні оболонки; T_C – температура серединної поверхні оболонки; λ_F – коефіцієнт тепловіддачі.

Виходячи із симетрії задачі для оболонок обертання, на серединній поверхні тепловий потік $q = 0$ при $\gamma = 0$, а на поверхні $-q = Q_{дж} h / 2$ та $T = T_{II}$.

Враховуючи (13), вираз для визначення температури приймає вигляд

$$T = T_C + \frac{Q_{дж} h^2}{8 \lambda_T} \left[1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} - 4 \left(\frac{\gamma}{h} \right)^2 \right] - \frac{\rho h C_\varepsilon^{cp}}{2 \lambda_F} \dot{T}_{II}. \quad (14)$$

Компоненти електричного струму з урахуванням стороннього струму мають вигляд

$$J_s = J_{cm_s} + \sigma_1 \left[E_s + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma \right];$$

$$J_\theta = J_{cm_\theta} + \sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right]; J_\gamma = 0.$$

4. Розв'язувальна система рівнянь осесиметричних ортотропних оболонок обертання з урахуванням ортотропної електропровідності і джоулевого тепла в геометрично-нелінійній постановці.

Приймаючи, що всі компоненти збуреного електромагнітного поля та поля переміщень не залежать від координати θ , покладемо [4, 6]

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; v = 0; S = 0; H = 0; E_s = 0; B_\theta = 0; P_\theta = 0; \rho F_\theta^\wedge = 0.$$

При побудові розв'язувальної системи рівнянь термомагнітопружності ортотропної оболонки обертання вибираємо за шукані функції наступні:

$$u, w, \mathcal{G}_s, N_s, Q_s, M_s, B_\gamma, E_\theta.$$

У цьому випадку розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь термомагнітопружності гнучкої ортотропної оболонки обертання з урахуванням джоулевої температури приймає вигляд [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1-\nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} u - \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} \right) w - \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2 + (1+\nu_s) \varepsilon_T; \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\mathcal{G}_s + \frac{u}{R_s}; \quad \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s} = \frac{12(1-\nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) N_s + e_\theta h \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - \frac{1}{R_s} Q_s - P_s - h J_{\theta cm} B_\gamma - \\ &\quad - \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] - \frac{e_s h \cos \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} \right) N_s + e_\theta h \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - P_\gamma - \\ &\quad - 0,5 h J_{\theta cm} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h \left[-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) \right] + \\ &\quad + \frac{h}{12} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) \left] - \frac{e_s h \sin \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} = \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] + Q_s + N_s \mathcal{G}_s - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\nu_\theta M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] \mathcal{G}_s;$$

$$\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} = -\mu \sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}; \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta.$$

Тут

$$\begin{aligned} \varepsilon_T &= \alpha T_C + \frac{\alpha h^2}{8 \sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma_2^2 \left[E_\theta^2 + 0,25 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_s^+ + B_s^-)^2 + E_\theta \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{\alpha h^2}{8 \sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} \right) \left\{ 2 \sigma_2 J_{\theta cm} \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{cp}}{2 \lambda_F} \dot{T}_{II}; \quad \chi_T = 0. \end{aligned}$$

Розв'язувальна система рівнянь (15) є нелінійною змішаною гіперболо-параболічною системою диференціальних рівнянь восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Для визначення довільностей, які з'являються в загальному розв'язку системи рівнянь (15) після інтегрування, необхідно приєднати граничні умови на контурах оболонки. Крайові умови для функцій, які характеризують механічну частину задачі, задаються так само, як і в теорії оболонок. Крайові умови для електромагнітних параметрів можуть задаватись через компоненти електричного поля або через комбінацію компонент магнітного та електричного полів. Початкові умови задаються в класичному вигляді.

5. Методика розв'язання задач термомагнітопружності гнучких ортотропних оболонок обертання з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевої температури в осесиметричній постановці.

Розв'язання крайових задач магнітопружності ортотропних оболонок обертання з урахуванням джоулевого тепла в нелінійній постановці пов'язано з великими обчислювальними складнощами. Це пояснюється тим, що система (15), яка описує напружено-деформівний стан (НДС) оболонки, є зв'язаною, тобто, складається з рівнянь руху та рівнянь електродинаміки. Крім того, вона є нелінійною змішаною гіперболо-параболічною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Об'ємні сили Лоренца – нелінійні та змінюються зі зміною матеріальної і часової координат.

Запропонований підхід чисельного розв'язання нелінійних задач магнітопружності теорії гнучких оболонок обертання побудований на послідовному застосуванні скінченно-різницевої схеми Ньюмарка [25], методів квазілінеаризації [2] та дискретної ортогоналізації [5].

Представимо розв'язувальну систему рівнянь (15) у векторній формі

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F} \left(s, t, \vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right) \quad (16)$$

з граничними умовами

$$g_1 \vec{N}(s_0, t) = \vec{b}_1; \quad g_2 \vec{N}(s_N, t) = \vec{b}_2$$

та початковими умовами

$$\vec{N} = 0; \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Тут $\vec{N} = \{u, w, \vartheta_s, N_s, Q_s, M_s, E_\theta, B_\gamma\}^T$; \vec{F} – в загальному випадку нелінійна вектор-функція; g_1, g_2 – прямокутні матриці; \vec{b}_1, \vec{b}_2 – відомі вектори.

Для розділення змінних за часом застосовується скінченно-різницева схема Ньюмарка

$$\ddot{u}^{t+\Delta t} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{0,25(\Delta t)^2} - \frac{1}{0,25} \left(\frac{\dot{u}^t}{\Delta t} + 0,25\ddot{u}^t \right); \quad \dot{u}^{t+\Delta t} = \dot{u}^t + 0,5\Delta t (\ddot{u}^t + \ddot{u}^{t+\Delta t}). \quad (17)$$

Застосування цієї схеми дозволяє весь інтервал за часом розділити на скінченні інтервали і відслідкувати НДС на кожному часовому проміжку.

Після застосування схеми Ньюмарка (17), розв'язувальну систему магнітопружності (16) для відповідного часового проміжку можна представити у векторній формі

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{F}_1(s, \vec{N}), \quad (18)$$

де \vec{F}_1 – восьмивимірний вектор.

Граничні умови на контурі $s = \text{const}$ мають вигляд

$$D_1 \vec{N} /_{s=s_0} = \vec{d}_1; \quad D_2 \vec{N} /_{s=s_N}, \quad (19)$$

де D_1, D_2 – відомі прямокутні матриці відповідно порядків $k \times 8$ та $(8-k) \times 8$, ($k < 8$); \vec{d}_1, \vec{d}_2 – задані вектори; k – кількість граничних умов на контурі $s = s_0$.

Розв'язання нелінійних крайових задач методом квазілінеаризації є аналогом методу Ньютона для розв'язку системи нелінійних диференціальних рівнянь у функціональному просторі вектор-функцій шуканих розв'язків поставленої задачі. Проводиться лінеаризація системи диференціальних рівнянь і граничних умов, а також будується ітераційний процес розв'язання нелінійної крайової задачі, для якого задається початкове наближення і на кожному кроці розв'язується лінійна крайова задача.

Таким чином, нелінійна крайова задача (18), (19) зводиться до послідовності лінійних крайових задач

$$\frac{d\vec{N}^{k+1}}{ds} = \vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k); B_1(\vec{N}^k)\vec{N}^{k+1}(s_0) = \vec{b}_1(\vec{N}^k); \quad (20)$$

$$B_2(\vec{N}^k)\vec{N}^{k+1}(s_N) = \vec{b}_2(\vec{N}^k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k – розв'язки відповідно на $(k+1)$ -ій та k -ій ітераціях; $\vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k)$ – вектор правої частини системи рівнянь; $B_1(\vec{N}^k), B_2(\vec{N}^k), \vec{b}_1(\vec{N}^k), \vec{b}_2(\vec{N}^k)$ – відповідно матриці і праві граничні умови.

Після застосування викладених методів лінійна крайова задача (20) розв'язується методом дискретної ортогоналізації [5].

Відмітимо, що на кожному кроці ітераційного процесу коефіцієнти правої частини лінійної системи рівнянь (20), елементи матриць B_1, B_2 та компоненти векторів \vec{b}_1, \vec{b}_2 граничних умов залежать від кількості кроків за матеріальною і часовою змінними, а також від розв'язків лінійної задачі на попередньому кроці, тобто послідовність крайових задач – зв'язана послідовність лінійних задач. На першому кроці за часом за початкове наближення в ітераційному процесі вибираємо розв'язок лінійної задачі. На наступних кроках – розв'язок, отриманий на попередньому кроці, що вже являється розв'язком нелінійної задачі. Вибір такої схеми значно зменшує кількість ітерацій, необхідних при розв'язанні крайової задачі.

Замінюючи похідні за часом скінчено-різницевиими виразами у відповідності до схеми Ньюмарка, необхідно враховувати взаємозв'язок між кроком за часом і кроком інтегрування за змінною s . Для отримання збіжного алгоритму та виконання критерію Куранта, перетворимо систему рівнянь до «масових» координат Лагранжа, тобто введемо заміну $m = \rho s$. Ця процедура дозволяє істотно збільшити крок за часом.

При розв'язанні крайових задач для провідних оболонок необхідно також враховувати обмеження, які накладаються на густину струму та зовнішнє магнітне поле. Ці обмеження пов'язані з джоулевым теплом та значенням критичної сили стороннього електричного струму.

6. Розв'язувальна нелінійна система магнітопружності ортотропної кільцевої пластини з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла в осесиметричній постановці.

Розглянемо осесиметричну нелінійну крайову задачу магнітопружності про НДС кільцевої пластини змінної товщини вздовж радіуса, яка знаходиться під дією нестационарного магнітного поля і механічного навантаження з урахуванням ортотропної електропровідності і джоулевого тепла. Пластина пружна, ортотропна, виготовлена з матеріалу скінченної провідності. Пластина є провідником рівномірно розподіленого стороннього електричного струму густини \vec{J}_{cm} .

Нехай задача магнітостатики для збуреного стану розв'язана, тобто відомі вектори магнітної індукції початкового стану для зовнішньої і внутрішньої областей. За

координатну площину вибираємо серединну площину пластини, віднесена до полярної системи координат r, θ ; координата z відраховується по нормалі до серединної площини пластини (рис. 2).

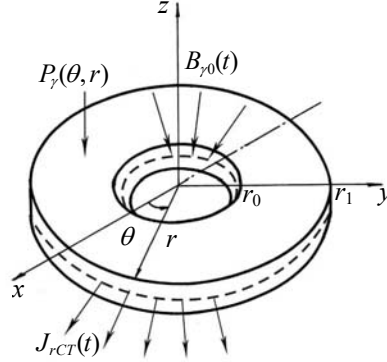


Рис. 2

Для отримання розв'язувальної системи рівнянь ортотропної кільцевої пластини скористаємося системою (15), замінюючи $s = r, \theta = \theta, \gamma = z$. При цьому враховано, що для пластини $\varphi = 0; 1/R_s = 0$.

Розв'язувальна система рівнянь в цьому випадку приймає вигляд

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{(1-\nu_r\nu_\theta)}{e_r h} N_r - \frac{\nu_\theta}{r} u - 0,5\mathcal{G}_r^2 + (1+\nu_r)\varepsilon_T; \\
 \frac{\partial w}{\partial r} &= -\mathcal{G}_r; \quad \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} = \frac{12(1-\nu_r\nu_\theta)}{e_r h^3} M_r - \frac{\nu_\theta}{r} \mathcal{G}_r + (1+\nu_r)\chi_T; \\
 \frac{\partial N_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left[(\nu_\theta - 1)N_r + \frac{e_\theta h}{r} u \right] - \frac{e_r h}{r} \varepsilon_T - P_r - hJ_{\theta cm} B_z - \\
 &\quad - \sigma_1 h \left[E_\theta B_z + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_z (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial Q_r}{\partial r} &= -\frac{1}{r} Q_r - P_z - 0,5hJ_{\theta \ddot{\theta}} (B_r^+ + B_r^-) + \sigma_2 h \left[0,5E_\theta (B_r^+ + B_r^-) + \right. \\
 &\quad \left. + 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ - B_r^-)^2 - 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_z (B_r^+ + B_r^-) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial M_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left[(\nu_\theta - 1) M_r + \frac{e_\theta h^3}{12r} \mathcal{G}_r \right] + Q_r + N_r \mathcal{G}_r; \\
 \frac{\partial B_z}{\partial r} &= -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0,5(B_r^+ + B_r^-) \frac{\partial w}{\partial t} - B_z \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \frac{B_r^+ - B_r^-}{h}; \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{r} E_\theta.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_T &= \alpha T_C + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma_2^2 \left[E_\theta^2 + 0,25 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_r^+ + B_r^-)^2 + E_\theta \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) \right] \right\} + \\
 &\quad + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ 2\sigma_2 J_{\theta cm} \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{\text{op}}}{2\lambda_F} \frac{\partial T_{II}}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

У відповідності до методики розв'язання нелінійної магнітопружної крайової задачі, після застосування схеми Ньюмарка, переходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь термомагнітопружності на кожному часовому кроці. Після застосування методу квазілінеаризації, будеться ітераційний процес розв'язання нелінійної крайової задачі, для якого задається початкове наближення і на кожному часовому кроці розв'язується лінійна крайова задача.

Розв'язувальна система диференціальних рівнянь ортотропної термопружної кільцевої пластини має вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{du^{(k+1)}}{dr} &= \frac{1-\nu_r\nu_\theta}{e_r h} N_r^{(k+1)} + 0,5(\mathcal{G}_r^{(k)})^2 - \mathcal{G}_r^{(k+1)}\mathcal{G}_r^{(k)} - \frac{\nu_\theta}{r} u^{(k+1)} + (1+\nu_r)\varepsilon_T^{(k+1)}; \\
\frac{d\mathcal{W}^{(k+1)}}{dr} &= -\mathcal{G}_r^{(k+1)}; \quad \frac{d\mathcal{G}_r^{(k+1)}}{dr} = \frac{12(1-\nu_r\nu_\theta)}{e_r h^3} M_r^{(k+1)} - \frac{\nu_\theta}{r} \mathcal{G}_r^{(k+1)}; \quad (22) \\
\frac{dN_r}{dr} &= \frac{1}{r} \left[(\nu_\theta - 1)N_r^{(k+1)} - e_\theta h \varepsilon_T^{(k+1)} + \frac{e_\theta h}{r} u^{(k+1)} \right] - P_r^{(k+1)} - hJ_{\theta cm} B_z^{(k+1)} - \\
&\quad - \sigma_1 h \left[-E_\theta^{(k)} B_z^{(k)} + E_\theta^{(k+1)} B_z^{(k)} + E_\theta^{(k)} B_z^{(k+1)} + \right. \\
&\quad \left. + 0,5 \left(-\frac{\partial \mathcal{W}^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{W}^{(k+1)}}{\partial t} B_z^{(k)} + \frac{\partial \mathcal{W}^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k+1)} \right) (B_r^+ + B_r^-) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} (B_z^{(k)})^2 + \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t} (B_z^{(k)})^2 + 2 \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k+1)} B_z^{(k)} \right] + \rho h \frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial t^2}; \\
\frac{dQ_r^{(k+1)}}{dr} &= -\frac{1}{r} Q_r^{(k+1)} - P_z^{(k+1)} - 0,5hJ_{\theta cm} (B_r^+ + B_r^-) + \sigma_2 h \left[0,5E_\theta^{(k+1)} (B_r^+ + B_r^-) + \right. \\
&\quad \left. + 0,25 \frac{\partial \mathcal{W}^{(k+1)}}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial \mathcal{W}^{(k+1)}}{\partial t} (B_r^+ - B_r^-)^2 - 0,5 \left(-\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k)} + \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t} B_z^{(k)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k+1)} \right) (B_r^+ + B_r^-) \right] + \rho h \frac{\partial^2 \mathcal{W}^{(k+1)}}{\partial t^2}; \\
\frac{dM_r^{(k+1)}}{dr} &= \frac{1}{r} \left[(\nu_\theta - 1)M_r^{(k+1)} + \frac{e_\theta h^3}{12r} \mathcal{G}_r^{(k+1)} \right] + N_r^{(k+1)}\mathcal{G}_r^{(k)} + N_r^{(k)}\mathcal{G}_r^{(k+1)} - N_r^{(k)}\mathcal{G}_r^{(k)} + Q_r^{(k+1)}; \\
\frac{dB_z^{(k+1)}}{dr} &= -\sigma_2 \mu \left[E_\theta^{(k+1)} + 0,5(B_r^+ + B_r^-) \frac{\partial \mathcal{W}^{(k+1)}}{\partial t} - B_z^{(k)} \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t} - \right. \\
&\quad \left. - B_z^{(k+1)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + B_z^{(k)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} \right] + \frac{B_r^+ - B_r^-}{h}; \\
\frac{dE_\theta^{(k+1)}}{dr} &= -\frac{\partial B_z^{(k+1)}}{\partial t} - \frac{1}{r} E_\theta^{(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(k+1)} = & \alpha T_c + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma_2^2 \left[-\left(E_\theta^{(k)} \right)^2 + 2E_\theta^{(k+1)} E_\theta^{(k)} - \left(0,25 \left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 0,5 \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right) (B_r^+ + B_r^-)^2 + \left(E_\theta^{(k+1)} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} + E_\theta^{(k)} \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} - E_\theta^{(k)} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right) (B_r^+ + B_r^-) \right] \right\} + \\ & + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ 2\sigma_2 J_{\theta cm} \left[E_\theta^{(k+1)} + 0,5 \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t} B_z^{(k)} - \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k+1)} \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \frac{\partial T_\Pi^{(k+1)}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Похідні за часом на $(k+1)$ -ому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^{t+\Delta t}}{\partial t} \right)^{(k+1)} &= \left[\frac{2(u^{t+\Delta t})}{\Delta t} - \frac{\partial u^t}{\partial t} \right]^{(k+1)}; \quad \left(\frac{\partial T_\Pi^{t+\Delta t}}{\partial t} \right)^{(k+1)} = \left[\frac{2(T_\Pi^{t+\Delta t})}{\Delta t} - \frac{\partial T_\Pi^t}{\partial t} \right]^{(k+1)}; \\ \left(\frac{\partial^2 u^{t+\Delta t}}{\partial t^2} \right)^{(k+1)} &= \left(\frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{0,25(\Delta t)^2} - \frac{1}{0,25\Delta t} \frac{\partial u^t}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^t}{\partial t^2} \right)^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Для отримання похідних за часом на k -ому наближенні необхідно замінити індекс $(k+1)$ на індекс (k) .

7. Числовий приклад.

Розглянемо осесиметричну геометрично-нелінійну крайову задачу термомагнітопружності по визначенню НДС гнучкої ортотропної кільцевої пластини сталої товщини з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла.

Пружна ортотропна пластина виготовлена з металевого композитного матеріалу берилію. Берилій – діамагнетик, кристалографічна структура гексагональна. Через жорсткість, малу масу і стабільність розмірів в широкому температурному діапазоні берилієвий метал використовується для легких конструкційних компонентів в оборонній і аерокосмічній промисловості, на швидкісних літаках, керованих ракетах, космічних апаратах і супутниках. У деяких ракетах з рідким паливом використовували ракетні сопла з чистого берилію.

Припускаємо, що на поверхнях ортотропної пластини відбувається теплообмін за законом Ньютона – Ріхмана з зовнішнім середовищем з температурою 0°C (з коефіцієнтом теплообміну λ_F). Також пластина є провідником стороннього електричного струму \bar{J}_{cm} .

Нехай стаціонарну задачу термомагнітопружності для збуреного стану розв'язано, тобто відомі вектори магнітної індукції початкового стану для внутрішньої та зовнішньої областей.

Розглянемо випадок, коли пластина знаходиться під дією нормальної складової механічної сили $P_z = P_0 \sin \omega t$ Н/м² та зовнішнього електричного струму $J_{\theta cm} = J_0 \sin \omega t$ А/м², де $P_0 = 5 \cdot 10^3; 2 \cdot 10^4$ Н/м²; $J_0 = 3; 5; 7$ МА/м² (ω – кругова частота). Товщина пластини стала $h = 3 \cdot 10^{-4}$ м.

Граничні умови вибрано у наступному вигляді:

$$u = 0; Q_r = -150; M_r = 0; B_z = \pm 0,5 \sin \omega t; r_0 = 0,5;$$

$$u = 0; w = 0; M_r = 0; B_z = \pm 0,5 \sin \omega t; r_1 = 0,9.$$

Параметри пластини і матеріалу вибрані наступні:

$$r_0 = 0,5 \text{ м}; r_1 = 0,9 \text{ м}; \sigma_1 = 27,9 \cdot 10^6 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \sigma_2 = 32,1 \cdot 10^6 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \nu_r = 0,03;$$

$$\nu_\theta = 0,09; e_r = 28,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_\theta = 33,53 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \rho = 2300 \text{ кг/м}^3;$$

$$\omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; B_r^\pm = 0,5 \text{ Т}; C_\varepsilon^{sp} = 1883 \text{ Дж / (кг} \cdot \text{°C)};$$

$$\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/°C}; \lambda_T = 216 \text{ Вт / (м} \cdot \text{°C)}; \lambda_F = 212 \text{ Вт / (м}^2 \cdot \text{°C)}.$$

При розв'язанні крайової задачі скористаємося системою диференціальних рівнянь (22), до якої застосуємо метод дискретної ортогоналізації. Розв'язок задачі отримано на часовому інтервалі $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$, часовий крок інтегрування $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

На рис. 3 представлено розподіл прогину $w(r)$ в безрозмірному вигляді при $J_0 = 5 \text{ МА/м}^2$ в момент часу: $t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ – лінія 1; $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ – лінія 2; $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ – лінія 3. Розглядаються граничні умови на внутрішньому та зовнішньому контурах при $B_z = 0,5 \sin \omega t$. Максимальне нелінійне значення прогину досягається на внутрішньому контурі пластини на лінії 2 та відповідає величині $w/h = 9$. При русі вздовж радіуса до зовнішнього контуру пластини, значення прогину на всіх лініях зменшуються і дорівнює нулю на зовнішньому контурі, що відповідає граничній умові по w .

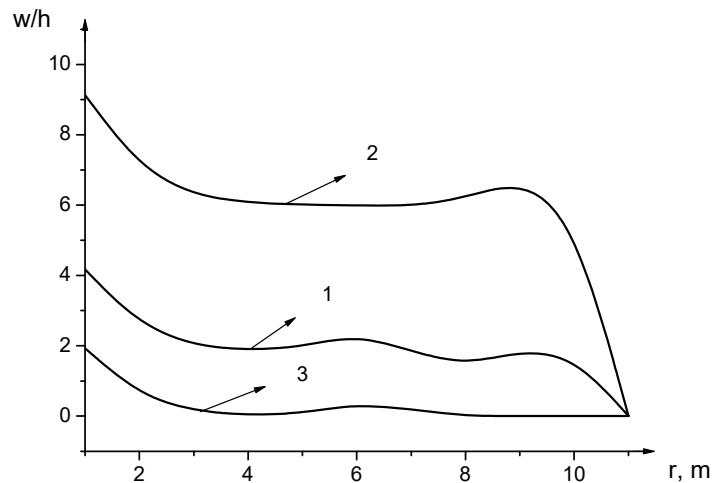


Рис. 3

Рис. 4 представляє зміну джоулевої температури $T(t) \text{ °C}$ в точці $r = 0,90 \text{ м}$ в залежності від $J_0 = 3; 5; 7 \text{ МА/м}^2$ при $P_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$. Нормальна складова магнітної індукції $B_z = 0,5 \sin \omega t \text{ Тл}$ задається на обох контурах пластини. Лінія 1 відповідає величині $J_0 = 3 \text{ МА/м}^2$; лінія 2 – $J_0 = 5 \text{ МА/м}^2$; лінія 3 – $J_0 = 7 \text{ МА/м}^2$. Найбільше значення температури досягається на лінії 1 і приймає максимальне значення $192,10 \text{ °C}$ при $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$. Значення температури на лініях 2, 3 практично співпадають та приймають максимальні значення $140,80 \text{ °C}; 158,04 \text{ °C}$ при $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$.

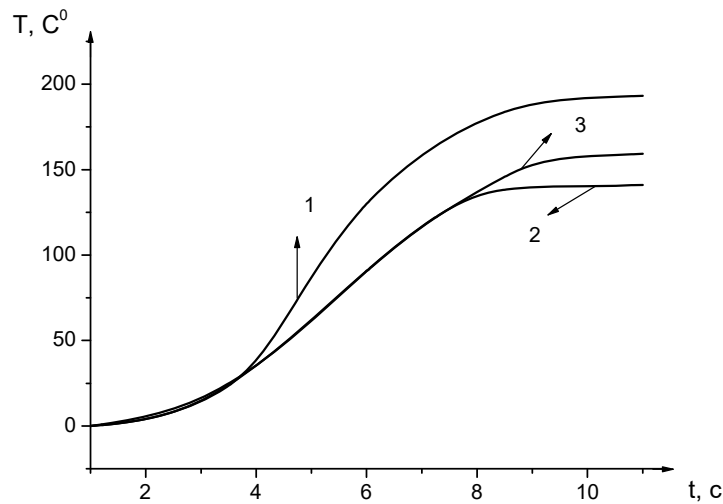


Рис. 4

Рис. 5 ілюструє зміну температури в точці $r = 0,54$ м при вихідних даних, наведених на рис. 4. Максимальне значення температури знаходиться на лінії 1 при $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с і дорівнює $112,58^\circ\text{C}$, що істотно менше максимальної температури на рис. 4. Значення температури на лініях 2, 3 практично співпадають і на кінці часового інтервалу приймають значення $103,47^\circ\text{C}$; $101,43^\circ\text{C}$. У відповідності з результатами, представленими на рис. 4 і 5, можемо оцінити вплив стороннього струму на розподіл джоулевої температури в пластині.

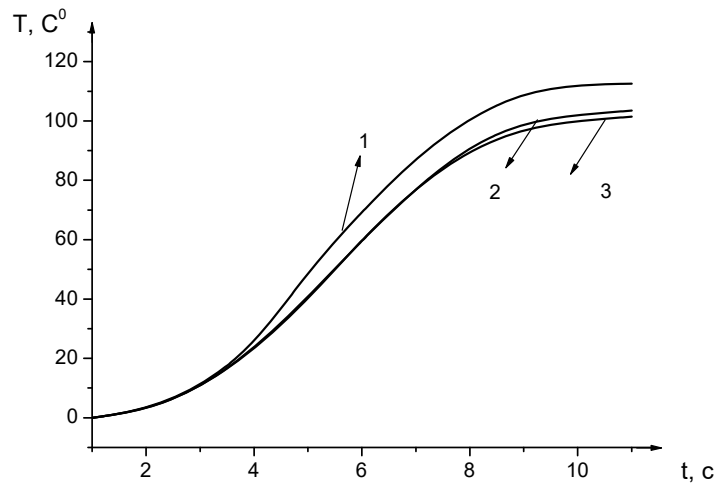


Рис. 5

На рис. 6 показано розподіл нормальної складової сили Лоренца $F_z(r)$ Н/м² при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с в залежності від густини стороннього електричного струму і механічного навантаження $P_0 = 2 \cdot 10^4$ Н/м². Лінія 1 відповідає величині $J_0 = 7$ МА/м²; лінія 2 – $J_0 = 5$ МА/м²; лінія 3 – $J_0 = 3$ МА/м². Граничні умови $B_z = 0,5 \sin \omega t$ Тл. Максимальне значення сили Лоренца досягається на лінії 1 на зовнішньому контурі пластини. Значення нормальної складової сили Лоренца на лініях 2 і 3 відрізняються неістотно.

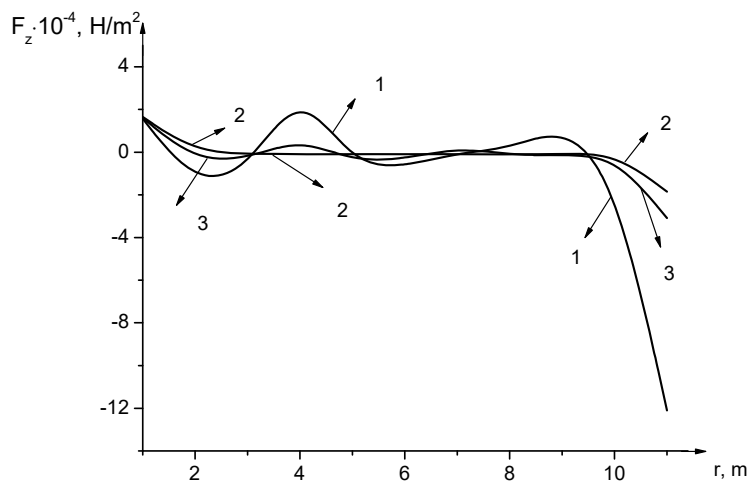


Рис. 6

Рис. 7 представляє безрозмірний прогин вздовж радіуса в залежності від стороннього електричного струму при $t = 5 \cdot 10^{-1}$ с; механічного навантаження $P_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ H/m}^2$. Нормальна складова магнітної індукції на контурах пластини $B_z = 0,5 \sin \omega t$ Тл. Лінія 1 відповідає величині $J_0 = 3 \text{ MA/m}^2$; лінія 2 – $J_0 = 5 \text{ MA/m}^2$; лінія 3 – $J_0 = 7 \text{ MA/m}^2$. Зменшення механічного навантаження пластини істотно змінює розподіл прогину вздовж радіуса. Це відслідковується при порівнянні результатів рис. 1 та даного.

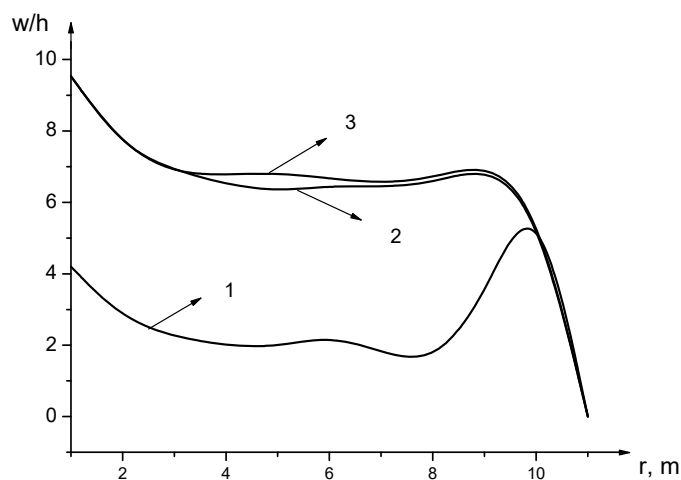


Рис. 7

Рис. 8 ілюструє розподіл нормальної складової магнітної індукції вздовж радіуса пластини в момент часу $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с; густини стороннього струму $J_0 = 3 \text{ MA/m}^2$. Пластину завантажена механічною силою $P_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ H/m}^2$ при граничних умовах на внутрішньому і зовнішньому контурах пластини: 1) $B_z = 0,5 \sin \omega t$ Тл; 2) $B_z = -0,5 \sin \omega t$ Тл. Лінія 1 відповідає граничній умові 2; 2 – граничній умові 1. Відмітимо, що значення магнітної індукції симетричні відносно осі абсцис, змінюються в залежності від граничних умов і практично не залежать від механічного навантаження.

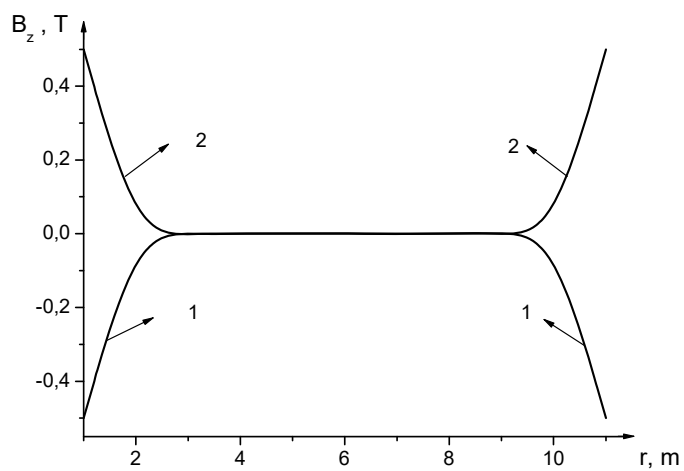


Рис. 8

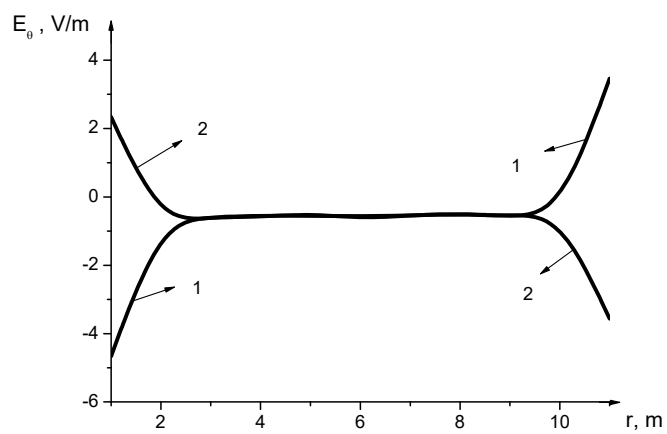


Рис. 9

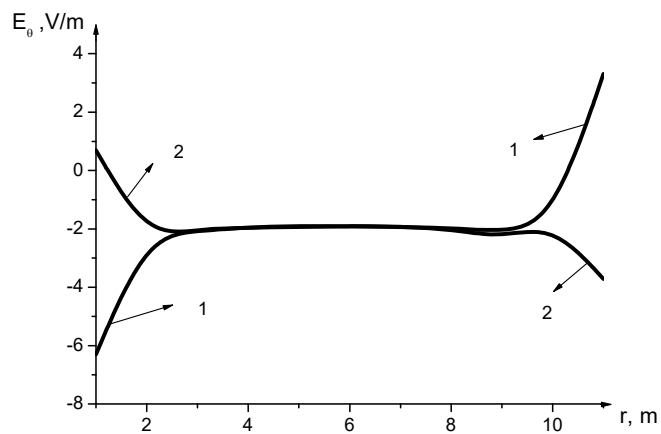


Рис. 10

На рис. 9 та 10 представлено розподіл кругової компоненти напруженості електричного струму в момент часу $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с при дії на пластину стороннього струму

$J_0 = 5 \text{ MA/m}^2$. На рис. 9 на пластину діє механічна сила $P_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ H/m}^2$; на рис. 10 – механічна сила $P_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ H/m}^2$. Граничні умови на контурах пластини $B_z = -0,5 \sin \omega t \text{ Тл}$ (лінія 1) і $B_z = 0,5 \sin \omega t \text{ Тл}$ (лінія 2) виконуються для обох варіантів. Виходячи з результатів, що представлено на рис. 9, 10, можна оцінювати вплив механічної сили та граничних умов на напруженість електричного струму ортотропної пластини при врахуванні джоулевого тепла.

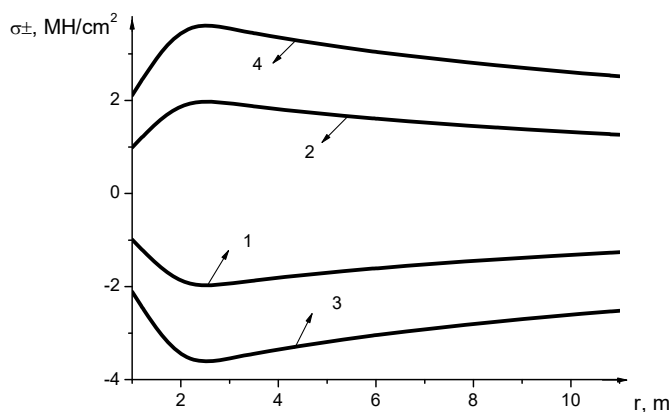


Рис. 11

На рис. 11 представлено розподіл механічного напруження в момент часу $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ на верхній поверхні $\sigma^+(r)$ та нижній поверхні $\sigma^-(r)$ пластини. На пластину діє сторонній електричний струм $J_0 = 5 \text{ MA/m}^2$, при граничних умовах на контурах $B_z = 0,5 \sin \omega t \text{ Тл}$. Лінія 1 характеризує напруження на верхній поверхні пластини; лінія 2 – напруження на нижній поверхні при дії на пластину механічної сили $P_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ H/m}^2$. Лінія 3 характеризує напруження на верхній поверхні пластини; лінія 4 – напруження на нижній поверхні при дії на пластину механічної сили $P_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ H/m}^2$. Через тонкостінність пластини поверхневі напруження рівні за абсолютною величиною, але направлені в протилежні сторони у відповідності до напрямків нормалей поверхонь.

Висновок.

На основі нелінійних рівнянь термомагнітопружності з використанням запропонованої методики, маємо можливість визначати термопружний стан гнучких ортотропних оболонок обертання з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла. Запропонована методика дозволяє розглядати різноманітні варіанти фізико-механічних параметрів ортотропних оболонок обертання в геометрично-нелінійній постановці. Як приклад розглянута нелінійна осесиметрична крайова задача гнучкої ортотропної кільцевої пластини сталої товщини з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла. Проведено обговорення отриманих результатів.

РЕЗЮМЕ. Наведено побудову та методику розв'язування нелінійних рівнянь термомагнітопружності гнучких ортотропних оболонок обертання з урахуванням ортотропної електропровідності і джоулевого тепла. Проведено аналіз термомагнітопружності гнучкої ортотропної кільцевої пластини в осесиметричній постановці.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: кільцева пластинка, магнітопружність, геометрична нелінійність, ортотропія, джоулеве тепло.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – Москва: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 184 с.
3. Будақ В. Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Чисельно-аналітичне розв'язання крайових задач магнітопружності гнучких оболонок. – Миколаїв: Іліон, 2016. – 148 с.
4. Будақ В. Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Нелинейные магнитоупругие оболочки. – Николаев: Илион, 2016. – 136 с.
5. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1963. – **16**, 5(99). – С. 171 – 174.
6. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності. – Київ: ІВЦ «Київський університет», 2010. – 403 с.
7. Дресвянников В.И. О нестационарных задачах механики упругопластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – **19**. – С. 32 – 47.
8. Ландау Л.В., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 624 с.
9. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. – Москва: Мир, 1967. – 385 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2-х томах. Т.1. – Москва: Наука, 1976. – 492 с.
11. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. – Москва: Наука, 1979. – 639 с.
12. Страттон Д.А. Теория электромагнетизма. – Москва: Ленинград: ГТТИ, 1948. – 540 с.
13. Тамм И.Е. Теория электромагнетизма. – Москва: Наука, 1976. – 624 с.
14. Bian Y.H. Analysis of Nonlinear Stresses and Strains in a Thin Current – Carrying Elastic Plate // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 108 – 120.
15. Dinzhos R.V., Privalko V.P., Privalko E.G. Enthalpy relaxation in the cooling/heating cycles of polyamide 6/organoclay nanocomposites. I. Non-isothermal crystallization // J. Macromolecular Sci., Part B. Phys. – 2005. – **B44**. – P. 421 – 430.
16. Privalko V.P., Dinzhos R.V., Privalko E.G. Enthalpy relaxation in the cooling/heating cycles of polyamide 6/organoclay nanocomposites. II. Melting behavior // J. Macromolecular Sci., Part B. Phys. – 2005. – **B44**. – P. 431 – 443.
17. Elhajjar R., Saponara V., Muliana A. Smart composites. Mechanics and Design. – New York: CRC Press. – 2013. – 430 p.
18. Hutter K., Ven A.A.F., Ursescu A. Electromagnetic Field Matter Interactions in Thermoelastic Solids and Viscous Fluids. – Berlin: Springer. – 403 p.
19. Mol'chenko L.V., Fedorchenko L. N., Vasil'eva L. Ya. Nonlinear Theory of Magnetoelasticity of Shells of Revolution with Joule Heat Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 3. – P. 306 – 314.
20. Mol'chenko L.V., Loos I.I. Influence of Conicity on the Stress-Strain State of a Flexible Orthotropic Conical Shell in a Nonstationary Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 11. – P. 1261 – 1267.
21. Mol'chenko L.V., Loos I.I. Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Isotropic Shells of Revolution Subject to Joule Heating // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 1. – P. 68 – 78.
22. Mol'chenko L.V., Loos I.I. Asymmetric Deformation of Shells of Revolution of Variable Stiffness in a Nonstationary Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 3. – P. 311 – 320.
23. Mol'chenko L.V., Loos I.I., Darmosyuk V.N. Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Orthotropic Shells of Revolution of Variable Stiffness with Joule Heat Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 498 – 511.
24. Moon F.C. Magneto-Solid Mechanics. – New York: Wiley, 1984. – 448 p.
25. Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – **85**, N 7. – P. 67 – 97.

Надійшла 20.11.2019

Затверджена до друку 15.12.2020