

О. М. Гузь, С. Ю. Бабич, А. Ю. Глухов

**ОСЕСИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ В ВИСОКОЕЛАСТИЧНОМУ
КОМПОЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ.
ДОВГОХВИЛЬОВЕ НАБЛИЖЕННЯ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: ndrew.gl@gmail.com*

Abstract. Within the framework of the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, the statement and method of solving the problems on the propagation of axisymmetric harmonic waves in the layered composite incompressible materials with initial stresses are proposed. The case of wave propagation along the layers is considered. The dispersion equations for quasi-transversal waves and their long-wave approximation are obtained for cases of the full contact of layers and sliding contact of layers. The numerical research of solutions is carried out for the dispersion equations of the elastic material with the Treloar type elastic potential. The influence of initial stresses on the phase velocity of axisymmetric long harmonic wave is studied.

Key words: layered composite incompressible material, elastic wave, initial stresses, dispersion equation, long-wave approximation.

Вступ.

Дослідженням динамічних процесів в тілах з початковими напруженнями, в тому числі і в шаруватих матеріалах, присвячено численні статті в періодичних виданнях [1 – 4, 8 – 14 та ін.]. Їх результати також викладено в ряді монографій [5 – 7 та ін.].

Задачі про поширення в радіальному напрямку осесиметричних хвиль і хвиль кручення в шаруватих композитних матеріалах періодичної структури при повному контакті шарів розглядалися в роботах [5, 7, 10, 14].

Із застосуванням загальних розв'язків [5, 6, 11] в загальній постановці отримано дисперсійні рівняння для стисливих і нестисливих матеріалів; отримано довгохвильове наближення для квазіпоздовжніх і квазіпоперечних хвиль для осесиметричних хвиль і для симетричних і антисиметричних хвиль кручення. Чисельний аналіз отриманих дисперсійних рівнянь проведено для порівняно жорстких матеріалів з потенціалом типу Мурнагана.

У найбільш повній формі вищевказані результати представлено в монографіях [5, 7].

Аналогічні аналітичні результати для осесиметричних хвиль при повному проковзуванні шарів отримано в роботах [1 – 4, 9]. Чисельний аналіз в широкому діапазоні частот проведено для високоеластичних матеріалів з потенціалом типу Трелоара.

У роботах [1 – 5, 7, 9 – 11, 14] використано метод дослідження, що викладений в [5, 7].

У даній роботі в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуто задачу про поширення осесиметричних хвиль у шаруватому нестисливому композитному матеріалі з початковими напруженнями. Проведено чисельне дослідження дисперсійних співвідношень для довгих квазіпоперечних хвиль, вивчено вплив початкових напружень на швидкості їх поширення.

§1. Постановка задач.

При дослідженні динамічних осесиметричних процесів в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями використаємо лагранжеві координати

$y_n \equiv y^n$, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з декартовими і лагранжевими координатами r', θ, y_3 , які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з круговими циліндричними координатами. Зв'язок між координатами $y_n \equiv y^n$ і r', θ, y_3 записується у вигляді звичайних співвідношень. Дослідження проводитимемо в розширеній постановці, беручи до уваги те, що в початковому напружено-деформованому стані окремі компоненти композитного матеріалу можуть деформуватися по-різному, тобто будемо вважати, що в початковому напружено-деформованому стані окремі компоненти композитного матеріалу не з'єднані між собою і повне їх з'єднання відбувається лише після виникнення напружено-деформованого стану. Надалі введемо декартову систему координат в початковому напружено-деформованому стані так, щоб вісь y_3 спрямовувалась по нормалі до площин розділу шарів (рис. 1).

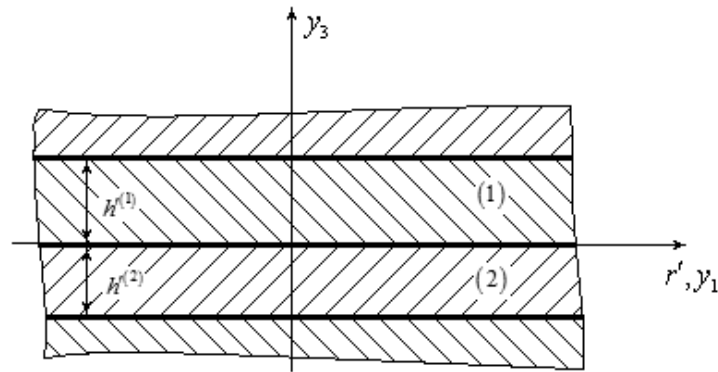


Рис. 1

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів; в разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів будемо вважати, що вісь ізотропії спрямована уздовж осі Oy_3 . Крім того, розглянемо шаруваті композитні матеріали з початковими напруженнями, які складаються з шарів двох типів, що чергуються. В кожному з таких типів шарів матеріали і початкові напружено-деформовані стани є однаковими для даного типу шарів.

Вважаємо, що початковий напружений стан є однорідним і визначається співвідношеннями

$$u_m^{0(j)} = (\lambda_m^{(j)} - 1)x_m; \quad \lambda_m^{(j)} = \text{const}; \quad j = 1, 2. \quad (1.1)$$

Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце такі співвідношення:

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)}; \\ \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h^{(j)} = \lambda_3^{(j)}h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \quad (1.2)$$

В (1.1) і (1.2) індексами в дужках ($j = 1, 2$) позначено всі величини, які мають відношення до шарів різних типів. $S_n^{0(j)}$ – складові тензора узагальнених напружень Лагранжа; $h^{(j)}$ – товщина j -го шару в початковому напружено-деформованому стані; $h^{(j)}$ – товщина j -го шару в природному стані; $\lambda_m^{(j)}$ – коефіцієнти видовження уздовж відповідних осей; $u_m^{0(j)}$ – переміщення.

В представленнях загальних розв'язків просторової динамічної лінеаризованої задачі теорії пружності для тіл з початковими напруженнями приймемо

$$u_{r'}^{(j)} = u_{r'}^{(j)}(r', y_3, \tau); u_\theta^{(j)} \equiv 0; u_3^{(j)} = u_3^{(j)}(r', y_3, \tau);$$

$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = p^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad j = 1, 2. \quad (1.3)$$

У цьому випадку в представленні загальних розв'язків просторових динамічних лінеаризованих задач теорії пружності щодо загального розв'язку осесиметричної задачі в циліндричних координатах можна також прийняти

$$\Psi^{(j)} \equiv 0; \chi^{(j)} = \chi^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad j = 1, 2. \quad (1.4)$$

З урахуванням (1.4) запишемо основні співвідношення для нестисливих тіл. В даному випадку для визначення переміщень з урахуванням (1.4) отримаємо

$$u_{r'}^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3} \chi^{(j)}; u_3^{(j)} = \Delta'_1 \chi^{(j)}; \rho^{(j)} = \rho^{(j)};$$

$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = \left[\left(\kappa'_{1111} - \kappa'_{1133} - \kappa'_{1313} \right) \Delta'_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \rho^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} \chi^{(j)}; \quad j = 1, 2. \quad (1.5)$$

З урахуванням (1.4) складові тензора напружень $Q^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$ можна записати

$$Q_{33}^{(j)} = \left[\left(\kappa'_{1111} + \kappa'_{3333} - 2\kappa'_{1133} - \kappa'_{1313} \right) \Delta'_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \rho^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} \chi^{(j)};$$

$$Q_{3r'}^{(j)} = \left(\kappa'_{1313} \Delta'_1 - \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial}{\partial r'} \chi^{(j)}; \quad j = 1, 2. \quad (1.6)$$

Для визначення функцій $\chi^{(j)}$ за умови (1.4) маємо

$$\left[\left(\Delta'_1 + \xi_2'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta'_1 + \xi_3'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \frac{\rho^{(j)}}{\kappa'_{1331}} \left(\Delta'_1 + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (1.7)$$

Величини $\xi_2'^{(j)}$ і $\xi_3'^{(j)}$ в (1.7) визначаються так само, як і в [9], для матеріалів кожного з шарів, що розглядаються; $\rho^{(j)}$ – густина матеріалів кожного з шарів.

Розглянемо два випадки контакту між шарами композитного матеріалу:

повний (жорсткий) контакт

$$u_{r'}^{(1)}(0) = u_{r'}^{(2)}(0); u_3^{(1)}(0) = u_3^{(2)}(0);$$

$$Q_{33}^{(1)}(0) = Q_{33}^{(2)}(0); Q_{3r'}^{(1)}(0) = Q_{3r'}^{(2)}(0) \quad (1.8)$$

і повне проковзування (нежорсткий контакт)

$$u_3^{(1)}(0) = u_3^{(2)}(0); Q_{33}^{(1)}(0) = Q_{33}^{(2)}(0);$$

$$Q_{3r'}^{(1)}(0) = 0; Q_{3r'}^{(2)}(0) = 0. \quad (1.9)$$

В силу періодичності структури також повинні виконуватись умови теореми Флоке: у випадку повного контакту

$$u_{r'}^{(1)}(h^{(1)}) = u_{r'}^{(2)}(-h^{(2)}); u_3^{(1)}(h^{(1)}) = u_3^{(2)}(-h^{(2)});$$

$$Q_{33}^{(1)}(h^{(1)}) = Q_{33}^{(2)}(-h^{(2)}); Q_{3r'}^{(1)}(h^{(1)}) = Q_{3r'}^{(2)}(-h^{(2)}); \quad (1.10)$$

у випадку повного проковзування

$$\begin{aligned} u_3^{(1)}(h^{(1)}) &= u_3^{(2)}(-h^{(2)}); \quad Q_{33}^{(1)}(h^{(1)}) = Q_{33}^{(2)}(-h^{(2)}); \\ Q_{3r'}^{(1)}(h^{(1)}) &= 0; \quad Q_{3r'}^{(2)}(-h^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким чином, дослідження закономірностей поширення осесиметричних пружних хвиль в шаруватих нестисливих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівнянь (1.7) при граничних умовах на площинах розділу шарів (1.8) або (1.9) і умовах періодичності (1.10) або (1.11), що відповідають теорії Флоке. При задоволенні граничних умов і умов періодичності необхідно використовувати вирази (1.5) і (1.6).

§2. Метод розв'язку задач.

Розглянемо поширення осесиметричної хвилі в радіальному напрямку в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями. При цьому розглянемо тільки випадок хвилі, що йде «на нескінченність». У цьому випадку для визначення «істинної» фазової швидкості поширення осесиметричних хвиль у шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями по аналогії з [5, 7] прийемо

$$\chi^{(j)}(r', y_3, \tau) = \chi^{(j)(0)}(y_3) H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j = 1, 2. \quad (2.1)$$

В (2.1) k і ω – хвильове число і кругова частота; C – «істинна» фазова швидкість осесиметричних хвиль; $H_0^{(1)}(x)$ – функція Ханкеля нульового порядку першого роду, що забезпечує поширення осесиметричних хвиль, що йдуть «на нескінченність»; $\chi^{(j)(0)}(y_3)$ – амплітудна функція.

Підставляючи (2.1) в (1.5), для визначення переміщень одержуємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(j)} &= u_{r'}^{(j)(0)} \frac{d}{dr'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ u_4^{(j)} &\equiv p^{(j)} = p^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ u_{r'}^{(j)(0)} &= -\frac{d}{dy_3} \chi^{(j)(0)}(y_3); \quad u_3^{(j)(0)} = -k^2 \chi^{(j)(0)}(y_3); \\ p^{(j)(0)} &= \left[-k^2 (\kappa_{1111}^{(j)} - \kappa_{1133}^{(j)} - \kappa_{1313}^{(j)}) + \kappa_{3113}^{(j)} \frac{d^2}{dy_3^2} + \omega^2 \rho^{(j)} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} \chi^{(j)(0)}(y_3); \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогічним чином, підставляючи (2.1) в (1.6), для визначення складових тензора напружень $Q^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$ отримаємо

$$\begin{aligned} Q_{33}^{(j)} &= Q_{33}^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad Q_{3r'}^{(j)} = Q_{3r'}^{(j)(0)} \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ Q_{33}^{(j)(0)} &= \left[-k^2 (\kappa_{1111}^{(j)} + \kappa_{3333}^{(j)} - 2\kappa_{1133}^{(j)} - \kappa_{1313}^{(j)}) + \kappa_{3113}^{(j)} \frac{d^2}{dy_3^2} + \omega^2 \rho^{(j)} \right] \frac{d}{dy_3} \chi^{(j)(0)}(y_3); \\ Q_{3r'}^{(j)(0)} &= -\left(k^2 \kappa_{1313}^{(j)} + \kappa_{3113}^{(j)} \frac{d^2}{dy_3^2} \right) \chi^{(j)(0)}(y_3); \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Підставляючи (2.1) в (1.7), отримуємо рівняння для визначення функцій $\chi^{(j)(0)}(y_3)$ в наступній формі

$$\left[\left(\xi_2^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \left(\xi_3^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) + \frac{\omega^2 \rho^{(j)}}{\kappa_{1331}^{(j)}} \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \right] \chi^{(j)(0)}(y_3) = 0; \quad j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Оскільки в (2.2) – (2.4) всі співвідношення представлено через амплітудні величини, то умови безперервності і періодичності також сформулюємо для амплітудних величин. У зв'язку з цим виділимо сусідні шари (рис. 1) і вважатимемо, що шар, величини якого мають індекс 1, займає по осі Oy_3 область $0 \leq y_3 \leq h^{(1)}$ і шар, всі величини якого мають індекс 2, займає по осі Oy_3 область $-h^{(2)} \leq y_3 \leq 0$. При повному контакті при $y_3 = 0$ повинні виконуватися умови неперервності векторів напружень і переміщень, які сформульовано для відповідних амплітудних величин, в такій формі:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)(0)}(0) &= u_r^{(2)(0)}(0); \quad u_3^{(1)(0)}(0) = u_3^{(2)(0)}(0); \\ Q_{33}^{(1)(0)}(0) &= Q_{33}^{(2)(0)}(0); \quad Q_{3r'}^{(1)(0)}(0) = Q_{3r'}^{(2)(0)}(0), \end{aligned} \quad (2.5)$$

а при повному проковзуванні

$$\begin{aligned} u_3^{(1)(0)}(0) &= u_3^{(2)(0)}(0); \quad Q_{33}^{(1)(0)}(0) = Q_{33}^{(2)(0)}(0); \\ Q_{3r'}^{(1)(0)}(0) &= 0; \quad Q_{3r'}^{(2)(0)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу періодичності даної структури відповідно до теореми Флоке повинні також виконуватися умови періодичності для амплітудних величин:

при повному контакті

$$\begin{aligned} u_r^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= u_r^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \quad u_3^{(1)(0)}(h^{(1)}) = u_3^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \\ Q_{33}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= Q_{33}^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \quad Q_{3r'}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = Q_{3r'}^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \end{aligned} \quad (2.7)$$

при повному проковзуванні

$$\begin{aligned} u_3^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= u_3^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \quad Q_{33}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = Q_{33}^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \\ Q_{3r'}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= 0; \quad Q_{3r'}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким чином, для розв'язку задачі необхідно знайти розв'язок звичайних диференціальних рівнянь (2.4), який задовольняє умовам неперервності (2.5) або (2.6) і умовам періодичності (2.7) і (2.8) відповідно з урахуванням позначень (2.2) і (2.3).

Розглянемо закономірності поширення осесиметричних пружних хвиль в радіальному напрямку вздовж шарів (рис. 1) в шаруватому композитному нестисливому матеріалі з початковими напруженнями. За аналогією з результатами, викладеними в монографіях [5, 7], розв'язок рівнянь (2.4) представимо у формі

$$\begin{aligned} \chi^{(j)(0)}(y_3) &= A_1^{(j)} e^{ik\alpha_1^{(j)} y_3} + A_2^{(j)} e^{-ik\alpha_1^{(j)} y_3} + A_3^{(j)} e^{ik\alpha_2^{(j)} y_3} + A_4^{(j)} e^{-ik\alpha_2^{(j)} y_3}; \\ A_n^{(j)} &= \text{const}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для визначення функцій $\alpha_1^{(j)^2}$ і $\alpha_2^{(j)^2}$ з (2.4) і (2.9) маємо характеристичні рівняння

$$\begin{aligned} \kappa_{3113}^{(j)} \alpha^{(j)4} - \alpha^{(j)2} \left[C^2 \rho^{(j)} - \kappa_{3333}^{(j)} - \kappa_{1111}^{(j)} + 2(\kappa_{1133}^{(j)} + \kappa_{1313}^{(j)}) \right] - \\ - (C^2 \rho^{(j)} - \kappa_{1331}^{(j)}) = 0; \quad C = \frac{\omega}{k}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Підставивши амплітуди переміщень (2.2) і напружень (2.3) в умови контакту (2.5) або (2.6) і періодичності (2.7) або (2.8), відповідно, отримаємо однорідну систему з восьми алгебраїчних рівнянь щодо констант $B_m^{(j)}$ ($m = \overline{1, 4}; j = 1, 2$). Систему не наводимо через її громіздкість. Прирівнявши нулю детермінант матриці цієї системи, отримуємо дисперсійне рівняння для довільної осесиметричної хвилі, яка поширюється вздовж шарів шаруватого композитного матеріалу при проковзуванні шарів.

Представлення розв'язку (2.9) запишемо відносно середини кожного з шарів у формі

$$\begin{aligned}\chi^{(1)(0)}(y_3) &= B_1^{(1)} e^{ik\alpha_1^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)} + B_2^{(1)} e^{-ik\alpha_1^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)} + \\ &+ B_3^{(1)} e^{ik\alpha_2^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)} + B_4^{(1)} e^{-ik\alpha_2^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)}; \\ \chi^{(2)(0)}(y_3) &= B_1^{(2)} e^{ik\alpha_1^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)} + B_2^{(2)} e^{-ik\alpha_1^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)} + \\ &+ B_3^{(2)} e^{ik\alpha_2^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)} + B_4^{(2)} e^{-ik\alpha_2^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Для нестисливого композитного матеріалу з початковими напруженнями (за аналогією з [5, 7]) будемо розглядати квазіпоперечну (зсувну) хвилю, що поширюється уздовж осі Or' , і поляризовану в площині $r'Oy_3$. Для такої хвилі переміщення $u_r^{(j)}$ будуть антисиметричними, а $u_3^{(j)}$ будуть симетричними відносно середини відповідних шарів. Відповідно до викладеного в представленні розв'язків (2.11) прийемо умову

$$B_1^{(j)} = B_2^{(j)}; \quad B_3^{(j)} = B_4^{(j)}; \quad j = 1, 2. \quad (2.12)$$

Враховуючи позначення (2.2) і (2.3) і підставивши (2.11) і (2.12) в граничні умови (2.5) або (2.6) і умови періодичності (2.7) або (2.8), відповідно, після ряду перетворень отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь четвертого порядку, з умови існування нетривіальних розв'язків якої маємо дисперсійне рівняння у вигляді

$$\det \|\alpha_{rs}\| = 0; \quad r, s = \overline{1, 4} \quad (2.13)$$

при наступних позначеннях:

у випадку повного контакту шарів

$$\begin{aligned}\alpha_{1m} &= k\alpha_m^{(1)} \sin \frac{1}{2}k\alpha_m^{(1)}h^{(1)}; \quad \alpha_{1,2+m} = k\alpha_m^{(2)} \sin \frac{1}{2}k\alpha_m^{(2)}h^{(2)}; \\ \alpha_{2m} &= k^2 \cos \frac{1}{2}k\alpha_m^{(1)}h^{(1)}; \quad \alpha_{2,2+m} = -k^2 \cos \frac{1}{2}k\alpha_m^{(2)}h^{(2)}; \\ \alpha_{3m} &= k^3 \alpha_m^{(1)} (C^2 \rho^{(1)} - \kappa_{1111}^{(1)} - \kappa_{3333}^{(1)} + 2\kappa_{1133}^{(1)} + \kappa_{1313}^{(1)} - \alpha_m^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)}) \sin \frac{1}{2}k\alpha_m^{(1)}h^{(1)}; \\ \alpha_{3,2+m} &= k^3 \alpha_m^{(2)} (C^2 \rho^{(2)} - \kappa_{1111}^{(2)} - \kappa_{3333}^{(2)} + 2\kappa_{1133}^{(2)} + \kappa_{1313}^{(2)} - \alpha_m^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)}) \sin \frac{1}{2}k\alpha_m^{(2)}h^{(2)}; \\ \alpha_{4m} &= k^2 (\kappa_{1313}^{(1)} - \alpha_m^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)}) \cos \frac{1}{2}k\alpha_m^{(1)}h^{(1)}; \\ \alpha_{4,2+m} &= -k^2 (\kappa_{1313}^{(2)} - \alpha_m^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)}) \cos \frac{1}{2}k\alpha_m^{(2)}h^{(2)}; \quad m = 1, 2;\end{aligned}\quad (2.14)$$

у випадку повного проковзування шарів

$$\begin{aligned}
\alpha_{1m} &= \cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(1)} h^{(1)}; \quad \alpha_{1,2+m} = -\cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(2)} h^{(2)}; \\
\alpha_{2m} &= \alpha_1^{(1)} (C^2 \rho^{(1)} - \kappa_{1111}^{(1)} - \kappa_{3333}^{(1)} + 2\kappa_{1133}^{(1)} + \kappa_{1313}^{(1)} - \alpha_m^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)}) \sin \frac{1}{2} k \alpha_m^{(1)} h^{(1)}; \\
\alpha_{2,2+m} &= \alpha_m^{(2)} (C^2 \rho^{(2)} - \kappa_{1111}^{(2)} - \kappa_{3333}^{(2)} + 2\kappa_{1133}^{(2)} + \kappa_{1313}^{(2)} - \alpha_m^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)}) \sin \frac{1}{2} k \alpha_m^{(2)} h^{(2)}; \\
\alpha_{3m} &= (\kappa_{1313}^{(1)} - \alpha_m^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)}) \cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(1)} h^{(1)}; \quad \alpha_{33} = \alpha_{34} = 0; \\
\alpha_{41} = \alpha_{42} &= 0; \quad \alpha_{4,2+m} = (\kappa_{1313}^{(2)} - \alpha_m^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)}) \cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(2)} h^{(2)}; \quad m = 1, 2. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

У виразах (2.14) і (2.15) C – «справжня» фазова швидкість квазіпоперечної хвилі в напрямку осі Or' , що поляризована в площині $r'Oy_3$, для відповідних умов контакту між шарами композитного матеріалу. Результати у формі (2.14) для повного контакту між шарами композиту отримано в роботах [5, 7].

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
\xi^{(j)} &= \kappa_{1111}^{(j)} + \kappa_{3333}^{(j)} - 2\kappa_{1133}^{(j)} - \kappa_{1313}^{(j)}; \quad \beta^{(j)} = (\alpha_2^{(j)2} - \alpha_1^{(j)2}) \kappa_{3113}^{(j)}; \\
\theta_m^{(j)} &= \kappa_{1313}^{(j)} - \alpha_m^{(j)2} \kappa_{3113}^{(j)}; \quad \zeta_m^{(j)} = C^2 \rho^{(j)} - \xi^{(j)} - \alpha_m^{(j)2} \kappa_{3113}^{(j)}; \quad j, m = 1, 2. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Використовуючи позначення (2.16), дисперсійне рівняння (2.13) для випадку квазіпоперечної хвилі в нестисливому шаруватому композитному матеріалі можна записати у вигляді:

у випадку повного контакту шарів

$$\begin{aligned}
& -\beta^{(1)} \beta^{(2)} \left(\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} + \right. \\
& \left. + \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} \right) + \alpha_1^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h^{(1)} \times \\
& \times \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h^{(1)} \left[\alpha_1^{(2)} (\theta_2^{(1)} - \theta_2^{(2)}) (\zeta_1^{(2)} - \zeta_1^{(1)}) \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} - \right. \\
& \left. - \alpha_2^{(2)} (\theta_2^{(1)} - \theta_1^{(2)}) (\zeta_2^{(2)} - \zeta_1^{(1)}) \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \right] - \alpha_2^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h^{(1)} \times \\
& \times \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h^{(1)} \left[\alpha_1^{(2)} (\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(2)}) (\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(1)}) \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} - \right. \\
& \left. - \alpha_2^{(2)} (\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}) (\zeta_2^{(2)} - \zeta_2^{(1)}) \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \right] = 0; \quad (2.17)
\end{aligned}$$

у випадку повного проковзування шарів

$$\begin{aligned}
& \beta^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} \left(\alpha_1^{(1)} \zeta_1^{(1)} \theta_2^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h^{(1)} - \right. \\
& \left. - \alpha_2^{(1)} \zeta_2^{(1)} \theta_1^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h^{(1)} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h^{(1)} \left(\alpha_2^{(2)} \zeta_2^{(2)} \theta_1^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} - \right. \\
& \left. - \alpha_1^{(2)} \zeta_1^{(2)} \theta_2^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} \right) = 0. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що за умови (2.12) і позначеннях (2.16) умови безперервності (2.5), (2.6) і періодичності (2.7), (2.8) незалежно призводять до дисперсійних рівнянь (2.17) і (2.18), відповідно, тобто при умові (2.12) щодо розв'язку (2.11) маємо однакові умови безперервності і періодичності.

Аналіз формул (2.17) і (2.18) свідчить, що при поширенні осесиметричних хвиль відбувається взаємодія між шарами композиту.

§3. Довгохвильове (низькочастотне) наближення.

Для довгохвильового (низькочастотного) наближення приймаємо умову

$$\frac{h^{(1)} + h^{(2)}}{\Lambda} \ll 1, \quad (3.1)$$

де $\Lambda = \frac{2\pi}{k}$ – довжина хвилі.

У разі повного контакту між шарами для довгохвильового (низькочастотного) наближення за умови (3.1), обмежуючись одночленною апроксимацією, отримуємо граничну оцінку для фазової швидкості квазіпоперечної хвилі:

$$C^2 = \frac{1}{\rho^{(1)} h^{(1)} + \rho^{(2)} h^{(2)}} \left[\kappa_{1331}^{(2)} h^{(2)} + h^{(1)} \kappa_{1331}^{(1)} - \frac{h^{(1)} h^{(2)} (\kappa_{1313}^{(1)} - \kappa_{1313}^{(2)})^2}{\kappa_{3113}^{(1)} h^{(2)} + \kappa_{3113}^{(2)} h^{(1)}} \right]. \quad (3.2)$$

Якщо $h^{(1)} \gg h^{(2)}$, то

$$C^2 = \frac{\kappa_{1331}^{(1)}}{\rho^{(1)}}. \quad (3.3)$$

Якщо $h^{(1)} \ll h^{(2)}$, то

$$C^2 = \frac{\kappa_{1331}^{(2)}}{\rho^{(2)}}. \quad (3.4)$$

З формули (3.2) випливає, що фазова швидкість буде невід'ємною, якщо

$$\kappa_{1331}^{(2)} h^{(2)} + h^{(1)} \kappa_{1331}^{(1)} - \frac{h^{(1)} h^{(2)} (\kappa_{1313}^{(1)} - \kappa_{1313}^{(2)})^2}{\kappa_{3113}^{(1)} h^{(2)} + \kappa_{3113}^{(2)} h^{(1)}} \geq 0. \quad (3.5)$$

Фазова швидкість буде мінімальною ($C = 0$) за умови

$$m^2 \frac{\lambda_3^{(1)2}}{\lambda_3^{(2)2}} + m \frac{\lambda_3^{(1)}}{\lambda_3^{(2)}} \left[\frac{\kappa_{3113}^{(1)}}{\kappa_{3113}^{(2)}} + \frac{\kappa_{1331}^{(2)}}{\kappa_{1331}^{(1)}} - \frac{(\kappa_{1313}^{(1)} - \kappa_{1313}^{(2)})^2}{\kappa_{1331}^{(1)} \kappa_{3113}^{(2)}} \right] + \frac{\kappa_{3113}^{(1)}}{\kappa_{3113}^{(2)}} \frac{\kappa_{1331}^{(2)}}{\kappa_{1331}^{(1)}} = 0, \quad (3.6)$$

де $m = \frac{h^{(1)}}{h^{(2)}}$ – параметр шаруватості.

У разі повного проковзування шарів для довгохвильового (низькочастотного) наближення за умови (3.1), обмежуючись одночленною апроксимацією, отримуємо граничну оцінку для фазової швидкості квазіпоперечної хвилі:

$$C^2 = \frac{(\kappa_{1331}^{(1)} - \kappa_{1313}^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)-1}) h^{(1)} + (\kappa_{1331}^{(2)} - \kappa_{1313}^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)-1}) h^{(2)}}{\rho^{(1)} h^{(1)} + \rho^{(2)} h^{(2)}}. \quad (3.7)$$

При $h^{(1)} \gg h^{(2)}$ маємо

$$C^2 = \rho^{(1)-1} (\kappa_{1331}^{(1)} - \kappa_{1313}^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)-1}). \quad (3.8)$$

При $h^{(1)} \ll h^{(2)}$ отримаємо

$$C^2 = \rho^{(2)-1} (\kappa_{1331}^{(2)} - \kappa_{1313}^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)-1}). \quad (3.9)$$

Фазова швидкість в разі повного проковзування буде приймати невід'ємні значення, якщо

$$(\kappa_{1331}^{(1)} - \kappa_{1313}^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)-1}) h^{(1)} + (\kappa_{1331}^{(2)} - \kappa_{1313}^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)-1}) h^{(2)} \geq 0. \quad (3.10)$$

З формули (3.7) випливає, що фазова швидкість буде рівна нулю за умови

$$m = - \frac{\lambda_3^{(2)} \kappa_{1331}^{(2)} - \kappa_{1313}^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)-1}}{\lambda_3^{(1)} \kappa_{1331}^{(1)} - \kappa_{1313}^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)-1}}. \quad (3.11)$$

З формул (3.3), (3.4) і (3.8), (3.9) випливає, що при поширенні довгих осесиметричних хвиль фазова швидкість квазіпоперечної хвилі при повному контакті між шарами композитного матеріалу завжди більша, ніж при повному проковзуванні.

§4. Числові результати.

Для проведення чисельного аналізу конкретизуємо вид пружного потенціалу. Розглянемо закономірності впливу початкових напружень на швидкість поширення довгих квазіпоперечних хвиль в композитному нестисливому матеріалі в рамках потенціалу Трелоара [5]

$$w^{(j)} = 2c_{10}^{(j)} A_1^{(j)}; \quad j = 1, 2, \quad (4.1)$$

де $c_{10}^{(j)}$ – пружна стала, $A_1^{(j)}$ – алгебраїчний інваріант.

Дослідження проведемо для початкового стану

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq 0; \quad S_{33}^{0(j)} = 0; \quad \lambda^{(j)} = \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad \lambda_3^{(j)} = \lambda^{(j)-2}; \quad j = 1, 2 \quad (4.2)$$

і таких співвідношень механічних характеристик шарів композитного матеріалу

$$\mu \equiv c_{10}^{(1)} / c_{10}^{(2)} = 5; \quad \rho \equiv \rho^{(1)} / \rho^{(2)} = 10 / 7. \quad (4.3)$$

Для складових тензора $\kappa^{(j)}$, що входять у формули (3.2) – (3.11), для пружного потенціалу (4.1) з урахуванням (4.2), отримаємо

$$\kappa_{1331}^{(j)} = \frac{2\mu^{(j)} \lambda_1^{(j)2}}{\lambda_1^{(j)} + \lambda_3^{(j)}}; \quad \kappa_{3113}^{(j)} = \kappa_{1313}^{(j)} = \frac{2\mu^{(j)} \lambda_3^{(j)2}}{\lambda_1^{(j)} + \lambda_3^{(j)}}; \quad j = 1, 2. \quad (4.4)$$

Випадок повного контакту між шарами (3.2). Формулу (3.2) з урахуванням (4.2) і (4.4) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{C_s^{0(2)2}} &= 2\lambda_1^{(1)-2} \lambda_1^{(2)-2} (\rho m \lambda_1^{(2)2} + \lambda_1^{(1)2})^{-1} \left[\mu (\lambda_1^{(2)3} + 1) + m (\lambda_1^{(1)3} + 1) \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ m^2 \mu \lambda_1^{(1)6} \lambda_1^{(2)4} + m \left[2\mu \lambda_1^{(1)2} \lambda_1^{(2)2} + \lambda_1^{(1)4} (\lambda_1^{(2)3} - 1) (\lambda_1^{(1)3} + 1) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \mu^2 \lambda_1^{(2)4} (\lambda_1^{(1)3} - 1) (\lambda_1^{(2)3} + 1) \right] + \mu \lambda_1^{(1)4} \lambda_1^{(2)6} \right\}; \quad C_s^{0(2)} = \sqrt{\mu_2 / \rho_2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

На рис. 2 показано поверхню, що відповідає значенням $\frac{C^2}{C_s^{0(2)2}} \geq 0$ при $m = 1$ в діапазоні $0 \leq \lambda_1^{(1)} \leq 2$ і $0 \leq \lambda_1^{(2)} \leq 2$. На рис. 3 показано криві, що відповідають значенню $C = 0$ при $m = 0,1$ (суцільна лінія), при $m = 1$ (штрихова лінія) і при $m = 10$ (штрихпунктирна лінія). З рис. 2 і 3 видно, що при відповідних значеннях $\lambda_1^{(1)}$ і $\lambda_1^{(2)}$ та параметра шаруватості m фазова швидкість довгих хвиль в композитному матеріалі може дорівнювати нулю.

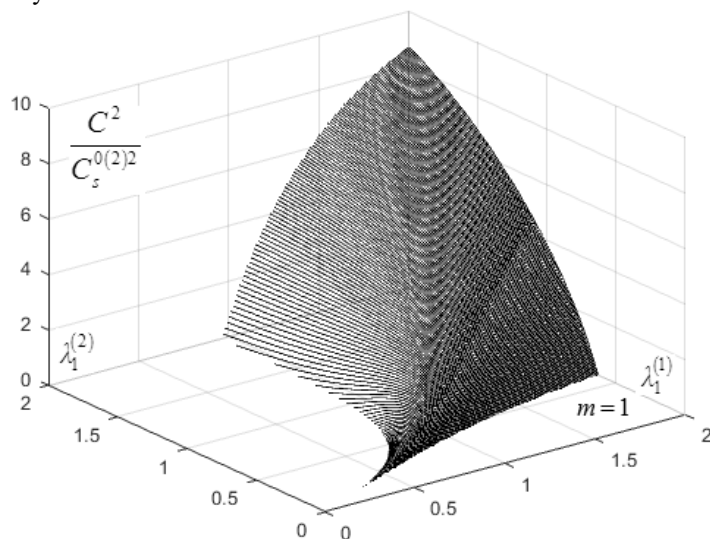


Рис. 2

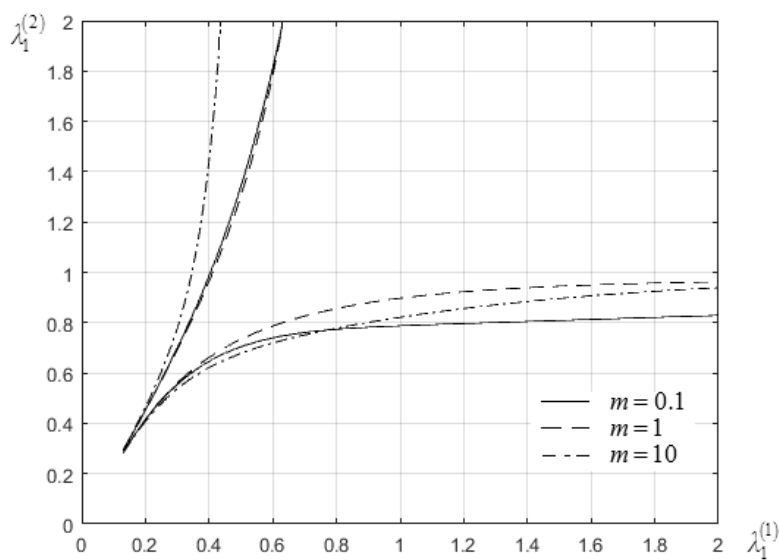


Рис. 3

Як приклади розглянуто окремі випадки початкового напруженого стану композитного матеріалу.

- 1) $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = 1$ (початковий стан композитного матеріалу – не напружений).

В цьому випадку

$$\frac{C}{C_s^{0(2)}} = \sqrt{\frac{\mu(m+1)^2}{(\rho m + 1)(\mu + m)}} > 0 \quad (4.6)$$

при будь-яких значеннях параметрів ρ, μ і m .

2) $\lambda_1^{(1)} \neq 1; \lambda_1^{(2)} = 1$ (перший шар – попередньо напружений, другий – не напружений).

Для визначення фазової швидкості в цьому випадку отримуємо формулу

$$\frac{C^2}{C_s^{0(2)2}} = 2\mu \frac{\lambda_1^{(1)2} [\lambda_1^{(1)2} (1 + \lambda_1^{(1)2} m^2) + 2m] + 2\mu m (\lambda_1^{(1)3} - 1)}{\lambda_1^{(1)2} (\rho m + \lambda_1^{(1)2}) [2\mu + m (\lambda_1^{(1)3} + 1)]}. \quad (4.7)$$

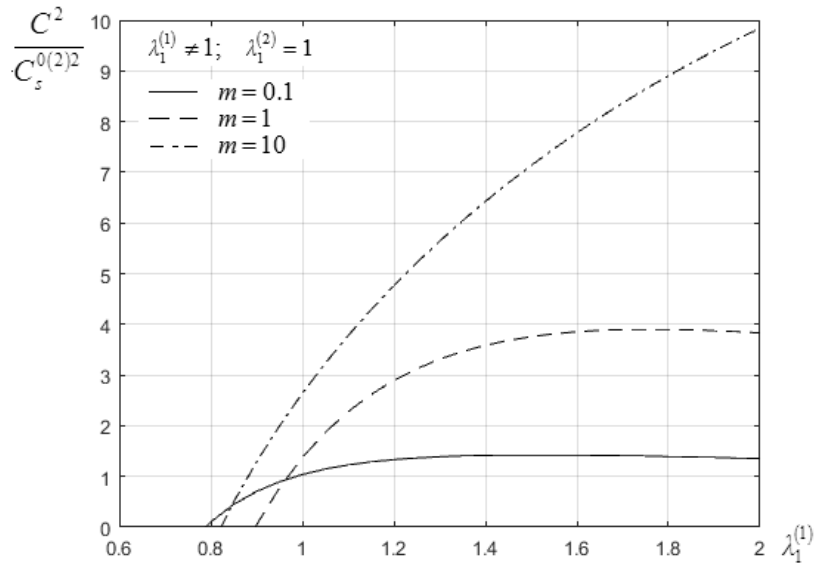


Рис. 4

У діапазоні невід’ємних значень фазової швидкості графіки кривих, що відповідають формулі (4.7) при відповідних значеннях параметра шаруватості m , показано на рис. 4.

3) $\lambda_1^{(1)} = 1; \lambda_1^{(2)} \neq 1$ (перший шар – не напружений, другий – попередньо напружений).

Для фазової швидкості маємо

$$\frac{C^2}{C_s^{0(2)2}} = 2 \frac{\mu \lambda_1^{(2)2} [\lambda_1^{(2)2} (\lambda_1^{(2)2} + m^2) + 2m] + 2m (\lambda_1^{(2)3} - 1)}{\lambda_1^{(2)2} (\rho m \lambda_1^{(2)2} + 1) [\mu (\lambda_1^{(2)3} + 1) + 2m]}. \quad (4.8)$$

На рис. 5 показано криві, що відповідають невід’ємним значенням фазової швидкості при відповідних значеннях параметра шаруватості m .

4) $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = \lambda_1 \neq 1$ (шари композитного матеріалу однаково напружені).

Фазова швидкість довгої хвилі може бути визначена за формулою

$$\frac{C^2}{C_s^{0(2)2}} = 2 \frac{\mu [\lambda_1^6 (1 + m^2) + 2m] + m (1 + \mu^2) (\lambda_1^6 - 1)}{\lambda_1^2 (\rho m + 1) (\lambda_1^3 + 1) (\mu + m)}. \quad (4.9)$$

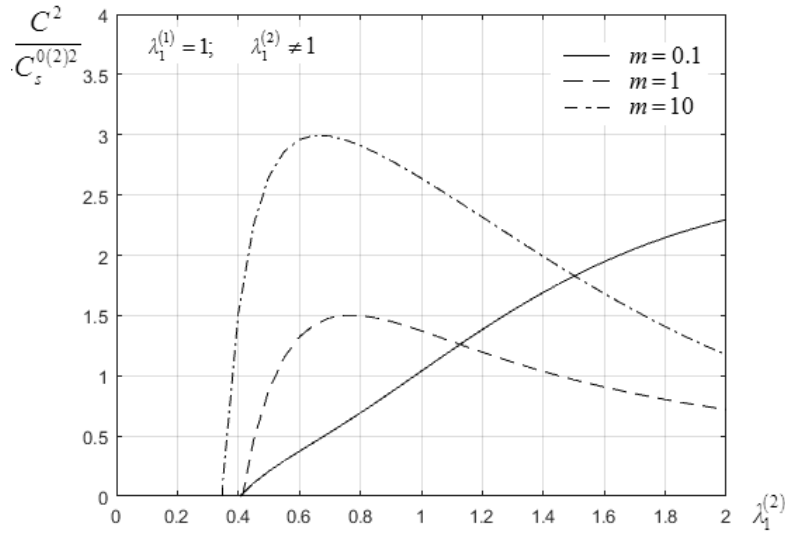


Рис. 5

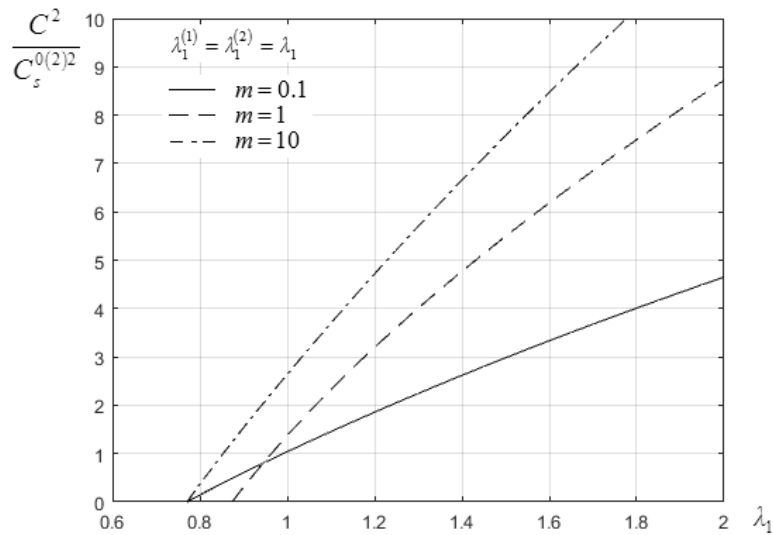


Рис. 6

Відповідні графіки для фазової швидкості довгої хвилі показано на рис. 6.

З вищеведеного можна зробити висновки, що фазова швидкість довгої хвилі при повному контакті між шарами композитного матеріалу може прямувати до нуля при відповідних значеннях початкових напружень і параметра шаруватості. При цьому в розглянутому діапазоні початкових деформацій відповідний ефект має місце, якщо один з шарів (випадки 2 і 3) або всі шари (випадок 4) попередньо стиснуті.

Випадок повного проковзування між шарами (3.7). Приймаючи до уваги співвідношення (4.2) і (4.4), формулу для визначення фазової швидкості (3.7) можна представити у вигляді

$$\frac{C^2}{C_s^{0(2)2}} = 2 \frac{\mu t \lambda_1^{(2)4} (\lambda_1^{(1)3} - 1) + \lambda_1^{(1)4} (\lambda_1^{(2)3} - 1)}{\lambda_1^{(1)2} \lambda_1^{(2)2} (\rho t \lambda_1^{(2)2} + \lambda_1^{(1)2})}. \quad (4.10)$$

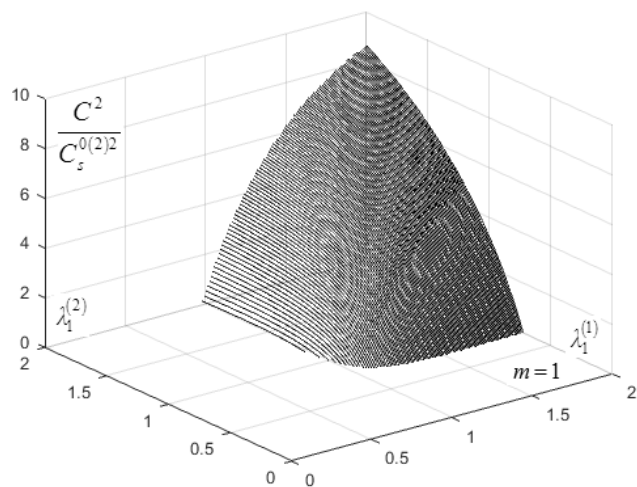


Рис. 7

Зображена на рис. 7 поверхня відповідає невід'ємним значенням $\frac{C^2}{C_s^{0(2)2}}$ при повному проковзуванні між шарами композитного матеріалу.

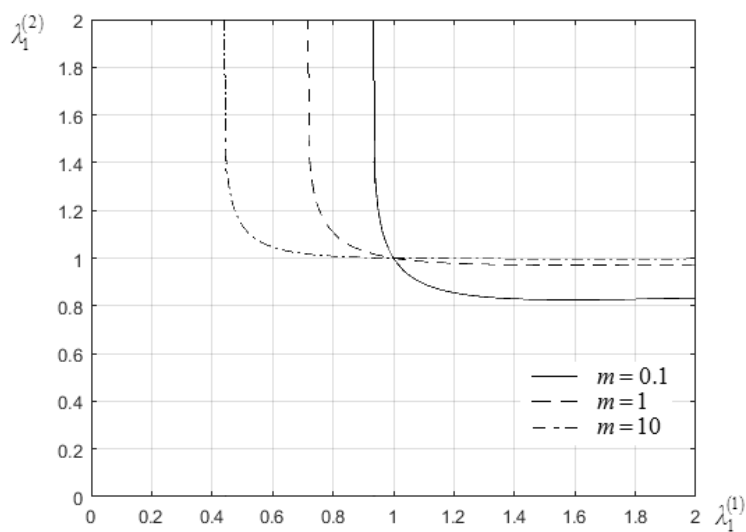


Рис. 8

Сліди відповідних поверхонь на площині $\lambda_1^{(1)} O \lambda_1^{(2)}$ при різних значеннях параметра шаруватості m показано на рис. 8.

З рис. 8 випливає, що фазова швидкість довгої хвилі при повному проковзуванні може бути рівна нулю, якщо один з шарів композитного матеріалу буде стиснутий, а інший – розтягнутий.

Для випадку повного проковзування між шарами композитного матеріалу розглянемо ті ж приклади, які було розглянуто для повного контакту.

$$1) \lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = 1.$$

$$C = 0. \tag{4.11}$$

$$2) \lambda_1^{(1)} \neq 1; \lambda_1^{(2)} = 1 \text{ (рис. 9).}$$

$$\frac{C^2}{C_s^{0(2)^2}} = \frac{2\mu m(\lambda_1^{(1)3} - 1)}{\lambda_1^{(1)2}(\rho m + \lambda_1^{(1)2})}. \quad (4.12)$$

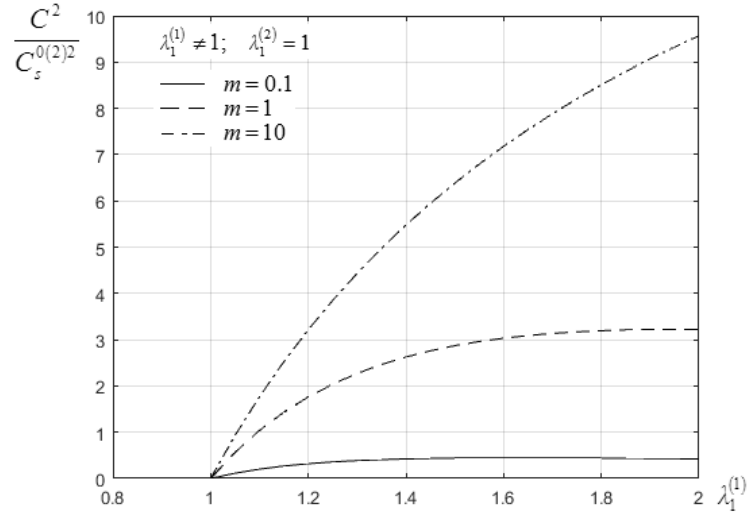


Рис. 9

3) $\lambda_1^{(1)} = 1$; $\lambda_1^{(2)} \neq 1$ (рис. 10).

$$\frac{C^2}{C_s^{0(2)^2}} = \frac{2(\lambda_1^{(2)3} - 1)}{\lambda_1^{(2)2}(\rho m \lambda_1^{(2)2} + 1)}. \quad (4.13)$$

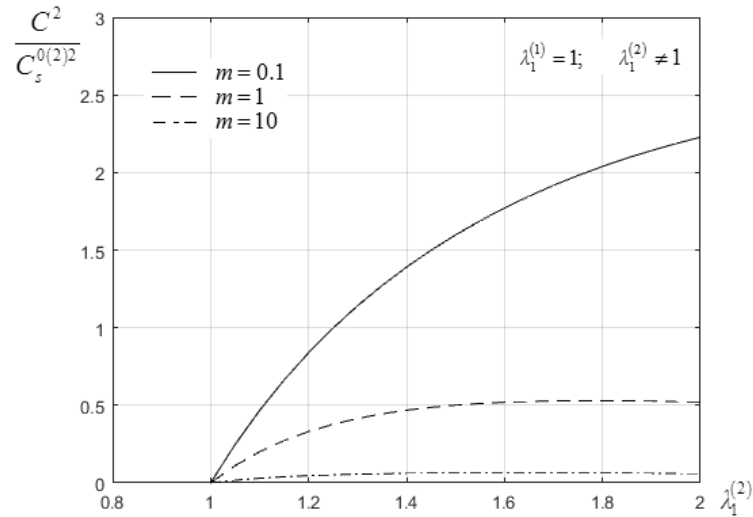


Рис. 10

4) $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = \lambda_1 \neq 1$ (рис. 11).

$$\frac{C^2}{C_s^{0(2)^2}} = \frac{2(\mu m + 1)(\lambda_1^3 - 1)}{\lambda_1^2(\rho m + 1)}. \quad (4.14)$$

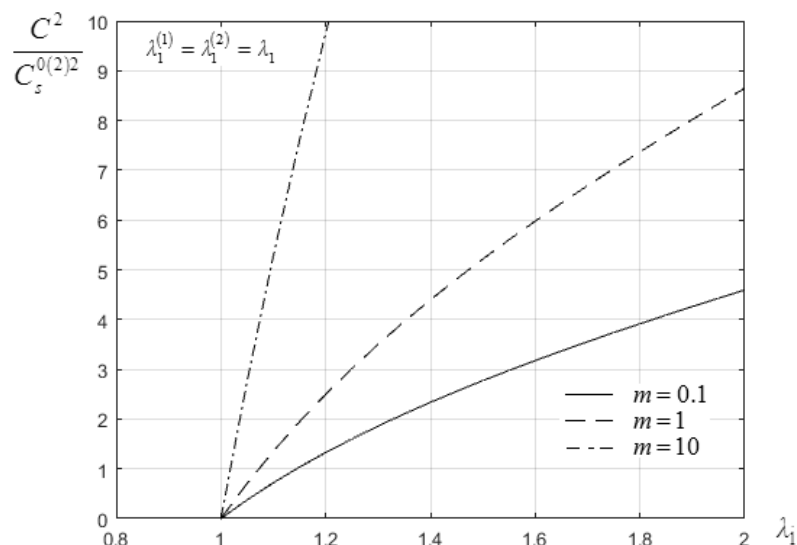


Рис. 11

З формул (4.12) – (4.14) і графіків на рис. 9 – 11 випливає, що фазова швидкість довгої хвилі дорівнює нулю тільки в разі ненапруженого початкового стану $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = 1$.

Наведені формули, графіки і висновки отримано за умови (4.2).

Висновки.

Аналізуючи вплив початкових напружень, умов контакту шарів і параметра шаруватості на фазову швидкість довгої квазіпоперечної хвилі, можна зробити наступні висновки:

Початкові напруження істотно впливають на фазові швидкості довгих осесиметричних хвиль в шаруватому нестисливому композитному матеріалі.

Фазова швидкість довгої хвилі при повному контакті між шарами композитного матеріалу може прямувати до нуля при відповідних значеннях початкових напружень і параметра шаруватості. При цьому в розглянутому діапазоні початкових деформацій відповідний ефект має місце, якщо один із шарів або всі шари попередньо стиснуті.

Фазова швидкість довгої хвилі при повному проковзуванні може бути рівна нулю, якщо один з шарів композитного матеріалу буде стиснутий, а інший – розтягнутий. В іншому випадку фазова швидкість довгої хвилі дорівнює нулю тільки при ненапруженому початковому стані.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуто постановку і метод розв'язування задач про поширення осесиметричних гармонічних хвиль в шаруватому високоеластичному композитному матеріалі. Досліджено випадок поширення хвиль уздовж шарів композитного матеріалу. Отримані дисперсійні рівняння для квазіпоперечних хвиль та їх довгохвильові наближення при повному контакті шарів і при повному проковзуванні шарів. Для матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара проведено числові дослідження фазової швидкості довгих хвиль.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: шаруватий композитний нестисливий матеріал, пружна хвиля, початкові напруження, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.

1. Глухов А.Ю. Про поширення вісесиметричних хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів // Доп. НАН України. – 2016. № 8. – С. 33 – 39.
2. Глухов А.Ю. Вісесиметричні хвилі в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів // Доп. НАН України. – 2016. – № 10. – С. 42 – 46.
3. Глухов А.Ю. Поширення вісесиметричних хвиль в композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при умові неповного контакту між шарами // Вісник Запорізького національного університету. Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет. – 2017. – № 1 – С. 73 – 81.
4. Глухов А.Ю. Про вплив початкових напружень на вісесиметричні квазіпоперечні хвилі у нестисливому композитному матеріалі // Доп. НАН України. – 2019. – № 2. – С. 45 – 51.
5. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А.С.К., 2004. – 672 с.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т. 1. Общие вопросы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 374 с.
7. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т. 2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 536 с.
8. Babich S.Yu., Dikhtyaruk N.N., Dekhtyar S.V. Contact Problem for Two Identical Stripes with Initial Stresses Reinforced by Periodically Arranged Fastenings // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 585 – 595.
9. Glukhov A.Yu. Axisymmetric Waves in Prestressed Incompressible Laminated Composite Materials with Sliding Layers // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 4. – P. 399 – 410.
10. Guz A.N. Elastic Waves in Laminated Periodic Bodies with Initial (residual) Stresses // Book of Abst. of ICIAM 95, Hamburg, 3 – 7 July. – 1995. – P. 173.
11. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
12. Guz A.N., Bagno A.M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 585 – 595.
13. Guz A.N., Bagno A.M. Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 1 – 12.
14. Guz A.N., Sitenok N.A., Zhuk A.P. Axially Symmetric Elastic Waves in a Laminated Compressible Composite Material with Initial Stresses // Sov. Appl. Mech. – 1984. – **20**, N 7. – P. 589 – 595.

Поступила 24.12.2019

Затверджена до друку 15.12.2020