В.Д.Кубенко

НЕСТАЦІОНАРНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ В ОСЕСИМЕТРИЧНІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ПРИ ЗМІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

Інститут механіки С.П. Тимошенко НАНУ
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua

Abstract. The problem of displacement determining an elastic half-space under nonstationary normal loading is solved. The mixed boundary problem is formulated which solution is built with the use of Laplace and Hankel integral transforms. The exact inverse of the transforms is evaluated. As a result, the analytical solution is obtained which determines the normal displacement in an arbitrary point of the axis of symmetry at an arbitrary moment. The concrete numerical calculations are shown for the displacement on the symmetry axis under uniform and non-uniform loading.

Key words: elastic half-space, non-stationary loading, mixed conditions, exact solution, displacement.

Вступ.

Деформування пружного півпростору при дії розподіленого або сконцентрованого імпульсу напружень досліджувалося в ряді робіт [6, 7, 16, 17]. У роботі [8] визначення переміщень зведено до обчислення інтегралів, що містять еліптичні інтеграли у підінтегральних виразах. Для переміщень на осі симетрії зазначені інтеграли зведено до інтегралів від елементарних функцій. У публікаціях [13, 14] аналогічно обчислюються напруження. Значна увага задачам такого роду приділена в монографіях [5, 15, 18].

У роботах [9, 10] отримано точний аналітичний розв'язок *плоскої* задачі для акустичного й пружного півпростору та шару, підданих дії нестаціонарного тиску на певній ділянці поверхні. Розв'язок отримано при змішаних граничних умовах. У публікації [11] отримано перші чотири відбиття в точному розв'язку для пружного шару. Для шару рідини на твердій основі точний розв'язок дано в роботі [12].

У даній роботі отримано точний розв'язок нестаціонарної *осесиметричної* задачі для пружного півпростору при змішаних граничних умовах, згідно з якими на площині границі задано нормальну складову вектора напружень й дотичну складову вектора переміщення. Застосовуються інтегральні перетворення Лапласа й Ханкеля (Бесселя), обернення яких вдається виконати для нестаціонарного навантаження загального типу й одержати вирази для пружного переміщення в явному вигляді. Шукане нормальне переміщення на осі симетрії задачі представлено в елементарних функціях.

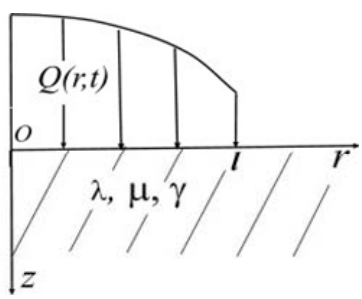

Рис. 1

§1. Формулювання задачі.

Розглядається однорідний ізотропний пружний півпростір, який віднесений до циліндричних координат, вісь r яких спрямована уздовж границі, вісь z в глибину (рис. 1). Навантаження у вигляді нормального напруження $\sigma_{zz} = Q(t,r)$, симетричне стосовно осі z, виникає на поверхні півпростору в певний початковий момент часу $t = 0$ і у загальному випадку є функцією часу й координати r.

Задача формулюється в безрозмірних позначеннях

$$\overline{r}=\frac{x}{h};\ \ \overline{z}=\frac{z}{h};\ \ \overline{u}_j=\frac{u_j}{h};\ \ \overline{t}=\frac{c_p t}{h};\ \ \overline{\sigma}_{jk}=\frac{\sigma_{jk}}{\lambda+2\mu};\ \ \alpha=\frac{c_p}{c_0};\quad \beta=\frac{c_s}{c_0};$$

$$b=\frac{\beta}{\alpha};\quad j,k=r,z;\ \ c_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\gamma}};\ c_s=\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}},$$

значок над якими нижче буде опущено. Тут h, c_0 – певні характерні лінійний розмір і швидкість; γ – густина матеріалу; λ, μ – пружні сталі Ламе; c_p, c_s – відповідно швидкості поширення хвиль розширення і хвиль зсуву; σ_{jk} – компоненти тензора напружень, u_j – компоненти вектора переміщень.

Поведінка пружного середовища у випадку осесиметричної задачі теорії пружності описується скалярними потенціалами Φ і Ψ, які задовольняють хвильовим рівнянням [3]

$$\Delta\Phi-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0;\ \ \Delta\Psi-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0;\quad \Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

та пов'язані з пружними переміщеннями і напруженнями співвідношеннями

$$\begin{gathered}
u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z};\ \ u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r};\\
\sigma_{zz}=\left(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+2\beta^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^2\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}\right);\\
\sigma_{rr}=\left(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+2\beta^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^2\partial z}\right);\\
\sigma_{rz}=2\beta^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\frac{1}{2\beta^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right).
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Як граничні умови при $z=0$ розглянемо змішані умови четвертої крайової задачі теорії пружності, згідно з яких на границі $z=0$ задаються нормальне напруження і дотичне переміщення

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0}=Q(x,t);\quad u_r\big|_{z=0}=0. \tag{1.3}$$

Тут *Q(x,t)* – діюче навантаження. Крім того, виконуються умови затухання, породжені нестаціонарним навантаженням хвильових збурень на нескінченності. Початкові умови для потенціалів нульові.

В просторі зображень за Лапласом і Бесселем (Ханкелем) [1, 2, 4] хвильові рівняння з урахуванням початкових умов набувають вигляду

$$\frac{\partial^2\Phi^{LB}}{\partial z^2}-\left(\frac{s^2}{\alpha^2}+\xi^2\right)\Phi^{LB}=0;\ \ \frac{\partial^2\Psi^{LB}}{\partial z^2}-\left(\frac{s^2}{\beta^2}+\xi^2\right)\Psi^{LB}=0. \tag{1.4}$$

Тут s – параметр перетворення Лапласа по t; ξ – параметр перетворення Ханкеля по r. Верхні індекси L і B при функціях означають, відповідно, зображення даної функції в просторі перетворень Лапласа і Ханкеля. Оператори прямого і оберненого перетворень позначимо $L\{\}$ і $L^{-1}\{\}$, $B\{\}$ і $B^{-1}\{\}$.

§2. Розв'язок у зображеннях.

Загальний розв'язок рівнянь (1.4), що задовольняє умові затухання при $z \to \infty$, записується у вигляді

$$\Phi^{LB} = A(s,\xi)e^{-\frac{z}{\alpha}P};\ \Psi^{LB} = C(s,\xi)e^{-\frac{z}{\beta}S};\ P = \sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2};\ S = \sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}. \quad (2.1)$$

Тут $A(s,\xi),\ C(s,\xi)$ – невідомі функції.

Задовольняючи граничні умови (1.3), в результаті одержимо в просторі зображень вираз для нормального переміщення u_z

$$u_z^{LB} = Q^{LB}(s,\xi)\left[-\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha^2\xi^2}{s^2}\right)\frac{e^{-\frac{z}{\alpha}P}}{P}+\beta\frac{\xi^2}{s^2}\frac{e^{-\frac{z}{\beta}S}}{S}\right] \quad (2.2)$$

і для напруження σ_{zz}

$$\sigma_{zz}^{LB} = Q^{LB}(s,\xi)\left[\left(1+2\beta^2\frac{\xi^2}{s^2}\right)e^{-zP}-2\beta^2\frac{\xi^2}{s^2}e^{-zS}\right].$$

Обмежимося обчисленням переміщення u_z (підхід, що використовується для обчислення напружень, відрізняється від викладеного нижче, зокрема, використанням апарату узагальнених функцій) і для простоти зосередимось на досить типовому випадку зовнішньої дії, коли навантаження прикладене в крузі з радіусом l, а його залежність від часу задається одиничною функцією Хевісайда $H(t)$

$$Q(t,r) = q(r)H(l-r)H(t). \quad (2.3)$$

Функція $q(r)$ визначає характер розподілу напруження вздовж осі r. Якщо вдасться одержати розв'язок задачі для навантаження (2.3), то для більш складної залежності від часу результат можна знайти застосуванням згортки за часом з розв'язком на основі (2.3).

Перепишемо u_z^{LB} у вигляді, зручному для подальшого використання,

$$u_z^{LB}(s,\xi,z) = q^B(\xi)\chi^{LB}(s,\xi,z);\ q^B(\xi) = B\{H(l-r)Q(r)\};$$
$$\chi^{LB}(s,\xi,z) = -\frac{1}{\alpha s}\frac{e^{-\frac{z}{\alpha}P}}{P}-\alpha\frac{\xi^2}{s^3}\frac{e^{-\frac{z}{\alpha}P}}{P}+\beta\frac{\xi^2}{s^3}\frac{e^{-\frac{z}{\beta}S}}{S}. \quad (2.4)$$

§3. Обернення перетворень.

Задача тепер полягає в оберненні інтегральних перетворень. Тут і нижче вважається можливою зміна порядку перетворень.

Для інверсії перетворення Ханкеля окремих доданків у виразі χ^{LB} застосуємо табличне співвідношення [2]

$$B^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{z}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}}{\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}\right) = \frac{e^{-\frac{s}{\alpha}\sqrt{r^2+z^2}}}{\alpha\sqrt{r^2+z^2}}$$

і відому властивість перетворення

$$B^{-1}\left(\xi^2 f^B(\xi)\right) = -\left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}\right).$$

Обернення перетворення Лапласа виконаємо, скориставшись формулою [1]

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-s\frac{\sqrt{r^2+z^2}}{\alpha}}}{s}\right)=H\left(\alpha t-\sqrt{r^2+z^2}\right)$$

і її наслідками, що витікають з правила інтегрування оригіналу. В результаті вказаних операцій оригінал функції $\chi(t,\,r,\,z)$ одержимо у вигляді

$$\chi(t,\,r,\,z)=-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{r^2-t^2\alpha^2}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}+3\frac{\alpha^2t^2z^2}{\left(r^2+z^2\right)^{5/2}}\right)H\left(\alpha t-\sqrt{r^2+z^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\beta^3}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}+\frac{z^2+\beta^2t^2}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}-3\frac{\beta^2t^2z^2}{\left(r^2+z^2\right)^{5/2}}\right)H\left(\beta t-\sqrt{r^2+z^2}\right). \tag{3.1}$$

Якщо повернутися до виразу (2.4), можна помітити, що інверсію перетворення Лапласа для $u_z^{LB}(s,\xi,z)$ вже виконано, оскільки функція $q^B(\xi)$ не залежить від s, а множник $\chi(t,r,z)$ має вигляд (3.1). Інверсію перетворення Ханкеля запишемо у вигляді згортки, що реалізується за допомогою подвійної згортки Фур'є (нижче x, y – декартові координати в площині $z=0$) [4]

$$u_z(t,r,z)=B^{-1}\left(q^B(\xi)\chi^B(t,\xi,z)\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H\left(l-\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)q\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)\chi\left(t,\sqrt{\lambda^2+\zeta^2},z\right)d\lambda d\zeta. \tag{3.2}$$

Тут

$$\chi(t,\rho,z)=H\left(t-\frac{1}{\alpha}\sqrt{\rho^2+z^2}\right)\chi^{(\alpha)}(t,\rho,z)+H\left(t-\frac{1}{\beta}\sqrt{\rho^2+z^2}\right)\chi^{(\beta)}(t,\rho,z),$$
$$\chi^{(\alpha)}(t,\rho,z)=-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\rho^2-t^2\alpha^2}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}+3\frac{t^2z^2\alpha^2}{\left(\rho^2+z^2\right)^{5/2}}\right),$$
$$\chi^{(\beta)}(t,\rho,z)=-\frac{1}{2\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}+\frac{z^2+\beta^2t^2}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}-3\frac{\beta^2t^2z^2}{\left(\rho^2+z^2\right)^{5/2}}\right), \tag{3.3}$$
$$\rho=\sqrt{\lambda^2+\zeta^2}.$$

Формули (3.2), (3.3) формально дають шуканий розв'язок. Зручний в практичному відношенні розв'язок одержимо, якщо вдасться конкретизувати область інтегрування. Можна помітити, що добуток функцій Хевісайда в підінтегральному виразі (3.2) визначає у площині змінних λ, ζ область інтегрування як перетинання двох кругів:

1) круга, обмеженого колом L_a радіуса $a=\sqrt{\alpha^2t^2-z^2}$ (для члена з $\chi^{(\alpha)}$) з центром у початку координат $(0,\,0)$

$$\lambda^2+\zeta^2<a^2;\;\; a=\sqrt{\alpha^2t^2-z^2}, \tag{3.4}$$

або круга, обмеженого колом L_b радіуса $b=\sqrt{\beta^2t^2-z^2}$ (для члена з $\chi^{(\beta)}$) з центром у початку координат $(0,0)$

$$\lambda^2+\zeta^2<b^2;\;\; b=\sqrt{\beta^2t^2-z^2}\;;$$

2) круга, обмеженого колом L_l радіуса l з центром в точці (x, y) на відстані $r=\sqrt{x^2+y^2}$ від початку координат

$$(\lambda-x)^2+(\zeta-y)^2<l^2. \tag{3.5}$$

З урахуванням цього, вираз (3.2) можна переписати у вигляді суми двох доданків, перший з яких визначає внесок хвилі розширення, другий – хвилі зсуву

$$u_z(t,r,z)=u_z^{(\alpha)}(t,r,z)+u_z^{(\beta)}(t,r,z);$$

$$u_z^{(\alpha)}(t,r,z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega_\alpha}\tilde{q}\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)\chi^{(\alpha)}\left(t,\sqrt{\lambda^2+\zeta^2},z\right)d\lambda d\zeta; \tag{3.6}$$

$$u_z^{(\beta)}(t,r,z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega_\beta}\tilde{q}\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)\chi^{(\beta)}\left(t,\sqrt{\lambda^2+\zeta^2},z\right)d\lambda d\zeta\ .$$

Тут $\Omega_\alpha=L_l\cap L_a$, $\Omega_\beta=L_l\cap L_\beta$, причому тут і нижче круги і кола, що їх обмежують, позначені однаково.

§4. Визначення області інтегрування.

Зосередимося на обчисленні $u_z^{(\alpha)}(t,r,z)$ у виразі (3.6), маючи на увазі, що для доданку $u_z^{(\beta)}(t,r,z)$ ця процедура аналогічна.

В залежності від взаємного розташування кругів L_a і L_l, перетин яких визначає область інтегрування, мають місце чотири можливі випадки виду області Ω_α (заштрихована на рис. 2):

1) $r>a+l$; 2) $a-l<r<a+l,\ a>l$; 3) $0<r<a-l,\ a>l$; 4) $0<r<l-a,\ a<l$.

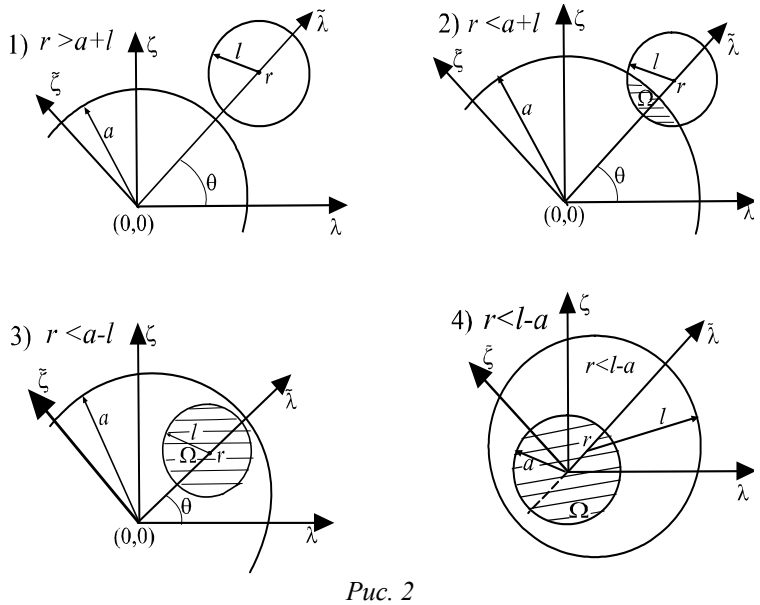

Рис. 2

Розглянемо кожний з цих випадків окремо.

1) $r>a+l$.

Вищезгадані круги L_a і L_l не пересікаються ($\Omega_\alpha=\varnothing$ – порожня множина) і відповідний інтеграл (3.6) дорівнює нулю, тобто

$$u_{z1}^{(\alpha)}(t,r,z)=0. \tag{4.1}$$

При цьому справедливі нерівності $r>l;\ t<\sqrt{(r-l)^2+z^2}\,/\,\alpha$.

2) $a-l<r<a+l$.

Для зручності перейдемо до нової системи координат $(\tilde{\lambda},\tilde{\zeta})$ з тим самим початком (0,0) і віссю абсцис $\tilde{\lambda}$, котра проходить через центр кола L_l , за допомогою лінійного перетворення повороту системи координат на кут $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}\\ \tilde{\zeta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \zeta\end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Перетворення (4.2) зберігає лінійні розміри. На рис. 3 представлено фрагмент взаємного розташування кругів L_l і L_α в системі координат $(\tilde{\lambda},\tilde{\zeta})$ у даному випадку. Абсциса точки перетину кіл $\tilde{\lambda}^*$ дорівнює $\lambda^*=(r^2+a^2-l^2)/2r$, поточна ордината точок кола L_l є $\tilde{\zeta}=\pm\sqrt{l^2-(r-\tilde{\lambda})^2}$.

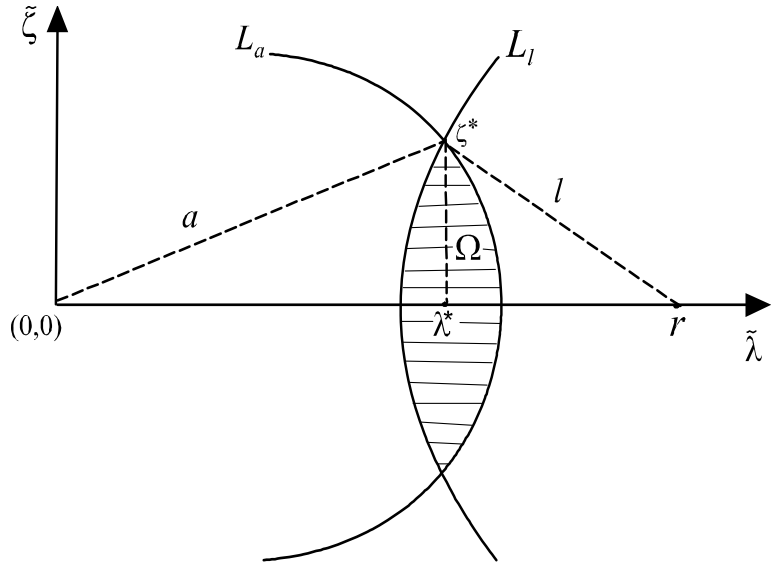

Рис. 3

Для цього випадку подвійний інтеграл (3.6) з врахуванням симетрії області інтегрування Ω_α відносно осі $\tilde{\lambda}$ можна переписати як суму наступних повторних інтегралів:

$$u_{z2}^{(\alpha)}(t,r,z)=2\left[\int_{r-1}^{\tilde{\lambda}^*}d\tilde{\lambda}\int_0^{\sqrt{l^2-(r-\tilde{\lambda})^2}}\tilde{q}\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)\chi^{(\alpha)}\left(t,\sqrt{\tilde{\lambda}^2+\tilde{\zeta}^2},z\right)d\tilde{\zeta}+\right. \tag{4.3}$$

$$\left.+\int_{\tilde{\lambda}^*}^{a}d\tilde{\lambda}\int_0^{\sqrt{a^2-\tilde{\lambda}^2}}\tilde{q}\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)\chi^{(\alpha)}\left(t,\sqrt{\tilde{\lambda}^2+\tilde{\zeta}^2},z\right)d\tilde{\zeta}\right].$$

При цьому повинні виконуватись нерівності $\sqrt{(r-l)^2+z^2}\,/\,\alpha<t<\sqrt{(r+l)^2+z^2}\,/\,\alpha$.

3) $0 < r < a - l$.

Областю інтегрування є круг L_l і переміщення визначається формулою

$$u_{z3}^{(\alpha)}(t,r,z) = 4\int_{r}^{r+l} d\tilde{\lambda} \int_{0}^{\sqrt{l^2-(\tilde{\lambda}-r)^2}} \tilde{q}\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)\chi^{(\alpha)}\left(t,\sqrt{\tilde{\lambda}^2+\tilde{\zeta}^2},z\right)d\tilde{\zeta}, \quad (4.4)$$

яка справедлива при $t > \sqrt{(r+l)^2+z^2}$. Тут враховано симетрію області інтегрування відносно осей $\tilde{\lambda},\ \tilde{\zeta}$.

4) $0 < r < l - a.$

Областю інтегрування являється круг L_α . Ордината кола L_α в координатах $(\tilde{\lambda},\ \tilde{\zeta})$ має значення $\zeta_a = \pm\sqrt{a^2-\tilde{\lambda}^2}$, і тоді переміщення можна представити наступним повторним інтегралом:

$$u_{z4}^{(\alpha)}(t,r,z) = 4\int_{0}^{a} d\tilde{\lambda} \int_{0}^{\sqrt{a^2-\tilde{\lambda}^2}} \tilde{q}\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\zeta)^2}\right)\chi^{(\alpha)}\left(t,\sqrt{\tilde{\lambda}^2+\tilde{\zeta}^2},z\right)d\tilde{\zeta}. \quad (4.5)$$

При цьому повинна виконуватись нерівність $0 < t < \sqrt{(l-r)^2+z^2}$. В (4.5) враховано симетрію області відносно осей координат.

В результаті частину шуканого переміщення, яка відповідає хвилі розширення, можна записати наступним чином:

$$u_z^{(\alpha)}(t,r,z) = \begin{cases} 0, & r > l, \quad t < \sqrt{(r-l)^2+z^2}\,/\,\alpha; \\ u_{z2}^{(\alpha)}(t,r,z), & r > l, \quad \sqrt{(r-l)^2+z^2}\,/\,\alpha < t < \sqrt{(r+l)^2+z^2}\,/\,\alpha; \\ u_{z3}^{(\alpha)}(t,r,z), & r > l, \quad t > \sqrt{(r+l)^2+z^2}\,/\,\alpha; \\ u_{z4}^{(\alpha)}(t,r,z), & r < l, \quad t < \sqrt{(l-r)^2+z^2}\,/\,\alpha. \end{cases} \quad (4.6)$$

Тут складові $u_{zi}^{(\alpha)}(t,\ r,z),\ i = 2,\ldots,4$ задано виразами (4.3) – (4.5). Аналогічно визначається частина переміщення $u_z^{(\beta)}(t,r,z)$, що відповідає хвилі зсуву.

У ряді випадків вдається отримати аналітичний вираз для невизначеного інтегралу від функцій $\chi^{(\alpha)}(t,\ r,z),\ \chi^{(\beta)}(t,r,z)$. Це дозволяє зробити внутрішнє інтегрування в повторних інтегралах (4.3) – (4.5). Наприклад, якщо діюче навантаження однорідне, тобто $\tilde{q} = 1$, вирази $u_{zi}^{(\alpha)}(t,\ r,\ z),\ i = 2,\ldots,4$ набувають більш простого вигляду

$$u_{z2}^{(\alpha)}(t,r,z) = 2\left[\int_{r-l}^{\frac{r^2+\alpha^2t^2-z^2-l^2}{2r}} F_1^{(\alpha)}(t,r,z,\lambda)\,d\lambda + \int_{\frac{r^2+\alpha^2t^2-z^2-l^2}{2r}}^{\sqrt{\alpha^2t^2-z^2}} F_0^{(\alpha)}(t,z,\lambda)\,d\lambda\right]; \quad (4.7)$$

$$u_{z3}^{(\alpha)}(t,r,z) = 4\int_{r}^{r+l} F_1^{(\alpha)}(t,r,z,\lambda)\,d\lambda;\ \ u_{z3}^{(\alpha)}(t,r,z) = 4\int_{0}^{\sqrt{\alpha^2t^2-z^2}} F_0^{(\alpha)}(t,z,\lambda)\,d\lambda.$$

При цьому функції $F_0^{(\alpha)},\ F_1^{(\alpha)}$ містять лише елементарні функції

$$F_0^{(\alpha)}(t,z,\lambda)=-\frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{\alpha t\left(z^2-\lambda^2\right)\sqrt{\alpha^2t^2-z^2-\lambda^2}}{\left(\lambda^2+z^2\right)^2}+\ln\left(\frac{\alpha t+\sqrt{\alpha^2t^2-z^2-\lambda^2}}{\sqrt{\lambda^2+z^2}}\right)\right];$$

$$F_1^{(\alpha)}(t,r,z,\lambda)=-\frac{1}{2\alpha^2}\left\{\frac{\sqrt{l^2-(r-\lambda)^2}}{\left(\lambda^2+z^2\right)\sqrt{l^2-r^2+2r\lambda+z^2}}\left[\frac{2\alpha^2z^2t^2}{\lambda^2+z^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha^2z^2t^2}{l^2-r^2+2r\lambda+z^2}-\alpha^2t^2-z^2\right]+\ln\left(\frac{\sqrt{l^2-(r-\lambda)^2}+\sqrt{l^2-r^2+2r\lambda+z^2}}{\sqrt{\lambda^2+z^2}}\right)\right\}.$$

Частина переміщення u_z, що визначається хвилею зсуву, має вигляд

$$u_z^{(\beta)}(t,r,z)=\begin{cases}0, & r>l, & t<\sqrt{(r-l)^2+z^2}\,/\,\beta;\\ u_{z2}^{(\beta)}(t,r,z) & r>l, & \sqrt{(r-l)^2+z^2}\,/\,\beta<t<\sqrt{(r+l)^2+z^2}\,/\,\beta;\\ u_{z3}^{(\beta)}(t,r,z) & r>l, & t>\sqrt{(r+l)^2+z^2}\,/\,\beta;\\ u_{z4}^{(\beta)}(t,r,z) & r<l & t<\sqrt{(l-r)^2+z^2}\,/\,\beta.\end{cases}\qquad(4.8)$$

Тут

$$u_{z2}^{(\beta)}(t,r,z)=2\left[\int\limits_{r-b}^{\frac{r^2+\beta^2t^2-z^2-l^2}{2r}}F_1^{(\beta)}(t,r,z,\lambda)\,d\lambda+\int\limits_{\frac{r^2+\beta^2t^2-z^2-l^2}{2r}}^{\sqrt{\beta^2t^2-z^2}}F_0^{(\beta)}(t,z,\lambda)\,d\lambda\right];$$

$$u_{z3}^{(\beta)}(t,r,z)=4\int\limits_{r}^{r+b}F_1^{(\beta)}(t,r,z,\lambda)\,d\lambda;\ u_{z4}^{(\beta)}(t,r,z)=4\int\limits_{0}^{\sqrt{\beta^2t^2-z^2}}F_0^{(\beta)}(t,z,\lambda)\,d\lambda;$$

$$F_0^{(\beta)}(t,\,z,\,\lambda)=-\frac{1}{2\beta^2}\left[-\frac{\beta t\left(z^2-\lambda^2\right)\sqrt{\beta^2t^2-z^2-\lambda^2}}{\left(\lambda^2+z^2\right)^2}+\ln\left(\frac{\beta t+\sqrt{\beta^2t^2-z^2-\lambda^2}}{\sqrt{\lambda^2+z^2}}\right)\right];$$

$$F_1^{(\beta)}(t,\,r,\,z,\lambda)=-\frac{1}{2\beta^2}\left\{-\frac{\sqrt{l^2-(r-\lambda)^2}}{\left(\lambda^2+z^2\right)\sqrt{l^2-r^2+2r\lambda+z^2}}\left[\frac{2\beta^2z^2t^2}{\lambda^2+z^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\beta^2z^2t^2}{l^2-r^2+2r\lambda+z^2}-\beta^2t^2-z^2\right]+\ln\left(\frac{\sqrt{l^2-(r-\lambda)^2}+\sqrt{l^2-r^2+2r\lambda+z^2}}{\sqrt{\lambda^2+z^2}}\right)\right\}.$$

Таким чином, вирази (3.6), (4.6), (4.7) дають розв'язок даної задачі у вигляді простих інтегралів, під знаком яких утримуються вирази у вигляді елементарних функцій. Це дозволяє сподіватися, що обчислення шуканих характеристик не зустріне труднощів.

§5. Випадок $r = 0$.

Найбільш простим для обчислень є переміщення на осі симетрії задачі. Для точок, що лежать на осі z, переміщення визначимо, поклавши у виразі (3.2) $x = y = 0$. Одержимо

$$u_z(t, 0, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(l - \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}\right) q\left(\sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}\right) \chi\left(t, \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}, z\right) d\lambda\, d\zeta. \quad (5.1)$$

Змінні інтегрування у виразі (5.1) фігурують лише під знаком радикала $\sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}$, тому в площині λ, ζ доцільно перейти до полярних координат ρ, θ : $\rho = \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} \zeta / \xi$. В результаті одержимо формулу

$$u_z(t, 0, z) = \int_0^{\infty} H(l - \rho) q(\rho) \chi(t, \rho, z) \rho d\rho, \quad (5.2)$$

в якій функція $\chi(t, \rho, z)$ задана співвідношеннями (3.3).

З (3.3) і (5.2) з врахуванням властивостей функції Хевісайда випливає вираз для переміщення u_z на осі симетрії

$$\begin{aligned} u_z(t, 0, z) = H(\alpha t - z)\Bigg[& H\left(\sqrt{l^2 + z^2} - \alpha t\right) \int_0^{\sqrt{\alpha^2 t^2 - z^2}} q(\rho) \chi^{(\alpha)}(t, \rho, z) \rho d\rho + \\ & + H\left(\alpha t - \sqrt{b^2 + z^2}\right) \int_0^{a} q(\rho) \chi^{(\alpha)}(t, \rho, z) \rho d\rho \Bigg] + \\ + H(\beta t - z)\Bigg[& H\left(\sqrt{l^2 + z^2} - \beta t\right) \int_0^{\sqrt{\beta^2 t^2 - z^2}} q(\rho) \chi^{(\beta)}(t, \rho, z) \rho d\rho + \\ & + H\left(\beta t - \sqrt{b^2 + z^2}\right) \int_0^{a} q(\rho) \chi^{(\beta)}(t, \rho, z) \rho d\rho \Bigg]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Вираз (5.3) дозволяє обчислити переміщення при довільному розподіленні навантаження вздовж r, $0 < r < l$. В багатьох випадках інтегрування в (5.3) може бути виконано аналітично. Нижче в якості прикладів наведено два характерні випадки.

Випадок 1. ***Однорідне навантаження*** $q(r) = 1$. Інтеграли в (5.3) легко беруться, в результаті чого одержуємо наступний вираз для нормального переміщення на осі симетрії:

$$u_z(t, 0, z) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha t - z}{\alpha^2}; & \dfrac{1}{\alpha} z \le t \le \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{l^2 + z^2}; \\ \dfrac{z}{\alpha^2} - \dfrac{l^4 + l^2\left(\alpha^2 t^2 + z^2\right) + 2z^2\left(l^2 + z^2\right)}{2\alpha^2\left(l^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}; & \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{l^2 + z^2} < t < \dfrac{1}{\beta}\sqrt{l^2 + z^2}; \\ -\dfrac{2\beta^2 z^2 - 2z\sqrt{l^2 + z^2}\,\beta^2 + \beta^2 l^2 + l^2\alpha^2}{2\alpha^2\beta^2\sqrt{l^2 + z^2}}; & t > \dfrac{1}{\beta}\sqrt{l^2 + z^2}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Статичне значення переміщення в точці $r = z = 0$ досягається при $t \ge \frac{1}{\beta}\sqrt{l^2 + z^2}$ і має вигляд

$$u_z\left(\beta t \ge \sqrt{l^2 + z^2}, 0, 0\right) = -\frac{l\left(\alpha^2 + \beta^2\right)}{2\alpha^2\beta^2}. \tag{5.5}$$

Рис. 4, 5 ілюструють нормальне переміщення на осі z при $q(r) = 1$. При обчисленнях параметр, що визначає розмір області прикладання навантаження, вибрано рівним 1: $l = 1$.

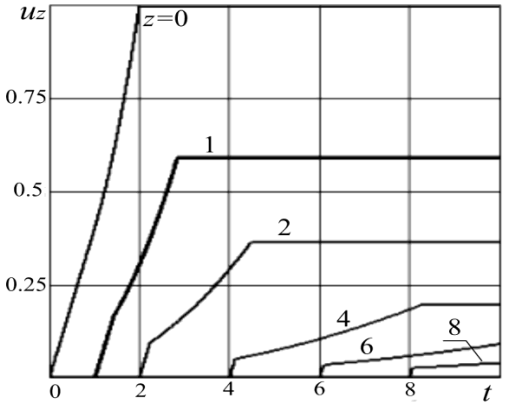

Рис. 4

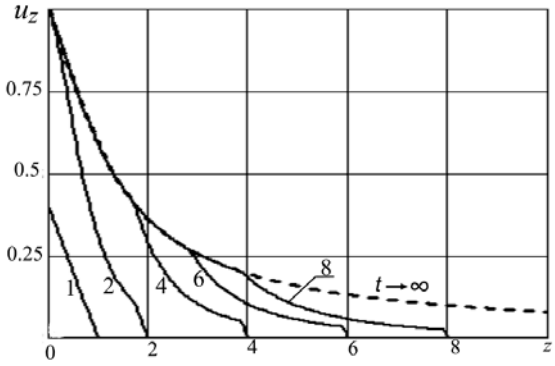

Рис. 5

Були використані також наступні вхідні значення параметрів задачі:

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,5,\ h = 1,\ \ c_0 = c_p.$$

На рисунках переміщення віднесене до його статичного значення на поверхні $z = 0$ (5.5).

Рис. 4 ілюструє розвиток переміщення за часом в фіксованих точках осі z: $z = 0$; 1; 2; 4; 6; 8. Як випливає з формули (5.4) і можна бачити з графіків, переміщення розвивається лінійно з моменту, коли хвиля розширення приходить в точку, що розглядається. Перший злам графіка, який добре видно, зокрема, при $z = 2$ і $z = 4$, обумовлений приходом в точку хвилі розширення від границі області прикладання навантаження $r = l$. Статичне значення досягається, коли в цю точку приходить фронт хвилі зсуву, яка збуджується на краю області навантаження $r = l$.

Рис. 5 ілюструє розподіл переміщення вздовж осі z у фіксовані моменти часу: $t = 1;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ t \to \infty$. Можна помітити, що всі криві, які одержано при скінченному значенні часу t, повторюють граничну криву, що відповідає $t \to \infty$ аж до точки на осі z, в якій в момент часу, що розглядається, знаходиться фронт хвилі зсуву.

Випадок 2. Квадратична незалежність $q(r) = 1 - (r^2 / l^2)$.

З виразу (5.3), виконавши необхідні аналітичні перетворення, одержимо нормальне переміщення на осі z

$$u_z(t,0,z) = u_z^{\alpha}(t,0,z) + u_z^{\beta}(t,0,z), \tag{5.6}$$

де

$$u_z^{\alpha}(t,0,z) = H(\alpha t - z)\left\{\begin{array}{c} H\left(\sqrt{l^2+z^2} - \alpha t\right)\dfrac{\left[(4z-\alpha t)(\alpha t - z) + 3l^2\right](\alpha t - z)}{3\alpha^2 l^2} + \\ +H\left(\alpha t - \sqrt{l^2+z^2}\right)\dfrac{1}{3\alpha^2 l^2}\left[\begin{array}{c} z\left(4z^2+3l^2+6\alpha^2 t^2\right) - \\ -\dfrac{l^4 + z^2\left(5l^2+4z^2\right) + 3\alpha^2 t\left(l^2+2z^2\right)}{\sqrt{l^2+z^2}} \end{array}\right] \end{array}\right\};$$

$$u_z^{\beta}(t,0,z) = H(\beta t - z)\left\{\begin{array}{c} H\left(\sqrt{l^2+z^2} - \beta t\right)\dfrac{2(\beta t - z)^3}{3l^2\beta^2} - \\ -H\left(\beta t - \sqrt{l^2+z^2}\right)\dfrac{1}{l^2}\left[\begin{array}{c} \dfrac{\left(l^2-2z^2\right)\sqrt{l^2+z^2} + 2z\left(z^2+3\beta^2 t^2\right)}{3l^2\beta^2} - \\ -\dfrac{3\beta^2 t^2\left(2z+l^2\right)}{3\beta^2 l^2\sqrt{l^2+z^2}} \end{array}\right] \end{array}\right\}.$$

При $z = 0$ маємо статичне значення $u_z\left(\beta t > \sqrt{l^2+z^2},\ 0, 0\right) = -\dfrac{l\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{3\alpha^2\beta^2}$, до якого віднесено $u_z(t,0,z)$ на нижченаведених рисунках.

На рис. 6 при l = 1 представлено розвиток переміщення з часом в точках осі z, а саме $z = 0;\ 1;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8$.

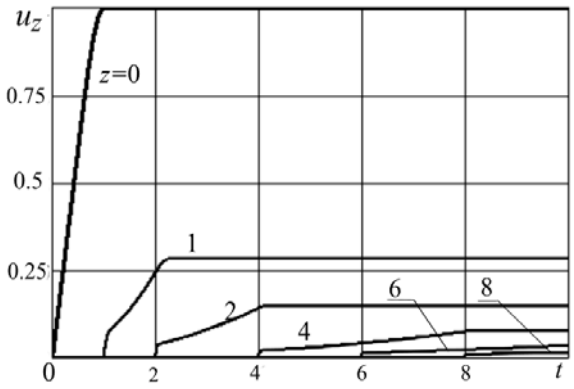

Рис. 6

Рис. 7 при тому ж значенні l (l = 1) показує розподіл переміщення вздовж осі z у фіксовані моменти часу $t = 1; 2; 4; 6; 8; t \to \infty$.

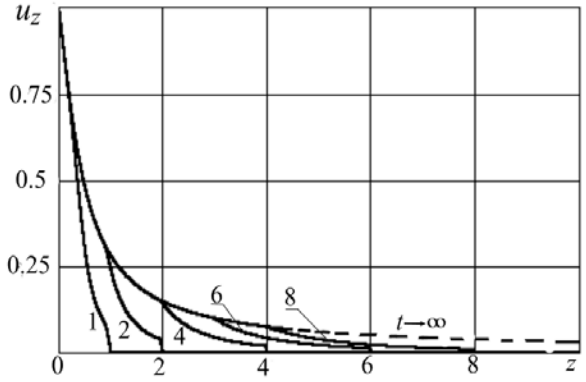

Рис. 7

Можна помітити, що характер поведінки кривих при $q(r) = 1 - r^2 / l^2$ має схожість з їх поведінкою у випадку $q(r) = 1$. Відмінність, однак, полягає в кількісних значеннях, якщо пам'ятати про величини, до яких віднесене переміщення. Так, відношення статичних значень переміщення в точці $r = z = 0$ при однорідному і неоднорідному навантаженнях дорівнює

$$\frac{u_{zHomog}(t \to \infty, 0, 0)}{u_{z\,Heter}(t \to \infty, 0, 0)} = \frac{3}{2}.$$

Зазначимо також, що представлені на рис. 4, 6 графіки аналогічні графікам, одержаним у роботі [8], що підтверджує можливість використання запропонованого підходу при обчисленні переміщення в глибині масиву в тому числі при традиційних умовах першої граничної задачі теорії пружності.

Висновки.

Розвинутий у роботі підхід до розв'язку нестаціонарної осесиметричної задачі при змішаних умовах на поверхні півпростору дозволив одержати простий вираз для нормального переміщення при довільному осесиметричному розподілі заданого навантаження. Для двох типових випадків одержано вираз для нормального переміщення на осі симетрії півпростору в елементарних функціях. Затрати комп'ютерного часу при цьому вимірюються секундами. Близькість наведених числових результатів і отриманих при розв'язку аналогічної задачі з граничними умовами в напруженнях дозволяє стверджувати, що даний підхід дає можливість при мінімальних обчислювальних зусиллях одержати інформацію про характерні особливості поля переміщень у внутрішніх точках пружного півпростору під дією нестаціонарного навантаження.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розв'язується задача про визначення деформованого стану пружного пів-простору, на границі якого діє нестаціонарне нормальне навантаження. Формулюється змішана крайова задача, розв'язок якої будується із застосуванням інтегральних перетворень Лапласа і Ханкеля. Виконане точне обернення перетворень. Як результат, одержано аналітичний розв'язок, що визначає нормальне переміщення в довільній точці півпростору в довільний момент часу. Конкретні числові розрахунки наведено для переміщення на осі симетрії задачі при однорідному і неоднорідному навантаженнях.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: пружний півпростір, нестаціонарне навантаження, змішані умови, переміщення.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: в 2-х томах. Т1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, 1969. – 344 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: в 2-х томах. Т2. Преобразование Бесселя. – Москва: Наука, 1969. – 328 с.
3. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
4. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
5. *Achenbach J.D.* Wave Propagation in Elastic Solids. – New York: North-Holland Publishing Company, 1973. – 425 p.
6. *Bresse L.F., Hutchins D.A.* Transient generation of elastic waves in solids by a disk-shaped normal force source // J. Acoust. Soc. Am. – 1989. – **86**. – P. 810 – 817.
7. *Cagniard L.P.E., Flinn E.A., Dix C.H.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. – New York: McGraw-Hill, 1962. – 282 p.
8. *Eason G.* The displacements produced in an elastic half-space by a suddenly applied surface force // IMA J. Appl. Math. –1966. –N 2. – P. 299 – 326.
9. *Kubenko V.D.* On a non-stationary load on the surface of a semiplane with mixed boundary conditions // ZAMM. –2015. – **95,** N12. – P. 1448 – 1460.
10. *Kubenko V.D.* Non-stationary stress state of an elastic layer at the mixed boundary conditions // ZAMM. – 2016. – **96,** N 12. – P. 1442 – 1456.
11. *Kubenko V.D.* Wave Formation in an Elastic Layer under Moving Non-Stationary Load // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 2. – P. 175 – 186.
12. *Kubenko V.D.* Non-Stationary Plane Problem for a Liquid Layer on a Rigid Base // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 470 – 486.
13. *Laturelle F.G.* The stresses produced in an elastic half-space by a normal step loading over a circular area: analytical and numerical results // Wave Motion. – 1990. – **12**. – P. 107 – 127.
14. *Laturelle F.G.* The stresses produced in an elastic half-space by a pressure pulse applied uniformly over a circular area: role of the pulse duration // Wave Motion. – 1991. –**14**. – P. 1 – 9.
15. *Miklovitz J.* The Theory of Elastic Waves and Waveguides. – New York: North-Holland Publishing Company, 1978. – 618 p.
16. *Mitra M.* Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. –1964. – **60**. – P. 683 – 696.
17. *Pekeris C.L.* The seismic surface pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1955. – **41.** – P. 469 – 480.
18. *Verruijt A.* An Introduction to Soil Dynamics. – London, New York: Springer, 2010. – 433 p.

Надійшла 05.11.2019 Затверджена до друку 15.12.2020