

Я.М.Григоренко<sup>1</sup>, Л.С.Рожок<sup>2</sup>

### АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОРОЖНИСТИХ ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРІВ З ОВАЛЬНИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕТИНОМ

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, 03057; [ayagrigenko1991@gmail.com](mailto:ayagrigenko1991@gmail.com);

<sup>2</sup> Національний транспортний університет,  
вул. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна; [r.l.s@ua.fm](mailto:r.l.s@ua.fm)

**Abstract.** The hollow cylinders with oval cross-sections are considered. The cross-section of these cylinders is described by the Cassini ovals equations. The cylinders are made of orthotropic and isotropic materials. The stress state of cylinders is investigated in 3D formulation with the use of analytical methods of separation of variables, approximation of functions with Fourier series, and the numerical method of discrete orthogonalization. The results of the solution are presented in plots and tables for the displacement and stress distributions. Analysis of the results is given.

**Key words:** Cassini ovals, discrete Fourier series, discrete-orthogonalization method, hollow orthotropic cylinder, oval cross-section, stress state.

#### Вступ.

Пластини та оболонки різної товщини і форми є невід'ємною частиною функціональних елементів конструкцій авіакосмічної галузі, машинобудування, медицини, будівництва споруд та ін. В складних умовах експлуатації вони перебувають під дією статичних і динамічних навантажень, вологи і температури; перебувають в електричному та магнітному полях [6, 8, 16 – 18, 21, 22]. Для підвищення опору зовнішньому впливу, при виготовленні таких конструкцій використовують композитні матеріали [13, 23].

Останнім часом в будівельній галузі та архітектурі широке застосування знаходять порожнисті секції еліптичного та овалового поперечного перетину [4, 7, 15, 25]. Використання таких секцій, з одного боку, носить естетичний характер через цікавий і незвичний вигляд, а з іншого – внаслідок різної жорсткості відносно основних осей, дозволяє орієнтувати подібні секції для найбільш ефективного опору навантаженням [24].

Дана стаття є продовженням досліджень, пов'язаних із застосуванням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [12] при розв'язуванні задач про напружений стан порожнистих циліндрів з некруговим поперечним перетином, виготовлених з ортотропного матеріалу [9 – 11].

#### §1. Постановка задачі.

В загальному випадку розглядаються пружні тіла у вигляді порожнистих циліндрів в криволінійній системі координат  $(s, t, \gamma)$ , яку побудовано таким чином: в ортогональній криволінійній системі координат  $(s, t)$  вибрано некругову циліндричну поверхню за поверхню відліку, а координата  $\gamma$  напрямлена вздовж нормалі до цієї поверхні [2].

За координатну поверхню розглядуваних циліндрів обрано серединну поверхню, рівновіддалену від бічних поверхонь. Середина поверхня в поперечному перетині задається рівнянням овалів Кассіні у вигляді [5, 19]

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\psi + \sqrt{\cos^2 2\psi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}}, \quad 0 \leq \frac{c}{a} < 1, \quad a \neq 0, \quad (1.1)$$

де  $\rho$  – полярний радіус;  $\psi$  – деякий кут в поперечному перетині ( $0 \leq \psi \leq 2\pi$ );  $c$  – половина відстані між фокусами;  $a$  – добуток відстаней між фокусами та довільною точкою. Відношення параметрів  $c$  та  $a$  дозволяє варіювати формою поперечного перетину, розглядаючи кругову, еліптичні та овальні форми. Так, при  $c = 0$  маємо кругову форму поперечного перетину (крива 1, рис. 1, а); при  $0 < c/a < 1/\sqrt{2}$  – еліптичні форми (криві 2, 3 рис. 1, а); при  $1/\sqrt{2} \leq c/a < 1$  – овальні (криві 4–6, рис. 1, б).

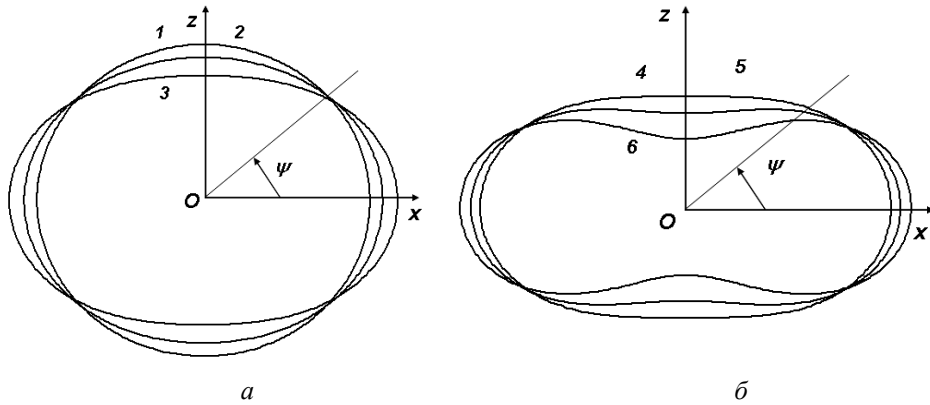


Рис. 1

Для прийнятої системи координат квадрат довжини лінійного елемента циліндра має вигляд

$$dS^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2 dt^2 + H_3^2 d\gamma^2,$$

де  $H_1 = H_3 = 1$ ,  $H_2 = 1 + [\gamma / R(t)]$  – параметри Ламе;  $R(t) = R$  – радіус кривизни на прямої серединної поверхні.

На торцях циліндра розглядається діафрагма, абсолютно жорстка в своїй площині і гнучка при виході з неї. Граничні умови на торцях будуть

$$\sigma_s = 0; \quad u_t = 0; \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = l. \quad (1.2)$$

Циліндри перебувають під дією внутрішнього тиску, розподіленого рівномірно уздовж координати  $t$ , який в напрямку твірної змінюється за законом

$$q_\gamma = q_0 \sin(\pi s / l) \quad (q_0 = \text{const}).$$

Таким чином, граничні умови на бічних поверхнях приймають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \\ \sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для циліндрів даного класу мають місце умови періодичності вздовж напрямної для всіх факторів напруженого стану ( $T$  – період)

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i(s, t, \gamma) = \sigma_\gamma^i(s, t + T, \gamma); \quad \tau_{s\gamma}^i(s, t, \gamma) = \tau_{s\gamma}^i(s, t + T, \gamma); \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots; \quad u_i^i(s, t, \gamma) = u_i^i(s, t + T, \gamma). \end{aligned}$$

За основні прийнято рівняння просторової лінійної теорії пружності для ортотропного тіла [20]. При побудові розв'язувальної системи диференціальних рівнянь прийнято наступні припущення: напрямна серединної поверхні є довільною неперервною кривою без особливостей і розривів; механічні характеристики можуть бути змінними по товщині, залишаючись сталими вздовж твірної; закон розподілу прикладеного навантаження може бути заданий довільним чином.

За розв'язувальні прийнято функції, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях (1.3) – три компоненти напруження  $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{t\gamma}$ , а також три компоненти переміщень  $u_\gamma, u_s, u_t$ .

З основних рівнянь отримано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами, що описує тривимірну крайову задачу в області  $0 \leq s \leq l; t_1 \leq t \leq t_2; \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$  і має вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t} + b_{22} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma + \\
&+ b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s}{\partial s} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \\
\frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma} - b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} - b_{11} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} - \\
&- b_{66} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) - (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s \partial t}; \\
\frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right) - \\
&- (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s \partial t} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) - b_{66} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s^2}; \\
\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma - c_1 \frac{\partial u_s}{\partial s} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \\
\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_t
\end{aligned} \tag{1.4}$$

з граничними умовами (1.2), (1.3). Коефіцієнти, що входять до системи рівнянь (1.4), визначаються через механічні характеристики матеріалу циліндрів наступним чином:

$$b_{11} = a_{22} a_{66} / \Omega; \quad b_{12} = -a_{12} a_{66} / \Omega; \quad b_{22} = a_{11} a_{66} / \Omega;$$

$$b_{66} = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) / \Omega; \quad \Omega = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) a_{66};$$

$$c_1 = -(b_{11} a_{13} + b_{12} a_{23}); \quad c_2 = -(b_{12} a_{13} + b_{22} a_{23}); \quad c_4 = a_{33} + c_1 a_{13} + c_2 a_{23};$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_s}; \quad a_{12} = -\frac{\nu_{st}}{E_t} = -\frac{\nu_{ts}}{E_s}; \quad a_{13} = -\frac{\nu_{s\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{\nu_{\gamma s}}{E_s}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_t}; \quad a_{23} = -\frac{\nu_{\gamma t}}{E_t} = -\frac{\nu_{t\gamma}}{E_\gamma}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_\gamma};$$

$$a_{44} = \frac{1}{G_{ly}}; a_{55} = \frac{1}{G_{sy}}; a_{66} = \frac{1}{G_{st}},$$

де  $E_s, E_t, E_\gamma$  – модулі пружності в напрямку осей координат;  $G_{ly}, G_{sy}, G_{st}$  – модулі зсуву;  $\nu_{ly}, \nu_{sy}, \nu_{st}, \nu_{yt}, \nu_{ys}, \nu_{ts}$  – коефіцієнти Пуассона.

## §2. Метод розв'язування.

Методика розв'язування отриманої тривимірної крайової задачі для системи рівнянь (1.4) з граничними умовами (1.2), (1.3) основана на використанні методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [3] і складається з п'яти етапів.

Для зниження розмірності задачі, в силу граничних умов (1.2), на першому етапі розв'язування використовується метод відокремлення змінних. Для цього компоненти навантаження і розв'язувальні функції подаються у вигляді розвинень в ряди Фур'є за координатою  $s$

$$X(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(t, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, t, \gamma) = \sum_{n=0}^N Y_n(t, \gamma) \cos \lambda_n s, \quad (2.1)$$

$$\text{де } X = \{\sigma_\gamma, \tau_{ly}, u_\gamma, u_t, q_\gamma\}, \quad Y = \{\tau_{sy}, u_s\}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad (0 \leq s \leq l).$$

Після підстановки рядів (2.1) в розв'язувальну систему рівнянь (1.4), відповідні граничні умови (1.3) і відокремлення змінних, тривимірна крайова задача зводиться до двовимірної щодо амплітуд розв'язувальних функцій рядів (2.1). При цьому, отримана система диференціальних рівнянь, як і вихідна (1.4), містить в собі члени, що являють собою добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які залежать від двох координат (напрямої та товщини) і не дозволяють відокремити змінні вздовж прямої циліндра. Для подолання цих труднощів на другому етапі розв'язування в розв'язувальній системі рівнянь замість зазначених членів записують доповняльні функції у вигляді (тут і далі індекс  $n$  опущено в позначеннях розв'язувальних функцій і компонент навантаження)

$$\begin{aligned} \varphi_1^j &= \frac{1}{H_2 R_t} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{sy}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2 R_t} u_\gamma \right\} (j = \overline{1, 5}); & \varphi_2^j &= \frac{1}{H_2 R_t} \{ \tau_{ly}; u_t \} (j = \overline{1, 2}); \\ \varphi_3^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\} (j = \overline{1, 3}); & \varphi_4^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{ly}}{\partial t}; \frac{\partial u_t}{\partial t}; \frac{1}{R_t} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\} (j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_5 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^3; & \varphi_6 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_3^3; & \varphi_7 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_4^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Розв'язувальна система рівнянь з доповняльними функціями (2.2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \varphi_1^1 + \lambda_n \tau_{ly} - \varphi_4^1 + b_{22} \varphi_1^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_1^4 + b_{22} \varphi_4^3; \\ \frac{\partial \tau_{sy}}{\partial \gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_\gamma - \varphi_1^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_1^3 + b_{11} \lambda_n^2 u_s - b_{66} \varphi_6 - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_4^2; \\ \frac{\partial \tau_{ly}}{\partial \gamma} &= -c_2 \varphi_3^1 - 2\varphi_2^1 - b_{22} \varphi_5 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_3^3 - b_{22} \varphi_7 - b_{66} \lambda_n^2 u_t; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \varphi_4^2 + c_1 \lambda_n u_s - c_2 \varphi_1^3; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \varphi_3^2 + \varphi_2^2$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \\ \sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{t\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формально коефіцієнти системи рівнянь (2.3) не залежать від координати напрямної  $t$  і дозволяють відокремити змінні в даному напрямку. Для цього на третьому етапі розв'язування задачі розв'язувальні, доповняльні функції і компоненти навантаження подаються у вигляді розвинень в ряди Фур'є уздовж координати  $t$

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k t; \quad \tilde{Y}(t, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k t; \quad \lambda_k = \frac{2k\pi}{T} \quad (t_1 \leq t \leq t_2); \\ \tilde{X} = \{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma\}; \quad \tilde{Y} = \{\tau_{t\gamma}, u_t, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Після підстановки рядів (2.5) в розв'язувальну систему рівнянь (2.3), граничні умови (2.4) і відокремлення змінних, приходимо до одновимірної крайової задачі щодо амплітуд рядів (2.5), яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + (c_2 - 1) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 + b_{22} \varphi_{1,k}^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22} \varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - b_{66} \varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{t\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66} \lambda_n^2 u_{t,k} - c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22} \varphi_{5,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22} \varphi_{7,k}; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,k} + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \\ \sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для інтегрування отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь, на четвертому етапі розв'язування задачі, використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації [1] одночасно для всіх гармонік розвинень (2.5). При цьому, оскільки кількість невідомих у розв'язувальній системі (2.6) перевищує кількість рівнянь (за рахунок введення доповняльних функцій), для замикання отриманої системи рівнянь, на кожному кроці застосування чисельного методу, амплітудні значення доповняльних функцій обчислюються за поточними значеннями амплітуд розв'язувальних функцій на п'ятому етапі розв'язування задачі, за допомогою апроксимації їх дискретними рядами Фур'є [14]. Для цього в ряді точок напрямної  $t_i$  ( $i = \overline{1, R}$ ), при фіксованому значенні координати товщини, згідно співвідношень

$$h_1^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} = \frac{1}{R_i(t_i) + \gamma_k}; \quad h_2^i = \frac{1}{H_2} = \frac{R_i(t_i)}{R_i(t_i) + \gamma_k};$$

$$\varphi_{1,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{ \sigma_{\gamma,m}; \tau_{s\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m} \} \cos \lambda_m t_i \quad (j = \overline{1, 4}); \quad \varphi_{1,i}^5 = (h_1^i)^2 \sum_{m=0}^M u_{\gamma,m} \cos \lambda_m t_i;$$

$$\varphi_{2,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{ \tau_{t\gamma,m}; u_{t,m} \} \sin \lambda_m t_i \quad (j = 1, 2);$$

$$\varphi_{3,i}^j = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{ \sigma_{\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m} \} \sin \lambda_m t_i \quad (j = \overline{1, 3});$$

$$\varphi_{4,i}^j = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{ \tau_{t\gamma,m}; u_{t,m} \} \cos \lambda_m t_i \quad (j = 1, 2); \quad \varphi_{4,i}^3 = h_1^i h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m u_{t,m} \cos \lambda_m t_i;$$

$$\varphi_{5,i}^j = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{1,m}^3 \sin \lambda_m t_i; \quad \varphi_{6,i}^j = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{3,m}^3 \cos \lambda_m t_i; \quad \varphi_{7,i}^j = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{4,m}^2 \sin \lambda_m t_i$$

будують таблиці значень доповняльних функцій. Використовуючи далі стандартну процедуру визначення коефіцієнтів Фур'є для функцій, заданих таблицею, знаходять ці коефіцієнти і, підставляючи їх в розв'язувальну систему рівнянь (2.6), роблять наступний крок інтегрування. На початку інтегрування амплітудні значення доповняльних функцій знаходять за амплітудними значеннями розв'язувальних функцій згідно граничних умов (2.7).

### §3. Оцінка точності отримуваних результатів.

В силу того, що серединну поверхню циліндрів в поперечному перетині задано в полярних координатах  $(\rho, \psi)$ , при переході від координати  $t$  до координати  $\psi$  необхідно враховувати відповідний коефіцієнт переходу. Так, для довільної функції  $V(t(\psi), \gamma)$  маємо

$$\frac{dt}{d\psi} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2} = \omega(\psi); \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{d\psi}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\psi)} \frac{\partial V}{\partial \psi}.$$

Радіус кривизни серединної поверхні обчислюється за формулою

$$R(\psi) = \omega^3(\psi) / (\rho^2 + 2\rho'^2 + \rho\rho'').$$

Методика розв'язання задачі, як було зазначено вище, складається з п'яти етапів (рис. 2). Похибка розв'язку виникає на двох останніх етапах за рахунок використання чисельного методу і апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є. Контроль точності отримуваних результатів здійснюється за рахунок варіації кількості точок інтегрування та ортогоналізації при застосуванні чисельного методу і за рахунок варіації кількості точок напрямної для побудови табличних значень доповняльних функцій та кількості членів відповідних дискретних рядів Фур'є.

Для оцінки точності отримуваних результатів розв'язано задачу про напружений стан порожнистих циліндрів з поперечним перетином, який описаний рівнянням овалів Кассіні (1.1), виготовлених з ортотропного матеріалу при дії внутрішнього тиску.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина циліндрів  $l = 40$ , товщина  $h = 2$ , параметри  $a = 20$ ,  $c = 12$ ; 16 (криві 3, 5 відповідно, рис. 1).

Для механічних характеристик ортотропного матеріалу обрано:

$$E_s = 3,68E_0; \quad E_\psi = 2,68E_0; \quad E_\gamma = 1,1E_0; \quad \nu_{s\psi} = 0,105; \quad \nu_{s\gamma} = 0,405; \quad \nu_{\psi\gamma} = 0,431;$$

$$G_{s\psi} = 0,5E_0; \quad G_{s\gamma} = 0,45E_0; \quad G_{\psi\gamma} = 0,41E_0.$$

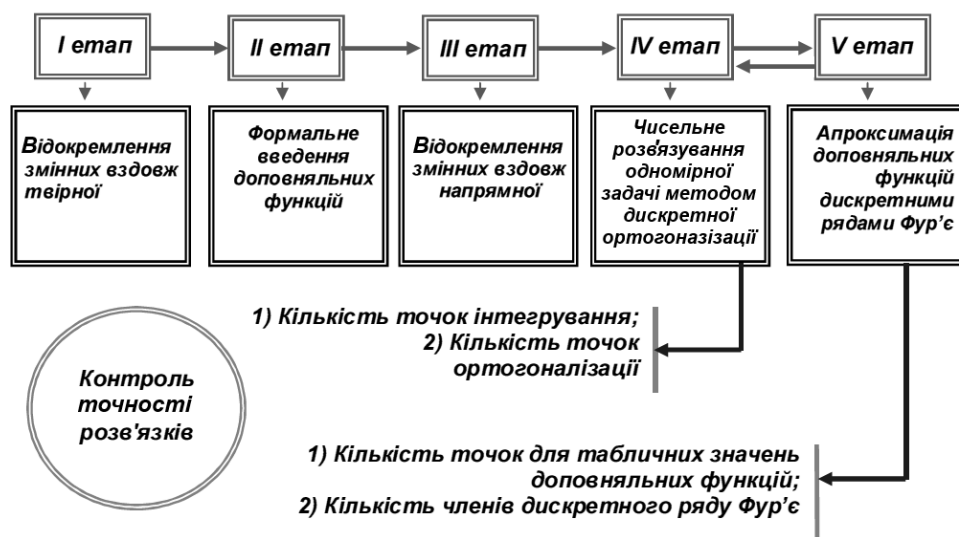


Рис. 2

Результати розв'язання задачі представлено в середньому перетині довжини циліндра в табл. 1 – табл. 4. У табл. 1, 2 представлено результати оцінки точності отримуваних результатів при застосуванні чисельного методу дискретної ортогоналізації, в табл. 3, 4 – при апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є.

У табл. 1, 3 представлені значення нормальних переміщень  $u_\gamma$ , в табл. 2, 4 – напруження  $\sigma_\psi$  в деяких перетинах товщини. Значення переміщень указано для поверхні відліку ( $\gamma = 0$ ), значення напружень для циліндрів з параметром  $c = 12$  на зовнішній поверхні ( $\gamma = h / 2$ ), а для циліндрів з параметром  $c = 16$  – на внутрішній ( $\gamma = -h / 2$ ), де вони набувають максимальних амплітудних значень.

З даних табл. 1, 2 видно, що точність отримуваних результатів до 5 - 6 знаків спостерігається при 32 точках інтегрування ( $L^I$ ) та 16 точках ортогоналізації ( $L^o$ ).

Таблиця 1

$u_\gamma E_0 / q_0 (\gamma = 0)$					
$L^I$	$L^o$	$c = 12$		$c = 16$	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	4	-255,367	841,678	-600,247	3066,88
8	4	-254,360	842,721	-599,232	3067,19
	8	-254,359	842,720	-599,219	3067,09
32	8	-254,356	842,720	-599,228	3067,15
	16	<b>-254,360</b>	<b>842,721</b>	<b>-599,226</b>	<b>3067,12</b>
	32	-254,360	842,721	-599,225	3067,12

З наведених у табл. 3, 4 даних випливає, що точність отримуваних результатів до 4 - 5 знаків має місце при 80-ти точках ( $R$ ) напрямної для табличних значень доповняльних функцій і 17 утримуваних членах ( $M$ ) дискретного ряду Фур'є.

Таблиця 2

$\sigma_{\psi} / q_0$					
$L^i$	$L^o$	$c = 12 (\gamma = h / 2)$		$c = 16 (\gamma = -h / 2)$	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	4	-14,3303	26,5745	-4,64614	-92,2256
8	4	-14,2300	27,5761	-4,74678	-92,3335
	8	-14,2299	27,5670	-4,74677	-92,3325
32	8	-14,2298	27,5761	-4,74698	-92,3342
	16	<b>-14,2299</b>	<b>27,5761</b>	<b>-4,74679</b>	<b>-92,3334</b>
	32	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334

Таблиця 3

$u, E_0 / q_0 (\gamma = 0)$					
$M$	$R$	$c = 12$		$c = 16$	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	20	-90,6204	446,946	6,85213	495,954
	60	-90,6214	446,967	6,85237	495,951
	80	-90,6225	446,987	6,85234	495,950
12	20	-254,579	843,080	-627,839	3103,92
	60	-254,396	842,733	-596,458	3066,04
	80	-254,346	842,727	-596,461	3067,06
17	60	-254,361	842,723	-599,227	3067,14
	80	<b>-254,360</b>	<b>842,721</b>	<b>-599,226</b>	<b>3067,12</b>
	100	-254,360	842,721	-599,226	3067,12

Таблиця 4

$\sigma_{\psi} / q_0$					
$M$	$R$	$c = 12 (\gamma = h / 2)$		$c = 16 (\gamma = -h / 2)$	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$
4	20	-6,46957	12,9310	-1,37431	-18,8625
	60	-6,46950	12,9318	-1,37410	-18,8624
	80	-6,46948	12,9326	-1,37426	-18,8620
12	20	-14,2410	27,5935	-5,46985	-92,1152
	60	-14,2304	27,5833	-5,02654	-93,4312
	80	-14,2300	27,5756	-5,02659	-92,4316
17	60	-14,2298	27,5760	-4,74677	-92,3332
	80	<b>-14,2299</b>	<b>27,5761</b>	<b>-4,74679</b>	<b>-92,3334</b>
	100	-14,2299	27,5761	-4,74679	-92,3334

#### § 4. Числові результати та їх аналіз.

На основі викладеного підходу розв'язана задача про напружений стан порожнистих ортотропних циліндрів з овальним поперечним перетином, серединна поверхня яких описана рівнянням овалів Кассіні (1.1). Циліндри знаходяться під дією внутрішнього тиску.



Задачу розв'язано за таких значень геометричних і механічних параметрів: довжина циліндрів  $l = 40$ ; товщина  $h = 2$ ; параметри  $a = 20, c = 0; 8; 12; 14,14; 16; 18$ ; механічні характеристики ортотропного матеріалу  $E_s = 3,68 E_0; E_\psi = 2,68 E_0; E_\gamma = 1,1 E_0; G_{s\psi} = 0,5 E_0; G_{\psi\gamma} = 0,41 E_0; G_{s\gamma} = 0,45 E_0; \nu_{s\psi} = 0,105; \nu_{\psi\gamma} = 0,431; \nu_{s\gamma} = 0,405$ .

Проведено порівняння характеристик напруженого стану розглянутих циліндрів з циліндрами, виготовленими з ізотропного матеріалу з механічними параметрами: модуль Юнга  $E = E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Результати розв'язання задачі в середньому перетині довжини циліндра вздовж напрямної для полів нормальних переміщень  $u_\gamma$  поверхні відліку ( $\gamma = 0$ ) наведені на рис. 3, для напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні ( $\gamma = -h/2$ ) – на рис. 4 та на зовнішній ( $\gamma = h/2$ ) – на рис. 5. Штриховими лініями позначено криві для ізотропних циліндрів, суцільними – для ортотропних. Цифрами 1 – 6 позначено криві, що відповідають різним формам поперечного перетину циліндрів (рис. 1).

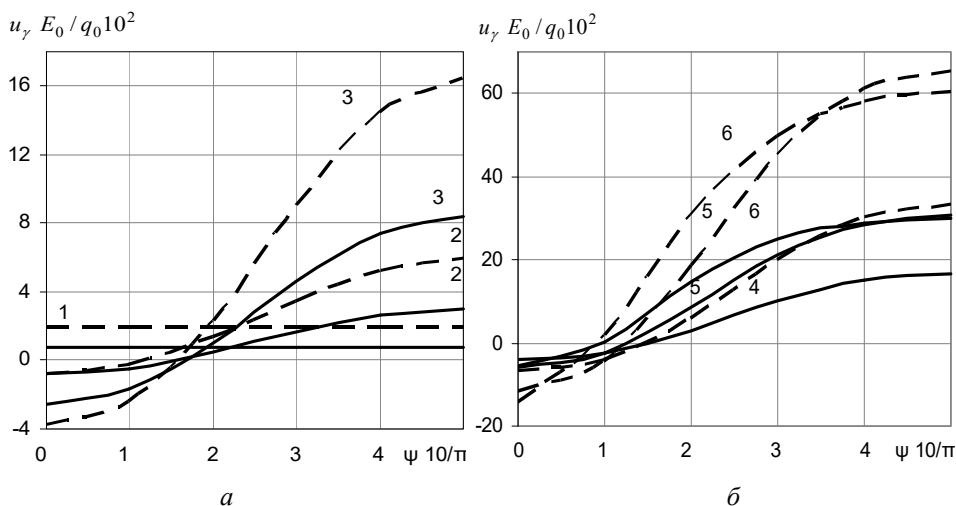


Рис. 3

З графіків, наведених на рис. 3 видно, що використання ортотропного матеріалу веде до зменшення максимальної величини нормальних переміщень приблизно в 2 - 2,5 рази для всіх форм поперечних перетинів розглянутих циліндрів.

Відхилення форми поперечного перетину від кругової призводить до перерозподілу величини переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної. В перетині  $\psi = \pi/2$  амплітудна величина нормальних переміщень збільшується порівняно з їх величиною в перетині  $\psi = 0$  в 3,7 рази для циліндрів форми № 2; в 3,3 рази – для форми № 3; в 4,1 рази – для форми № 4; в 5 разів – для форми № 5 та в 5,4 рази – для форми № 6. При цьому, максимальна величина переміщень збільшується для циліндрів форми № 2 в 4 рази; для форми № 3 – в 11,3 рази; для форми № 4 – у 22,5 рази; для форми № 5 – в 41,4 рази та для форми № 6 – в 40,4 рази, порівняно з круговими циліндрами (форма № 1).

Розподіл напружень уздовж напрямної носить такий характер (рис. 4, 5). Своїх максимальних амплітудних значень напруження  $\sigma_\psi$  для ізотропного матеріалу досягають на зовнішній поверхні, вільній від навантаження, в перетині  $\psi = \pi/2$  для форм № 2 – № 5; для форми № 6 – в перетині  $\psi = 2\pi/5$ . При використанні ортотропного матеріалу максимальні амплітудні значення напружень мають місце в перетині  $\psi = \pi/2$  для форм № 2 – № 5 на зовнішній, а для форм № 5 і № 6 – на внутрішній, навантаженій поверхні циліндра. При цьому для циліндрів форм № 2 – № 4 викорис-

тання ортотропного матеріалу призводить до зменшення максимальних амплітудних значень приблизно в 1,5 – 1,2 рази і до збільшення – для форм № 5, № 6 в 1,2 – 1,8 рази.

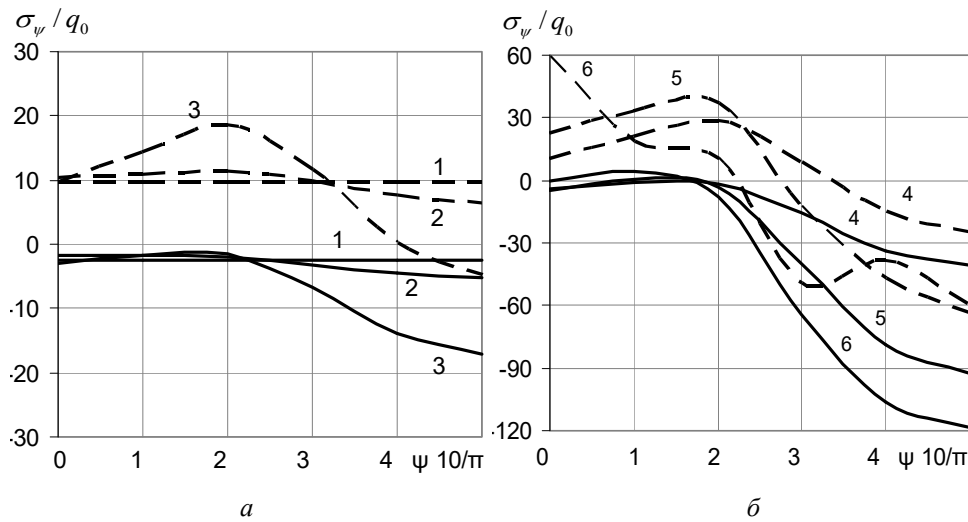


Рис. 4

Зі збільшенням відхилення форми поперечного перетину від кругової посилюється нелінійність в розподілі кривих напружень  $\sigma_\psi$  для циліндрів, виготовлених як з ізотропного, так і з ортотропного матеріалу.

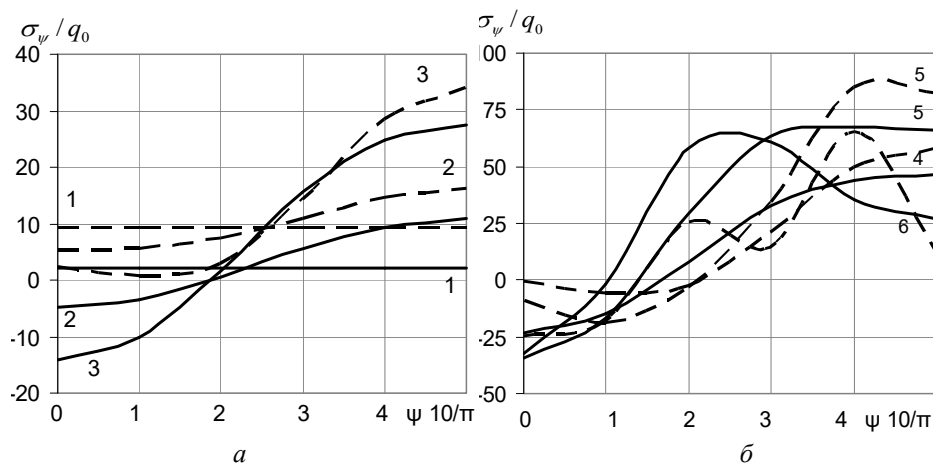


Рис. 5

На рис. 6 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_\psi$  вздовж товщини ортотропного циліндра з овальним поперечним перетином в різних перетинах напрямної. Графіки розподілу напружень для циліндрів форми № 2 наведено на рис. 6, а; форми № 3 – на рис. 6, б; форми № 4 – на рис. 6, в; форми № 5 – на рис. 6 г; форми № 6 – на рис. 6, д. Цифрами 1 – 6 позначено деякі перетини напрямної інтервалу  $0 \leq \psi \leq \pi/2$  з рівномірним кроком  $\pi/10$ .

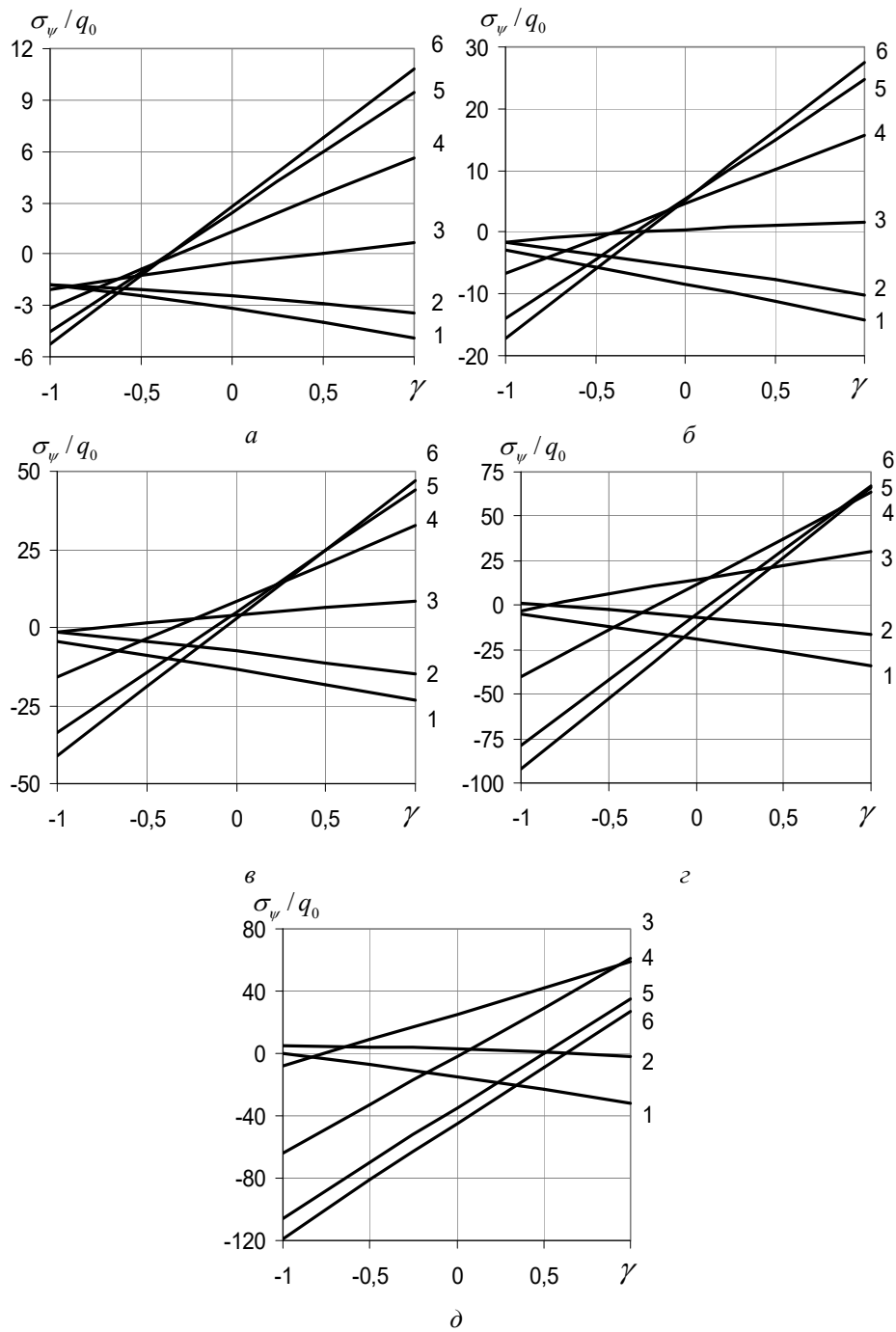


Рис. 6

З наведених на рис. 6 графіків видно, що закон розподілу напружень  $\sigma_\psi$  по товщині носить лінійний характер. При цьому на внутрішній поверхні циліндра для прямих 1 – 3 значення напружень мало відрізняються за величиною для всіх форм поперечного перетину. При цьому для циліндрів форми № 2 (рис. 6, а) аналогічна картина спостерігається і для прямих 4 – 6. Для форми № 5 (рис. 6 г) значення напружень на зовнішній поверхні для прямих 4 – 6 близькі між собою.

В перетині  $\psi = \pi / 2$  (прямі *б*) для форми № 4 (рис. 6, *в*) величини амплітудних значень напружень на зовнішній та внутрішній поверхні практично рівні між собою. Для форм № 2, № 3 (рис. 6, *а, б*) переважають напруження на зовнішній поверхні, для форм № 5, № 6 – на внутрішній.

### Висновки.

Розв'язано задачу про напружений стан порожнистих ортотропних циліндрів з овальним поперечним перетином, серединну поверхню яких описано рівнянням овалів Кассіні в просторовій постановці на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. Проведено контроль точності отримуваних результатів при застосуванні чисельного методу дискретної ортогоналізації й апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. Показано, що домогтися достатньої точності можна за рахунок збільшення кількості точок інтегрування і точок ортогоналізації при використанні чисельного методу, а також за рахунок варіації кількості табличних значень доповняльних функцій і відповідної кількості членів дискретних рядів Фур'є.

Проведено аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів з овальним поперечним перетином, виготовлених з ізотропного і ортотропного матеріалу. Показано, що вибір ортотропного матеріалу в поєднанні з вибором форми поперечного перетину, призводить до істотного перерозподілу показників напруженого стану розглянутих циліндрів. Отримані результати можуть бути використані при виборі оптимальних геометричних і механічних параметрів функціональних елементів циліндричних оболонкових конструкцій, або їх елементів, що мають подібну овальну форму поперечного перетину.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** В просторовій постановці із застосуванням аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації проведено дослідження напруженого стану порожнистих циліндрів з овальним поперечним перетином, що виготовлені з ортотропного та ізотропного матеріалів. Поверхня відліку в поперечному перетині описана рівнянням овалів Кассіні. Результати розв'язування задачі наведено у вигляді графіків та таблиць розподілу полів переміщень і напружень. Проведено аналіз отриманих результатів.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** овали Кассіні, дискретні ряди Фур'є, метод дискретної ортогоналізації, порожністі ортотропні циліндри, овальний перетин, напружений стан.

1. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, № 3. – С. 171 – 174.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов И.Г. и др. Механика композитов: в 12-и томах. Т. 8. Статика элементов конструкций. – Киев: «А.С.К.», 1999. – 379 с.
3. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г, Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472с.
4. Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В. Нелинейное деформирование и устойчивость овальных цилиндрических оболочек при чистом изгибе с внутренним давлением // Прикл. механика и техн. физика. – 2006. – 47, № 3. – С. 119 – 125.
5. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. (Справочное руководство). – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 292 с.
6. Bepalova E.I., Boreiko N.P. Determination of the Natural Frequencies of Compound Anisotropic Shell Systems Using Various Deformation Models // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 1. – P. 41 – 54.
7. Gardner L. Structural behaviour of oval hollow sections // Advanced Steel Construction. – 2005. – 1, N 2. – P. 29 – 54.

8. *Gerasimenko P.V., Khodakovskiy V.A.* Numerical Algorithm for Investigating the Stress-Strain State of Cylindrical Shells of Railway Tanks // *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics.* – 2019. – **52**, N 2. – P. 207 – 213.
9. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Influence of Orthotropy Parameters on the Stress State of Hollow Cylinders with Elliptic Cross-Section // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 12. – P. 1372 – 1379.
10. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress Analysis of Circumferentially Corrugated Hollow Orthotropic Cylinders // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 12. – P. 1389 – 1397.
11. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress Analysis of Hollow Elliptic Cylinders with Variable Eccentricity and Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 8. – P. 954 – 966.
12. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress-Strain Analysis of Rectangular Plates with a Variable Thickness and Constant Weight // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 2. P. 167 – 173.
13. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: on the Occasion of the 50th Anniversary of the Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 2. – P. 129 – 174.
14. *Hamming R.W.* Numerical Methods for Scientists and Engineers. – New York: MG Graw-Hill, 1962. – 400 p.
15. *Jasion P., Magnucki K.* Elastic buckling of Cassini ovaloidal shells under external pressure – theoretical study // *Archiv. Mech.* – 2015. – **67**, N 2. – P. 179 – 192.
16. *Karimiasl M.* Chaotic dynamics of a non-autonomous nonlinear system for a smart composite shell subjected to the hygro-thermal environment // *Microsystems Technologies.* – 2019. – **25**, N 7. – P. 2587 – 2607.
17. *Khoroshev K.G.* Electroelastic State of an Infinite Multiply Connected Piezoelectric Plate with Known Electric Potentials Applied to its Boundaries // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 6. – P. 687 – 695.
18. *Khoroshev K. G., Glushchenko Yu.A.* The two-dimensional electroelasticity problems for multiconnected bodies situated under electric potential difference action // *Int. J. Solids Struct.* – 2012. – **49**, N 18. – P. 2703 – 2711.
19. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New York: MG Graw-Hill, 1961. – 720 p.
20. *Lekhnitsky S.G.* Theory of an Anisotropic Body. – Moscow: MIR Publishers, 1981. – 415 p.
21. *Mohamed Ali J.S., Alsubari S., Aminanda Y.* Hygrothermoelastic Analysis of Orthotropic Cylindrical Shells // *Lat. Am. J. Solids Struct.* – 2016. – **13**, N 3. – P. 573 – 589.
22. *Mol'chenko L.V., Loos I.I.* Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Isotropic Shells of Revolution Subject to Joule Heating // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 1. – P. 68 – 78.
23. *Muramatsu Y., Shimoda M.* Distributed-parametric optimization approach for free-orientation of laminated shell structures with anisotropic materials // *Structural and Multidisciplinary Optimization.* – 2019. – **59**, N 6. – P. 1915 – 1934.
24. *Ruiz-Teran A. M., Gardner L.* Elastic buckling of elliptical tubes // *Thin-Walled Struct.* – 2008. – **46**. – P. 1304 – 1318.
25. *Silvestre N.* Buckling behaviour of elliptical cylindrical shells and tubes under compression // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – **45**. – P. 4427 – 4447.

Надійшла 16.09.2019

Затверджена до друку 15.12.2020