Я.Я.Рущицький, В.М.Юрчук

ДО ЕВОЛЮЦІЇ ПЛОСКОЇ ГАРМОНІЧНОЇ ХВИЛІ В НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОМУ КОМПОЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ, ЩО МОДЕЛЮЄТЬСЯ ДВОФАЗНОЮ СУМІШШЮ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Abstract. The nonlinear plane longitudinal elastic wave of displacement is studied theoretically within the framework of the Murnaghan model for the harmonic initial profile. The basic novelty consists in that the evolution of waves is analyzed by the developed approximate method of restriction on the displacement gradient within the framework of the two-phase theory of mixture. It is shown that initially excited one wave is split on four waves-modes and all modes are dispersive and distorted and each wave-mode is presented as the superposition of the first and second harmonics. At that, the second harmonic amplitude depends on many parameters including the direct dependence on time what means that the second harmonic will dominate with time.

Key words: two-phase elastic mixture; harmonic nonlinear elastic *P*-wave; Murnaghan potential; approximate method; evolution; distortion; new wave effects.

Вступ.

Аналіз еволюції можливий, якщо в матеріалі існує механізм еволюції. У нашому випадку для цього припускається, що деформація композитного матеріалу нелінійна, пружна і описується моделлю Мернагана [3, 12, 13]. Крім того, припускається, що внутрішня структура двофазного композиту враховується структурною моделлю двофазної суміші [7, 15, 16, 19].

Розглядається плоска поздовжна гармонічна хвиля (*P*-хвиля) і розв'язок про еволюцію гармонічного профіля мод *P*-хвилі шукається наближеним методом обмежень на градієнт зміщення, що відрізняється від класичних методів послідовних наближень і повільно змінних амплітуд [2, 4, 6, 9, 11, 20]. Цей метод успішно застосовувався в ряді робіт про еволюцію плоских і циліндричних хвиль з гармонічним або поодиноким початковими профілями [8, 10, 21 – 23, 25, 26] в рамках класичної однофазної теорії (теорії пружності). Важливим елементом методу є знання лінійного наближення, яке отримується при розв'язуванні відповідної лінійної задачі. Тому виглядає раціональним опис в короткій формі постановки та розв'язування такої задачі в рамках теорії однофазного пружного середовища (теорії пружності) і двофазної пружної суміші.

1. Лінійна задача про поширення плоскої поздовжної хвилі в однофазному пружному середовищі.

Базовою системою рівнянь,що описують рух в однофазному лінійно пружному ізотропному середовищі, є система рівнянь Ляме [1, 3 – 5, 7, 9, 13, 14, 17, 18, 24]

$$\left(\lambda+\mu\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}+\mu\,\Delta\vec{u}=\rho\ddot{\vec{u}}\,. \qquad (1)$$

Тут $\vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right)$ – вектор зміщень; ρ – густина; λ, μ – пружні постійні Ляме.

Отже, лінійно пружне ізотропне середовище характеризується трьома фізичними постійними.

При вивченні плоских хвиль в ізотропному середовищі дуже часто припускається (без обмеження загальності аналізу), що хвилі поширюються вздовж осі абсцис

$$\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\} . \tag{2}$$

Тоді підстановка представлення (2) в рівняння (1) дає три невзаємопов'язані хвильові рівняння [3 – 5, 7, 9, 13, 14, 17, 18, 24]

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = 0; \quad \rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = 0; \quad \rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = 0. \tag{3}$$

Перше рівняння в (3) описує рух плоскої поздовжної хвилі (P– хвилі), два наступні рівняння описують рух, відповідно, плоскої поперечної горизонтально поляризованої хвилі (SH– хвилі) і поперечної вертикально поляризованої хвилі (SV -хвилі).

Розв'язки цих рівнянь у вигляді гармонічних хвиль з частотою ω , хвильовими числами k_L, k_T і фазовими швидкостями v_L, v_T є такими [3 – 5, 7, 9, 13, 14, 17, 18, 24]

$$u_1\left(x_1, t\right) = u_1^o e^{i\left(k_L x_1 - \omega t\right)}; \; k_L = \left(\omega / v_L\right); \; v_L = \sqrt{\left(\lambda + 2\mu\right) / \rho}; \tag{4}$$

$$u_2\left(x_1, t\right) = u_2^o e^{i\left(k_T x_1 - \omega t\right)}; \; u_3\left(x_1, t\right) = u_3^o e^{i\left(k_T x_1 - \omega t\right)}; \; k_T = \left(\omega / v_T\right); \; v_T = \sqrt{\mu / \rho}. \tag{5}$$

Слід зазначити, що в ізотропному середовищі фазові швидкості та хвильові числа є постійними і для SH - та SV -хвиль вони співпадають.

2. Лінійна задача про поширення плоскої поздовжної хвилі в двофазній пружній суміші.

Модель і побудована за цією моделлю теорія двофазної суміші основані на концепції взаємопроникних і взаємодіючих континуумів – узагальненні класичного поняття одного континууму. Сутність концепції полягає у тому, що в кожній геометричній точці (репрезентативного об'єму) двофазного композитного матеріалу присутні дві матеріальні частинки – представниці двох континуумів. Іншими словами, реальне двофазне тіло замінюється фіктивним тілом, що складається з двох континуумів. Кожен континуум характеризується своїм набором механічних параметрів – густиною $\rho_{\alpha\alpha}$, вектором зміщень $\vec{u}^{(\alpha)}$, тензорами напружень $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$, деформацій $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$ і обертань $\omega_{ik}^{(\alpha)}$ (тут прийнято, що грецькі індекси дорівнюють 1, 2 і латинські індекси дорівнюють 1, 2, 3) [7, 15, 16, 18, 19].

Основні рівняння теорії суміші отримуються за такою ж процедурою, що і рівняння теорії пружності. Аналог системи трьох рівнянь Ляме для ізотропної теорії пружності отримується у вигляді взаємопов'язаної системи шести рівнянь

$$\mu_\alpha \Delta \vec{u}^{(\alpha)} + \left(\lambda_\alpha + \mu_\alpha\right) \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}^{(\alpha)} + \mu_3 \Delta \vec{u}^{(\delta)} + \left(\lambda_3 + \mu_3\right) \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}^{(\delta)} +$$
$$+ \beta\left(\vec{u}^{(\delta)} - \vec{u}^{(\alpha)}\right) = \rho_{\alpha\alpha} \ddot{\vec{u}}^{(\alpha)} \quad \left(\alpha, \delta = 1, 2; \; \alpha + \delta = 3\right). \tag{6}$$

Конститутивні рівняння в теорії двофазної ізотропної пружної теорії суміші мають вигляд [7, 19]

$$\sigma_{ik}^{(\alpha)} = \lambda_\alpha \varepsilon_{mm}^{(\alpha)} \delta_{ik} + 2\mu_\alpha \varepsilon_{ik}^{(\alpha)} + \lambda_3 \varepsilon_{mm}^{(\delta)} \delta_{ik} + 2\mu_3 \varepsilon_{ik}^{(\delta)} . \tag{7}$$

Ці рівняння містять шість незалежних пружних постійних λ_k, μ_k, дві парціальні густини ρ_{11}, ρ_{22} і одну постійну β так званої зсувної взаємодії між фазами суміші. В цілому, цей варіант теорії суміші характеризується дев'ятьма постійними.

Обмежимося далі аналізом плоских хвиль у двофазній пружній ізотропній суміші і розглянемо невелике спрощення щодо напрямку руху хвиль – нехай хвилі рухаються в напрямку осі абсцис. Тоді парціальні вектори зміщень залежать тільки від двох змінних: координати x_1 і часу t

$$\vec{u}^{(\alpha)} \equiv \left\{ u_k^{(\alpha)}(x_1, t) \right\} \tag{8}$$

і рівняння (6) приймають вигляд [7, 19]

$$\rho_{\alpha\alpha} u_{1,tt}^{(\alpha)} - \left(\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha\right) u_{1,11}^{(\alpha)} - \left(\lambda_3 + 2\mu_3\right) u_{1,11}^{(\delta)} - \beta\left(u_1^{(\alpha)} - u_1^{(\delta)}\right) = 0; \tag{9}$$

$$\rho_{\alpha\alpha} u_{m,tt}^{(\alpha)} - \mu_\alpha u_{m,11}^{(\alpha)} - \mu_3 u_{m,11}^{(\delta)} - \beta\left(u_m^{(\alpha)} - u_m^{(\delta)}\right) = 0 \quad \left(m = 2,\, 3\right). \tag{10}$$

Кожна з трьох систем (9), (10) являє собою систему з двох взаємопов’язаних рівнянь і описує поширення одного типу хвиль – поздовжних, поперечних горизонтальних, поперечних вертикальних.

Рівняння (9), (10) записуються у вигляді, інваріантному щодо типу хвилі, і є такими

$$\rho_{\alpha\alpha} u_{m,tt}^{(\alpha)} - a_\alpha^{(k)} u_{k,11}^{(\alpha)} - a_3^{(k)} u_{k,11}^{(\delta)} - \beta\left(u_k^{(\alpha)} - u_k^{(\delta)}\right) = 0 \quad \left(a_m^{(1)} = \lambda_m + 2\mu_m;\; a_m^{(2)} = a_m^{(3)} = \mu_m\right). \tag{11}$$

Ця система має розв’язок у вигляді дисперсивних гармонічних хвиль

$$u_m^{(\alpha)}(x_1, t) = A_{om}^{(\alpha)} e^{-i\left(k_\alpha^{(m)} x - \omega t\right)} + l(k_\delta^{(m)}) A_{om}^{(\delta)} e^{-i\left(k_\delta^{(m)} x - \omega t\right)}, \tag{12}$$

у якому хвильові числа $k_\alpha^{(m)}$ слід знаходити з дисперсійного рівняння

$$M_1^{(m)} k^4 - 2M_2^{(m)} k^2 \omega^2 + M_3^{(m)} \omega^4 = 0;$$

$$M_1^{(m)} = a_1^{(m)} a_2^{(m)} - \left(a_3^{(m)}\right)^2;\; M_3^{(m)} = \rho_{11}\rho_{22} - \left(\rho_{11} + \rho_{22}\right)\left(\beta / \omega^2\right);$$

$$2M_2^{(m)} = a_1^{(m)} \rho_{11} + a_2^{(m)} \rho_{22} - \left(a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + 2a_3^{(m)}\right)\left(\beta / \omega^2\right),$$

коефіцієнти $l(k_\alpha^{(m)})$ матриць розподілу амплітуд

$$\begin{pmatrix} 1 & l(k_2^{(m)}) \\ l(k_1^{(m)}) & 1 \end{pmatrix}$$

обчислюються за алгебраїчною формулою

$$l(k_\alpha^{(m)}) = \left\{ -\left[a_\alpha^{(m)} \left(k_\alpha^{(m)}\right)^2 + \beta - \rho_{\alpha\alpha}\omega^2 \right] \Big/ a_3^{(m)} \left(k_\alpha^{(m)}\right)^2 - \beta \right\}^{(-1)^\alpha}. \tag{13}$$

Хвилі (12) мають ряд особливостей, які не описуються однофазною теорією пружності. Відзначимо далі п’ять основних особливостей.

1. Кожна хвиля має дві моди з відмінними хвильовими числами $k_\alpha^{(m)}$ (тут α фіксує номер моди і m – тип хвилі).

2. Відмінність хвильових чисел ідентична відмінності фазових швидкостей мод: перша мода повільна і друга значно швидша.

3. Обидві моди є суттєво дисперсивними хвилями.

4. Суміш фільтрує одну з мод, тобто, ця мода не існує для низьких частот (більш точно, вона перетворюється з біжучої гармонічної хвилі в швидко згасаючу, починаючи з частоти $\omega_{cut}^* = \sqrt{\beta(\rho_{11} + \rho_{22}) / \rho_{11}\rho_{22}}$, яку називають частотою запирання або частотою відсікання).

5. В кожній фазі суміші поширюються дві моди з відмінними амплітудами, які залежать суттєво нелінійно від частоти, що дозволяє перепомповувати енергію з однієї моди в іншу моду зі зміною частоти.

Перша мода в першій фазі суміші є біжучою хвилею і визначається з точністю до амплітуди

$$u_1^{(1)}(x_1,t) = A_{o1}^{(1)} e^{-i\left(k_1^{(1)}x-\omega t\right)} . \tag{14}$$

Перша мода у другій фазі подібна до моди (14) з тією особливістю, що вона має невідомий (оскільки невідомі хвильові числа мод) додатковий множник в амплітуді, який залежить від властивостей суміші, частоти і хвильових чисел

$$u_1^{(2)}(x_1,t) = l(k_1^{(2)})\, u_1^{(1)}(x_1,t) . \tag{15}$$

Друга мода у другій фазі суміші є біжучою хвилею і визначається з точністю до амплітуди

$$u_2^{(2)}(x_1,t) = A_{o1}^{(2)} e^{-i\left(k_1^{(2)}x-\omega t\right)} . \tag{16}$$

Друга мода в першій фазі подібна до моди (11) з тією особливістю, що вона має невідомий (оскільки невідомі хвильові числа мод) додатковий множник в амплітуді, який залежить від властивостей суміші, частоти і хвильових чисел

$$u_2^{(1)}(x_1,t) = l(k_1^{(1)})\, u_2^{(2)}(x_1,t) . \tag{17}$$

Таким чином, чотири хвилі в суміші характеризуються двома довільними амплітудами.

Слід зазначити, що описані вище дві моделі пружного деформування композитного матеріалу описують суттєво відмінні хвильові ефекти в цьому матеріалі. Стосовно аналізу плоских гармонічних хвиль ці ефекти проявляються при відмінних обставинах, що підтверджується експериментальними спостереженнями.

Модель однофазного лінійного пружного ізотропного середовища справедлива при низьких частотах (в умовах так званого довгохвильового наближення). Хвилі в такому наближенні недисперсивні (швидкості хвиль постійні для всіх значень частот).

Модель двофазної лінійно пружної ізотропної суміші справедлива в діапазоні не так малих частот, як у випадку першої моделі. Кожен тип хвилі розпадається на дві моди (швидку і повільну) і кожна мода існує в обох фазах матеріалу. Експеримент для волокнистого композитного матеріалу фіксує дві моди в матриці і дві моди у волокні. При цьому в експерименті швидка мода приходить на вихід зразка раніше, а повільна – пізніше. Обидві моди суттєво дисперсивні.

Таким чином, кожна модель вірна і повинна застосовуватися тільки для аналізу хвиль у відмінних випадках вибору частот – частоти можуть бути малими для однієї моделі чи великі для іншої.

3. Нелінійна задача про поширення плоскої поздовжної хвилі в однофазному пружному середовищі.

Як відомо, введений для однофазного пружного середовища п’ятиконстантний пружний потенціал Мернагана [12] квадратично і кубічно нелінійний щодо компонентів тензора деформацій Коші – Гріна $\varepsilon_{nm} = \left(1/2\right)\left(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{k,n}u_{k,m}\right)$

$$W(\varepsilon_{ik}) = \left(1/2\right)\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + \left(1/3\right)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + \left(1/3\right)C(\varepsilon_{mm})^3 \tag{18}$$

(λ, μ, A, B, C – пружні постійні моделі Мернагана).

Цей потенціал допускає ряд спрощень, які зберігають його базову нелінійність. Виберемо варіант представлення потенціалу Мернагана через градієнти зміщень, де враховані лише квадратично і кубічно нелінійні складові градієнтів [4, 5, 20]

$$\begin{gathered} W = \left(1/2\right)\lambda\left(u_{m,m}\right)^2 + \left(1/4\right)\mu\left(u_{i,k} + u_{k,i}\right)^2 + \left(\mu + \left(1/4\right)A\right)u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} + \\ + \left(1/2\right)\left(\lambda + B\right)u_{m,m}\left(u_{i,k}\right)^2 + \left(1/12\right)Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + \left(1/2\right)Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + \left(1/3\right)C\left(u_{m,m}\right)^3 \end{gathered} \tag{19}$$

і розглянемо одновимірний рух, в якому зміщення залежать лише від однієї просторової координати і часу $u_k = u_k\left(x_1,\, t\right)$ (зміщення в напрямку осі Ox_1 в декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$). У цьому випадку вигляд потенціалу (18) спрощується

$$
\begin{gathered}
W = (1/2)\Big[\left(\lambda+2\mu\right)\left(u_{1,1}\right)^2 + \mu\Big[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\Big]\Big]+ \\
+\left[\mu+(1/2)\lambda+(1/3)A+B+(1/3)C\right]\left(u_{1,1}\right)^3+(1/2)\left(\lambda+B\right)u_{1,1}\Big[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\Big].
\end{gathered} \tag{20}
$$

Подальше використання рівняння руху $t_{ik,i} + X_k = \rho\ddot{u}_k$ дає нелінійний аналог рівнянь Ляме

$$\rho u_{m,tt} - \mu u_{m,kk} - (\lambda+\mu)u_{n,mn} = F_m; \tag{21}$$

$$
\begin{gathered}
F_i = \left[\mu+(1/4)A\right]\left(u_{l,kk}u_{l,i} + u_{l,kk}u_{i,l} + 2u_{i,lk}u_{l,k}\right)+ \\
+\left[\lambda+\mu+(1/4)A+B\right]\left(u_{l,ik}u_{l,k} + u_{k,lk}u_{i,l}\right)+\left(\lambda+B\right)u_{i,kk}u_{l,l} + \\
+\left(B+2C\right)u_{k,ik}u_{l,l} + \left[(1/4)A+B\right]\left(u_{k,lk}u_{l,i} + u_{l,ik}u_{k,l}\right).
\end{gathered} \tag{22}
$$

З (21) отримуються нелінійні хвильові рівняння для трьох типів поляризованих плоских хвиль (*P*-, *SH*-, *SV*- хвилі). Найпростіші нелінійні хвильові рівняння є квадратично нелінійними. Зокрема, рух *P*-хвилі описується рівнянням

$$\rho u_{1,tt} - \left(\lambda+2\mu\right)u_{1,11} = N_1\, u_{1,11}u_{1,1} + N_2\left(u_{2,11}u_{2,1} + u_{3,11}u_{3,1}\right); \tag{23}$$

$$N_1 = \left[3\left(\lambda+2\mu\right)+2\left(A+3B+C\right)\right];\;\; N_2 = \lambda+2\mu+(1/2)A+B. \tag{24}$$

Обмежимо аналіз задачею, коли первинно в матеріалі збуджується лише *P*-хвиля і основним нелінійним явищем є явище самогенерації хвилі. Тоді нелінійне рівняння (23) приймає вигляд

$$\rho u_{1,tt} - \left(\lambda+2\mu\right)u_{1,11} = N_1\, u_{1,11}u_{1,1} \to u_{1,tt} - \left(v_L\right)^2 u_{1,11} = \left(N_1/\rho\right)u_{1,11}u_{1,1}\,. \tag{25}$$

Як уже було відзначено раніше, на даний момент рівняння (25) аналізувалося наближено в рамках трьох методів – послідовних наближень, повільно змінних амплітуд, обмеження на градієнт зміщення [20]. Вивчались хвилі з різними початковими профілями і для різних моделей композитних матеріалів [8, 10, 21 – 23, 25, 26].

4. Застосування методу обмеження на градієнт зміщення до аналізу нелінійного хвильового рівняння (25).

Для застосування методу обмеження на градієнт зміщення зручно представити рівняння (25) у вигляді

$$
\begin{gathered}
u_{1,tt} - \left\{\left(v_L\right)^2 + \left(N_1/\rho\right)u_{1,1}\right\}u_{1,11} = 0 \to u_{1,tt} - \left\{1+\alpha u_{1,1}\right\}\left(v_L\right)^2 u_{1,11} = 0; \\
\alpha = \left[N_1/\left(\lambda+2\mu\right)\right].
\end{gathered} \tag{26}
$$

Опишемо спочатку метод з достатньо загальних позицій, однак лише стосовно рівняння (26). Тому припустимо, що початковий профіль хвилі описується достатньо гладкою функцією $u\left(x_1, t{=}0\right) = F\left(ax_1\right)$ (a – масштабний коефіцієнт) і хвиля поширюється у вигляді хвилі Даламбера

$$u\left(x_1,\, t\right) = F\left[a\left(x_1 - vt\right)\right] \tag{27}$$

зі змінною швидкістю хвилі

$$v = \sqrt{1+\alpha u_{1,1}}\; c_L \,. \tag{28}$$

Далі при обмеженні (перше обмеження на градієнт зміщення)

$$\left|\alpha u_{1,1}\right| \ll 1 \tag{29}$$

запишемо корінь в (28) у вигляді ряду

$$\sqrt{1+\alpha u_{1,1}} = \left(1+\alpha u_{1,1}\right)^{1/2} = 1 + \left(1/2\right)\alpha u_{1,1} - \left(1/8\right)\left(\alpha u_{1,1}\right)^2 + \cdots \;.$$

Тоді наближене представлення розв’язку (8) у вигляді перших двох апроксимацій є таким:

$$u_1\left(x_1,t\right) \cong F\left[\,a\left(x_1 - v_L t\right) - \left(1/2\right) t\, a\, \alpha\, v_L\, u_{1,1}\right]. \tag{30}$$

Слід звернути увагу на ту особливість наближеного представлення розв’язку(30), що швидкість хвилі вже постійна і відповідає лінійному наближенню. Також зазначимо, що адекватність наближення (30) залежить від точності виконання умови (29), яка включає обмеження на два параметри: параметр $\alpha{=}3{+}2\left(A{+}3B{+}C\right)/\left(\lambda{+}2\mu\right)$ і градієнт зміщення $u_{1,1}$.

Обмежимо далі аналіз випадком гармонічної хвилі, тобто покладемо

$$u_1\left(x_1,t\right) \cong A^o e^{ia\left[\left(x_1 - v_L t\right) - (1/2) t\alpha v_L u_{1,1}\right]}. \tag{31}$$

Якщо ввести додатковий малий параметр (друге обмеження на градієнт зміщення, оскільки малість $\left|\alpha u_{1,1}\right|$ вже припущена в (29), то це фактично умова на $a v_L t$ – масштабний коефіцієнт, швидкість хвилі в лінійному наближенні, час поширення хвилі)

$$\left|\delta\right| = \left|-\left(1/2\right) t\, a\, \alpha\, v_L u_{1,1}\right| << 1, \tag{32}$$

то розв’язок (31) можна представити у вигляді ряду Тейлора в околі $\sigma = a\left(x_1 - c_L t\right)$ – фази хвилі з постійною фазовою швидкістю і масштабним коефіцієнтом a

$$u\left(x_1,t\right) \approx F\left(\sigma+\delta\right) \approx F\left(\sigma\right) + F^{/}\left(\sigma\right)\delta + \left(1/2\right)F^{//}\left(\sigma\right)\delta^2 + \cdots \tag{33}$$

і обмежити аналіз першими двома членами в (33) внаслідок припущення про малість δ (32)

$$u\left(x_1,t\right) \approx e^{i\left(\sigma+\delta\right)} \approx A^o\left(e^{i\sigma} - ie^{i\sigma}\delta\right) = A^o e^{i\sigma}\left(1 - i\delta\right) = A^o e^{ia\left(kx_1 - \omega t\right)}\left(1 + \left(1/2\right) t a \alpha v_L u_{1,1}\right). \tag{34}$$

Обчислимо далі наближений вираз для градієнта зміщення

$$u_{1,1}\left(x_1,t\right) \approx \left[A^o e^{i\sigma}\left(1 - i\delta\right)\right]^{/}_{x_1} = A^o e^{i\sigma}\left\{\left(i+\delta\right)\sigma^{/}_{x_1} - i\delta^{/}_{x_1}\right\} =$$

$$= F^{/}_{\sigma}\left(\sigma\right)\cdot a\left(1 - \left(1/2\right) t\alpha v_L u_{1,11}\right) \approx aF^{/}(\sigma).$$

Тоді розв’язок (34) можна записати у вигляді двох складових

$$u_1\left(x_1,t\right) \approx F\left(\sigma\right) - F^{/}\left(\sigma\right) a^2\left[\left(1/2\right) t\alpha v_L F^{/}\left(\sigma\right)\right] = F\left(\sigma\right) - \left(1/2\right)\alpha a^2 v_L t\left[F^{/}\left(\sigma\right)\right]^2. \tag{35}$$

Наближене представлення розв’язку (35) записано для достатньо загального профіля хвилі (він повинен допускати існування двох перших похідних). У випадку гармонічної хвилі $F\left(\sigma\right) = A^o e^{ia\left(k_L x_1 - \omega t\right)}$, $F^{/}\left(\sigma\right) = iF\left(\sigma\right) = A^o i e^{ia\left(k_L x_1 - \omega t\right)}$ і розв’язок (35) приймає вигляд

$$u_1\left(x_1,t\right) \cong A^o e^{ia\left(k_L x_1-\omega t\right)} + \left(1/2\right)\left(A^o\right)^2 ta^2\alpha v_L e^{2ia\left(k_L x_1-\omega t\right)}. \tag{36}$$

Розв'язок (36) являє собою хвилю, яка є суперпозицією двох гармонічних хвиль, перша з яких є 1-ою гармонікою, а друга – 2-ою гармонікою. Формула (35) описує нелінійні хвильові ефекти, які полягають у виникненні 2-ої гармоніки і зміні амплітуди з часом поширення хвилі (чи з пройденою хвилею відстанню). Цей час (відстань) є параметром, що суттєво впливає на перерозподіл амплітуд гармонік. В (35) амплітуда 1-ої гармоніки A^o вважається за означенням постійною, тоді як амплітуда 2-ої гармоніки $\left(1/2\right)\left(A^o\right)^2 t\,a^2\alpha v_L$ залежить від багатьох параметрів – лінійно від часу руху хвилі, швидкості хвилі в лінійному наближенні і параметра α, що визначає матеріал, та квадратично від початкової амплітуди і параметра a, який визначає довжину хвилі.

5. Нелінійна задача про поширення плоскої поздовжньої хвилі в двофазній пружній суміші.

Нелінійна теорія двофазної суміші має особливість у використанні відлікового і актуального станів при деформуванні матеріалу. Як відомо, в лінійній теорії пружності ці стани не розрізняються, тоді як у нелінійній теорії пружності ця відмінність враховується через припущення про скінченність деформацій. В нелінійній теорії двофазної суміші відносно обох фаз (обох взаємодіючих континуумів) допускається, що вони можуть мати скінченні деформації. Однак деформації однієї фази щодо другої можуть бути тільки безмежно малими з метою збереження суцільності матеріалу.

Оскільки в нелінійних теоріях матеріалів розрізняють геометричну і фізичну нелінійності, то і вводяться вони по-різному. Геометрична нелінійність забезпечується використанням нелінійних парціальних тензорів деформації. Далі використовуються нелінійні тензори деформації Коші – Гріна

$$\varepsilon_{ik}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,k}^{(\alpha)} + u_{k,i}^{(\alpha)} + u_{m,i}^{(\alpha)}u_{m,k}^{(\alpha)}\right). \tag{37}$$

Базовими рівняннями двофазної теорії суміші є рівняння руху [7, 13, 15, 24]

$$[\sigma_{ik}^{(\alpha)}(\delta_{kn} + u_{n,k}^{(\alpha)})]_{,i} + R_n^{(\alpha)} + F_n^{(\alpha)} = \rho_{\alpha\alpha}u_{n,tt}^{(\alpha)}, \tag{38}$$

де $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$ – парціальні тензори напружень і $R_n^{(\alpha)}$ – сили взаємодії між фазами суміші.

Третьою необхідною групою рівнянь є визначальні рівняння, які виходять з розгляду внутрішньої енергії для суміші в цілому як функції трьох незалежних кінематичних параметрів: двох парціальних тензорів деформації і одного вектора відносних зміщень фаз $W = W(\varepsilon_{ik}^{(1)}, \varepsilon_{ik}^{(2)}, v_k)$.

Обмежимося розглядом ізотропної суміші і виберемо далі представлення внутрішньої енергії, яке узагальнює класичне уявлення Мернагана

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{ik}^{(1)}, \varepsilon_{ik}^{(2)}, v_k) &= \mu_\alpha\left(\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\right)^2 + 2\mu_3\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\varepsilon_{ik}^{(\delta)} + \frac{1}{2}\lambda_\alpha\left(\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\right)^2 + \\ &+ \lambda_3\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\varepsilon_{mm}^{(\delta)} + \frac{1}{3}A_\alpha\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\varepsilon_{im}^{(\alpha)}\varepsilon_{km}^{(\alpha)} + B_\alpha\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\left(\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{3}C_\alpha\left(\varepsilon_{mm}^{(\alpha)}\right)^3 + \beta(v_k)^2 + \frac{1}{3}\beta'(v_k)^3 \qquad (\alpha+\delta=3). \end{aligned} \tag{39}$$

Кінцевою метою постановки задачі про нелінійні плоскі хвилі двофазної суміші є рівняння руху в зміщеннях, які узагальнюють нелінійний варіант класичних рівнянь Ляме. Для цього вводяться несиметричні тензори напружень Кірхгоффа $t_{ik}^{(\alpha)}$ і вводиться ряд обмежень [7, 19]. У підсумку виходить система взаємопов'язаних квадратично нелінійних рівнянь руху [7, 19]

$$\rho_{\alpha\alpha}u_{i,tt}^{(\alpha)}-\mu_\alpha u_{i,kk}^{(\alpha)}-\mu_3 u_{m,im}^{(\delta)}-(\lambda_\alpha+\mu_\alpha)u_{m,im}^{(\alpha)}-(\lambda_3+\mu_3)u_{m,im}^{(\delta)}-\beta\left(u_i^{(\alpha)}-u_i^{(\delta)}\right)=F_i^{(\alpha)}; \quad (40)$$

$$F_i^{(\alpha)}=\left(\mu_\alpha+(1/4)A_\alpha\right)\left(u_{l,kk}^{(\alpha)}u_{l,i}^{(\alpha)}+u_{l,kk}^{(\alpha)}u_{i,l}^{(\alpha)}+2u_{i,lk}^{(\alpha)}u_{l,k}^{(\alpha)}\right)+$$

$$+\left(\mu_\alpha+\lambda_\alpha+(1/4)A_\alpha+B_\alpha\right)\left(u_{l,ik}^{(\alpha)}u_{l,k}^{(\alpha)}+u_{k,lk}^{(\alpha)}u_{i,l}^{(\alpha)}\right)+\left(\lambda_\alpha+2\mu_\alpha-B_\alpha\right)u_{i,kk}^{(\alpha)}u_{l,l}^{(\alpha)}+ \quad (41)$$

$$+\left(\lambda_\alpha+2\mu_\alpha-B_\alpha\right)u_{i,kk}^{(\alpha)}u_{l,l}^{(\alpha)}+\left(B_\alpha+2C_\alpha\right)u_{k,ik}^{(\alpha)}u_{l,l}^{(\alpha)}+3\beta'\left(u_i^{(1)}-u_i^{(2)}\right)^2 .$$

Введемо тепер плоскі хвилі за формулою (8)

$$\vec{u}^{(\alpha)}\equiv\left\{u_k^{(\alpha)}(x_1,t)\right\} . \quad (42)$$

Тоді система (41) спрощується

$$\begin{gathered}\rho_{\alpha\alpha}u_{1,tt}^{(\alpha)}-(\lambda_\alpha+2\mu_\alpha)u_{1,11}^{(\alpha)}-(\lambda_3+2\mu_3)u_{1,11}^{(\delta)}-\beta\left(u_1^{(\alpha)}-u_1^{(\delta)}\right)=\\=N_1^{(\alpha)}u_{1,11}^{(\alpha)}u_{1,11}^{(\alpha)}+N_2^{(\alpha)}\left(u_{2,11}^{(\alpha)}u_{2,1}^{(\alpha)}+u_{3,11}^{(\alpha)}u_{3,1}^{(\alpha)}\right);\end{gathered} \quad (43)$$

$$\rho_{\alpha\alpha}u_{m,tt}^{(\alpha)}-\mu_\alpha u_{m,11}^{(\alpha)}-\mu_3 u_{m,11}^{(\delta)}-\beta\left(u_m^{(\alpha)}-u_m^{(\delta)}\right)=N_2^{(\alpha)}\left(u_{m,11}^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}+u_{1,11}^{(\alpha)}u_{m,1}^{(\alpha)}\right)\quad (m=2,3), \quad (44)$$

$$N_1^{(\alpha)}=3\left(\lambda_\alpha+2\mu_\alpha\right)+2\left(A_\alpha+3B_\alpha+C_\alpha\right),\ N_2^{(\alpha)}=\mu_\alpha+\frac{1}{2}A_\alpha+B_\alpha . \quad (45)$$

Важливим для наступного аналізу є факт, що системи (43),(44) взаємозв’язані і містять окремо лінійну та нелінійну частини.

Поставлена у цьому дослідженні задача про поширення тільки поздовжної плоскої хвилі описується більш простими рівняннями

$$\rho_{\alpha\alpha}u_{1,tt}^{(\alpha)}-(\lambda_\alpha+2\mu_\alpha)u_{1,11}^{(\alpha)}-(\lambda_3+2\mu_3)u_{1,11}^{(\delta)}-\beta\left(u_1^{(\alpha)}-u_1^{(\delta)}\right)=N_1^{(\alpha)}u_{1,11}^{(\alpha)}u_{1,11}^{(\alpha)} . \quad (46)$$

6. Застосування методу обмеження на градієнти зміщень до аналізу нелінійних хвильових рівнянь (46).

Представимо рівняння (46) у вигляді

$$\begin{gathered}u_{1,tt}^{(\alpha)}-\left[\left(v_L^{(\alpha)}\right)^2+\left(N_1^{(\alpha)}/\rho_{\alpha\alpha}\right)u_{1,1}^{(\alpha)}\right]u_{1,11}^{(\alpha)}-\left(v_{L3}^{(\alpha)}\right)^2u_{1,11}^{(\delta)}-\left(\beta/\rho_{\alpha\alpha}\right)\left(u_1^{(\alpha)}-u_1^{(\delta)}\right)=0\to\\\to\rho_{\alpha\alpha}u_{1,tt}^{(\alpha)}-\left[1+p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right]\left(\lambda_\alpha+2\mu_\alpha\right)u_{1,11}^{(\alpha)}-\left(\lambda_3+2\mu_3\right)u_{1,11}^{(\delta)}-\beta\left(u_1^{(\alpha)}-u_1^{(\delta)}\right)=0 ;\end{gathered} \quad (47)$$

$$p^{(\alpha)}=\left[N_1^{(\alpha)}/\left(\lambda_\alpha+2\mu_\alpha\right)\right] . \quad (48)$$

Припустимо, що парціальні хвилі гармонічні, їхні початкові профілі описуються функціями

$$u^{(\alpha)}\left(x_1,t=0\right)=A_0^{(\alpha)}e^{iax_1}\ \ (a\ \text{– масштабний коефіцієнт}) \quad (49)$$

і хвилі поширюються з частотою ω, невідомими змінними парціальними фазовими швидкостями

$$v^{(\alpha)}=\left(\omega/k_\alpha\right)=\sqrt{1+p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}}\ v_L^{(\alpha)} \quad (50)$$

та хвильовими числами

$$k_\alpha=\sqrt[-2]{1+p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}}\ k_L^{(\alpha)} . \quad (51)$$

Зауважимо, що присутність градієнтів зміщень під коренем в (50) значно ускладнює наступний аналіз.

Розв'язок у вигляді подібних хвиль слід шукати підстановкою виразів

$$u^{(\alpha)}\left(x_1,t\right)=A_0{}^{(\alpha)}e^{ia\left(x_1-v^{(\alpha)}t\right)} \tag{52}$$

у систему хвильових рівнянь (47). Формально процедура співпадає з описаною для лінійного випадку з тією відмінністю, що замість фазових швидкостей з (12) у всі формули входять фазові швидкості (50).

В результаті отримується розв'язок у вигляді гармонічних хвиль, який на даному етапі аналізу неприйнятний з причини залежності (50) від цього ж розв'язку

$$u_1^{(\alpha)}(x_1,t)=A_{o1}^{(\alpha)}e^{ia\left(x_1-v^{(\alpha)}t\right)}+l(v^{(\delta)})A_{o1}^{(\delta)}e^{ia\left(x_1-v^{(\delta)}t\right)}, \tag{53}$$

у якому фазові швидкості $v^{(\alpha)}$ слід знайти з дисперсійного рівняння

$$v^4-2M_2v^2+M_0=0;\ (v^{(\alpha)})^2=\left\{M_2-(-1)^{\alpha}\sqrt{\left(M_2\right)^2-M_0}\right\}; \tag{54}$$

$$2M_2=\left(1+p^{(1)}u_{1,1}^{(1)}\right)\left(v_L^{(1)}\right)^2+\left(1+p^{(2)}u_{1,1}^{(2)}\right)\left(v_L^{(2)}\right)^2+\beta\frac{\rho_{11}+\rho_{22}}{a^2\rho_{11}\rho_{22}};$$

$$M_0=\left(1+p^{(1)}u_{1,1}^{(1)}\right)\left(v_L^{(1)}\right)^2\left(1+p^{(2)}u_{1,1}^{(2)}\right)\left(v_L^{(2)}\right)^2-\left(v_{L3}^{(1)}\right)^2\left(v_{L3}^{(2)}\right)+$$

$$+(\beta/a^2\rho_{11}\rho_{22})\left\{\rho_{11}\left[\left(1+p^{(1)}u_{1,1}^{(1)}\right)\left(v_L^{(1)}\right)^2+\left(v_{L3}^{(1)}\right)^2\right]+\rho_{22}\left[\left(1+p^{(2)}u_{1,1}^{(2)}\right)\left(v_L^{(2)}\right)^2+\left(v_{L3}^{(2)}\right)\right]\right\} \tag{55}$$

і за алгебраїчною формулою

$$l\left(v^{(\alpha)}\right)=\left(-\left\{a^2\left(v_{L3}^{(\alpha)}\right)^2-\left(\beta/\rho_{\alpha\alpha}\right)\right\}\Big/\left\{a^2\left(v^{(\alpha)}\right)^2-\left[1+p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right]a^2\left(v_L^{(\alpha)}\right)^2+\left(\beta/\rho_{\alpha\alpha}\right)\right\}\right)^{(-1)^{\delta}} \tag{56}$$

обчислюються коефіцієнти $l(v^{(\alpha)})$ матриць розподілу амплітуд $\begin{pmatrix}1 & l(v^{(2)})\\ l(v^{(1)}) & 1\end{pmatrix}$.

У формулах (54), (55) з'явилась нова особливість, яка породжена початковим припущенням про вигляд гармонічної хвилі (49), де введений масштабний множник *a*.

Вона полягає в тому, що швидкість хвилі тепер залежить від масштабного множника *a* дуже специфічним чином – від загальноприйнятого представлення хвильового числа чи швидкості хвилі формули відрізняються тим, що вони ідентичні, якщо в нових формулах замінити коефіцієнт зсувної взаємодії фаз суміші β на $a^2\beta$. З точки зору механіки, при зменшенні величини масштабного множника від одиниці до нуля зменшується взаємний вплив фаз (чим дрібніший масштаб, тим менше взаємодіють фази). Це узгоджується з відомим фактом надчутливості *a* до розмірів фаз у реальній структурі матеріалу – зміна величини β на порядки при зменшенні реальних розмірів шарів чи волокон у внутрішній структурі матеріалу [7].

Наступний крок процедури вводить обмеження на градієнти зміщень, у чому і полягає одна з сутностей методу обмеження на градієнти зміщень. Безпосередньою метою обмеження є перетворення кореня у представленні хвильових чисел (50).

Отже, приймаємо обмеження

$$\left|p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right|\ll 1 \tag{57}$$

і запишемо корінь в (50) у вигляді ряду

$$\sqrt[-2]{1+p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}} = \left(1+p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right)^{-1/2} = 1-(1/2)\,p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)} + (1/8)\left(p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right)^2 + \cdots . \quad (58)$$

Тоді, зважаючи на обмеження (57), стає можливим наближене представлення ряду (58) у вигляді двох перших членів і запис розв'язку (52) у вигляді

$$\begin{gathered} u_1^{(\alpha)}(x_1,t) = A_{o1}^{(\alpha)} e^{i\left[a\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}\;\; t\right) - (1/2)atv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right]} + \\ + l\left[a\left(x_1 - v_L^{(\delta)}\;\; t\right) - (1/2)\,atv_L^{(\delta)}p^{(\delta)}u_{1,1}^{(\delta)}\right] A_{o1}^{(\delta)} e^{i\left[a\left(x_1 - v_L^{(\delta)}\;\; t\right) - (1/2)atv_L^{(\delta)}p^{(\delta)}u_{1,1}^{(\delta)}\right]}. \end{gathered} \quad (59)$$

Наступний крок полягає в наближеному представленні розв'язку (59) через ряд Тейлора в околі фази хвилі $\sigma^{(\alpha)} = a\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right)$ з постійною фазовою швидкістю і масштабним коефіцієнтом a. Для цього вибираються малі параметри

$$\left|\delta^{(\alpha)}\right| = \left|(1/2)\,atv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right| \ll 1 \quad (60)$$

і використовується процедура

$$\begin{gathered} A_{o1}^{(\alpha)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right) + i(1/2)atv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}} = F\left(\sigma^{(\alpha)} + \delta^{(\alpha)}\right) = \\ = F\left(\sigma^{(\alpha)}\right) + F^{/}\left(\sigma^{(\alpha)}\right)\delta^{(\alpha)} + (1/2)\,F^{//}\left(\sigma^{(\alpha)}\right)\left(\delta^{(\alpha)}\right)^2 + \cdots \end{gathered} \quad (61)$$

$$F\left(\sigma^{(\alpha)}\right) = A_{o1}^{(\alpha)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right)}; \quad F^{/}\left(\sigma^{(\alpha)}\right) = iA_{o1}^{(\alpha)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right)}. \quad (62)$$

Введено додаткові малі параметри (нове обмеження на градієнт зміщення: оскільки малість $\left|p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right|$ уже припущена в (57), то це фактично умова на $atv_L^{(\alpha)}$ – масштабний коефіцієнт; фазова швидкість у лінійному наближенні; час поширення хвилі) дозволяють обмежити аналіз першими двома членами в (61)

$$\begin{gathered} A_{o1}^{(\alpha)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right) + i(1/2)tv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}} \approx F\left(\sigma^{(\alpha)}\right) + F^{/}\left(\sigma^{(\alpha)}\right)\delta^{(\alpha)} = \\ = A_{o1}^{(\alpha)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right)} + iA_{o1}^{(\alpha)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right)}\left(a(1/2)\,tv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right) = \\ = A_{o1}^{(\alpha)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right)}\left(1 + i(1/2)\,atv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right). \end{gathered} \quad (63)$$

Тепер розв'язок (59) можна представити наближено у вигляді

$$\begin{gathered} u_1^{(\alpha)}(x_1,t) \approx A_{o1}^{(\alpha)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right)}\left(1 + i(1/2)\,atv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right) + \\ + l\left[ax_1 - atv_L^{(\delta)}\left(1 - (1/2)\,p^{(\delta)}u_{1,1}^{(\delta)}\right)\right] A_{o1}^{(\delta)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\delta)}t\right)}\left(1 + i(1/2)\,atv_L^{(\delta)}p^{(\delta)}u_{1,1}^{(\delta)}\right). \end{gathered} \quad (64)$$

Далі доцільно обчислити наближено похідні

$$\begin{gathered} u_{1,1}^{(\alpha)} \approx A_{o1}^{(\alpha)} iae^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right)}\left(1 + i(1/2)\,atv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}u_{1,1}^{(\alpha)}\right) + \\ + \left\{l\left(a\left(x_1 - tv_L^{(\delta)}\right)\right) \equiv l_L^{(\delta)}\right\} A_{o1}^{(\delta)} iae^{ia\left(x_1 - v_L^{(\delta)}t\right)}\left(1 + i(1/2)\,atv_L^{(\delta)}p^{(\delta)}u_{1,1}^{(\delta)}\right), \end{gathered} \quad (65)$$

чи

$$u_{1,1}^{(\alpha)} \approx ia\left\{A_{o1}^{(\alpha)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\alpha)}t\right)} + l_L^{(\delta)} A_{o1}^{(\delta)} e^{ia\left(x_1 - v_L^{(\delta)}t\right)}\right\} = iau_{L1}^{(\alpha)}. \quad (66)$$

Якщо врахувати (65) і (66), то розв’язку (64) можна надати вигляд

$$u_1^{(\alpha)}(x_1,\,t)\approx u_{L1}^{(\alpha)}-\left(1/2\right)a^2t\,v_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}\left(u_{L1}^{(\alpha)}\right)^2+l_L^{(\delta)}\left[u_{L1}^{(\delta)}-\left(1/2\right)a^2t\,v_L^{(\delta)}p^{(\delta)}\left(u_{L1}^{(\delta)}\right)^2\right],$$

або

$$\begin{aligned}u_1^{(\alpha)}(x_1,t)\approx{}& A_{o1}^{(\alpha)}e^{ia\left(x_1-v_L^{(\alpha)}t\right)}-\left(1/2\right)a^2tv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}\left(A_{o1}^{(\alpha)}\right)^2e^{i2a\left(x_1-v_L^{(\alpha)}t\right)}+\\&+l_L^{(\delta)}\left[A_{o1}^{(\delta)}e^{ia\left(x_1-v_L^{(\delta)}t\right)}-\left(1/2\right)a^2tv_L^{(\delta)}p^{(\delta)}\left(A_{o1}^{(\delta)}\right)^2e^{i2a\left(x_1-v_L^{(\delta)}t\right)}\right].\end{aligned}\tag{67}$$

Слід звернути увагу на ту особливість наближеного представлення розв’язку (67), що тут швидкість хвилі вже постійна і відповідає лінійному наближенню.

Лінійна частина розв’язку відповідає розв’язку, описаному раніше в параграфі 2 зі всіма особливостями хвильового руху в двофазному матеріалі (двофазній суміші). Введення нелінійності в постановку задачі має наслідком ускладнення в представленні мод – кожна мода являє собою хвилю, складену з суперпозиції двох гармонічних хвиль, одна з яких є 1-ою гармонікою, а друга – 2-ою гармонікою. Формула (67) описує не тільки структурні ефекти, характерні для суміші, але і нелінійні хвильові ефекти, які полягають у виникненні 2-ої гармоніки і зміні амплітуди з часом поширення хвилі (чи з пройденою хвилею відстанню). Цей час (відстань) є параметром, що суттєво впливає на перерозподіл амплітуд між гармоніками. В (67) амплітуди перших гармонік $A_{o1}^{(\alpha)}$ вважаються за означенням плоскої хвилі постійними, тоді як амплітуди других гармонік $\left(1/2\right)a^2tv_L^{(\alpha)}p^{(\alpha)}\left(A_{o1}^{(\alpha)}\right)^2$ залежать від багатьох параметрів – лінійно від часу руху хвилі, швидкостей мод хвилі в лінійному наближенні і параметрів $p^{(\alpha)}$, які визначають матеріал, квадратично від початкових амплітуд $A_{o1}^{(\alpha)}$ та масштабного параметра a, що визначає у даному випадку довжину хвилі.

Більш інформативний аналіз дають числові розрахунки. Однак, вони потребують повних наборів механічних постійних моделі. Як відомо [27], такі набори для моделей мікро- та наноструктурованих композитних матеріалів є рідкістю.

Висновок.

Показана процедура наближеного аналізу нелінійної плоскої поздовжної пружної гармонічної хвилі зміщення. Аналіз проведено методом обмеження на градієнт зміщення в рамках двофазної теорії суміші. Отримано наближений розв’язок у вигляді перших двох наближень – лінійного і квадратично нелінійного. Основна увага зосереджена на перерозподілі амплітуд між модами як одному з основних хвильових ефектів.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Нелінійна плоска поздовжна пружна хвиля зміщення вивчається теоретично в рамках моделі Мернагана для гармонічного початкового профілю. Основна новизна полягає в тому, що еволюція хвиль аналізується розробленим наближеним методом обмеження на градієнт зміщення в рамках двофазної теорії суміші. Показано, що початково збуджена одна хвиля розділяється на чотири хвилі-моди, всі моди дисперсійні і спотворені та кожна хвиля-мода представлені як суперпозиція першої і другої гармонік. При цьому амплітуда другої гармоніки залежить від багатьох параметрів, включаючи пряму залежність від часу. Ця залежність означає, що друга гармоніка буде домінувати з часом.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: двофазна пружна суміш; гармонічна нелінійна пружна Р-хвиля; потенціал Мернагана; наближений метод; еволюція; спотворення; нові хвильові ефекти.

1. *Бабич В.М., Киселев А.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. – Санкт-Петербург: БХВ- Петербург, 2014. – 320 с.
2. *Виноградова М. Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. – Москва: Наука, 1990. – 432 с.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. – Киев: Наукова думка, 1986. – 376 с., 536 с.
4. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 519 с.
5. *Крылов В.В., Красильников В.А.* Введение в физическую акустику. – Москва: Наука. 1986. – 432 с.
6. *Рабинович М. Н., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. – Москва: Наука, 1984. – 432 с.
7. *Рущицкий Я.Я.* Элементы теории смеси (Elements of the theory of mixtures). – Киев: Наукова думка, 1991. – 160 с.
8. *Рущицький Я.Я.* Про наближений аналіз еволюції поздовжної хвилі, що поширюється в пружному середовищі // Доп. НАН України. – 2019. – N 8. – С. 46 – 58.
9. *Рущицький Я.Я., Цурпал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ, 1998. – 377 с.
10. *Юрчук В.М.* Теорія поодиноких хвиль в нелінійно пружних матеріалах. Дис. на здоб. наук. ступ. канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Інст. механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ, 2019. – 144 с.
11. *Cattani C., Rushchitsky J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostru cture. – Singapore – London: World Scientific, 2007. – 466 p.
12. *Murnaghan F.* Finite Deformation in an Elastic Solid. 2nd ed. – New York: John Wiley, 1967. – 140p.
13. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
14. *Achenbach J.D.* Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: North-Holland, 1973. – 425 p.
15. *Bedford A., Drumheller D.S.* Theories of immiscible and structured mixtures // Int. J. Eng. Sci. – 1983. – **21**, N 8 – P.863 – 960.
16. *Bedford A., Drumheller D.S.* Introduction to Elastic Wave Propagation. – Chichester: John Wiley, 1994. – 420 p.
17. *Engelbrecht Y.* Questions About Elastic Waves. – Berlin: Springer, 2015. – 196 p.
18. *Lempriere B.M.* Ultrasound and Elastic Waves: Frequently Asked Questions. – New York: Academic Press, 2002. – 223 p.
19. *Rushchitsky J.J.* Interaction of waves in solid mixtures // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, N 2. – P. 35 – 74.
20. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
21. *Rushchitsky J.J.* Plane nonlinear elastic waves: approximate approaches to analysis of evolution – plenary lecture // Abstracts of 19th int. conf. «Dynamical System Modeling and Stability Investigations» – DSMSI 2019, Ukraine, Taras Shevchenko Kyiv National University, May 22 – 24. – 2019. – P. 221 – 223.
22. *Rushchitsky J.J.* Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution. Chapter 3 in the book «Understanding Plane Waves» Ed. William A. Cooper. – New York: Nova Science Publishers, 2020. – 224 p. – P. 147 – 203.
23. *Rushchitsky J.J.* Theory of Waves in Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 240 p.
24. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* An Approximate Method for Analysis of Solitary Waves in Nonlinear Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – **51**, N 3. – P. 282 – 290.
25. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Numerical Analysis of the Evolution of Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. Appl. Mech. – 2017. – **52**, N 1. – P. 104 – 110.
26. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-Wave. Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 5. – P. 581 –589.
27. *Rushchitskii Y.Y., Guz I.A.* Comparison of mechanical properties and effects in micro-and nanocomposites with carbon fillers (carbon microfibers, graphite microwhiskers, and carbon nanotubes) // Mechanics of Composite Materials. – 2004. – 40, N3. – P. 179 – 190.

Надійшла 03.02.2020 Затверджена до друку 15.12.2020