

Б. М. Кіфоренко

ЕНЕРГЕТИЧНА СТАЛА ЧАСУ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

*Інститут механіки ім. С.П Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: bkifor@ukr.net*

Abstract. An analysis of oscillating dynamic system control is presented. The results of analysis permit to determine that the duration of the interval between the optimal switching moments of the control functions remains constant. A new notion of energy-stand-time system is introduced. The relation between the constancy of the given value and the validity of the general experiential principle of minimizing energy dissipation in processes of any nature are analyzed.

Key words: oscillating dynamic system, optimal switching moment, energy-stand-time system, principle of minimizing energy dissipation.

Вступ.

Як відомо, стала часу – це узагальнений параметр, що характеризує динамічні властивості об'єкта і має розмірність часу. Стала часу широко використовується при розрахунку динаміки різних об'єктів дослідження та функціональних і конструктивних особливостей їх систем керування. Наприклад, для керованої динамічної системи – це проміжок часу, протягом якого параметр, що характеризує досліджуваний перехідний процес, змінюється в e разів ($e \approx 2,718$). У цій статті вводиться в розгляд поняття енергетичної сталої часу і досліджуються її властивості. Обговорюється залежність величини зазначеного проміжку часу від співвідношення потужності керуючих сигналів системи керування і збурюючих впливів, яким піддається керований об'єкт. Це дозволяє оцінити як можливість виконання заданого маневру керованим об'єктом, що досліджується, так і необхідні витрати на досягнення зазначеної мети. При отриманні негативної оцінки необхідне польотне коректування. Якщо скоригована мета виявляється недосяжною, необхідно підбирати інший об'єкт з наявного парку, або оцінити необхідні витрати і час для розробки об'єкта відповідної потужності. Якщо і це неможливо, залишається зіставити актуальність мети дослідження з зазначеними витратами щодо розробки такого об'єкта, або про відмову від її реалізації.

1. Аналіз оптимального керування коливальними динамічними системами.

Поняття сталої часу особливо часто використовується при аналізі процесів управління коливальними динамічними системами. Це пов'язано з ефективністю використання резонансних властивостей керуючих систем технічними об'єктами [7, 8], при аналізі проблематики управління економічними і соціальними об'єктами, при описі функціонування об'єктами живої природи.

Нехай рівняння руху центру мас керованого об'єкта задано у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = v + a_1 u_1; \quad \frac{dv}{dt} = -k^2 x - 2cv + a_2 u_2. \quad (1)$$

Тут a_1, a_2, c, k – задані сталі; $u_1 \in [u_{10}, u_1^0]$, $u_2 \in [u_{20}, u_2^0]$ – керуючі функції, яка сформульована для об'єкта термінальної задачі Майєра. Функцію Понтрягіна цієї системи представимо наступним чином:

$$H = \psi_x (v + a_1 u_1) + \psi_v (-k^2 x - 2cv + a_2 u_2). \quad (2)$$

Оптимальні керування задаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} u_1 &= \{u_{10} \text{ при } \psi_x a_1 \leq 0, u_1^0 \text{ при } \psi_x a_1 > 0\}; \\ u_2 &= \{u_{20} \text{ при } \psi_v a_2 \leq 0, u_2^0 \text{ при } \psi_v a_2 > 0\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Моменти перемикання керувань τ та \mathcal{G} – це нульові значення відповідних приєднаних функцій ψ_x та ψ_v . Довжини інтервалів $\omega_j = \tau_j - \mathcal{G}_j$ між моментами перемикання залежать від співвідношення між модулем пружності k^2 і коефіцієнтом опору середовища $2c$:

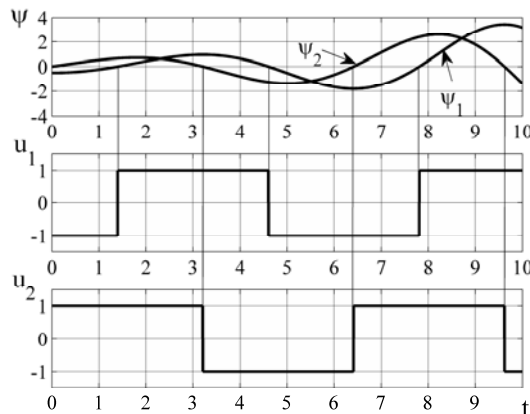
$$\begin{aligned} \tau - \mathcal{G} &= \frac{1}{\sqrt{k^2 - c^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{c}{\sqrt{k^2 - c^2}} \right] \text{ при } c < k; \quad \tau - \mathcal{G} = \frac{1}{c} = \frac{1}{k} \text{ при } c = k; \\ \tau - \mathcal{G} &= \frac{1}{2\sqrt{c^2 - k^2}} \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - k^2}}{c - \sqrt{c^2 - k^2}} \text{ при } c > k. \end{aligned} \quad (4)$$

Особливістю наведених співвідношень є їх незалежність від параметрів $u_{10}, u_1^0, u_{20}, u_2^0$, що характеризують як систему керування об'єкта, так і чутливість об'єкта до впливу керувань (параметри a_1, a_2).

Тривалість цих інтервалів якраз і становить енергетичну сталу відповідної динамічної системи. Результати аналізу великої кількості задач керування коливаннями, проведеного автором цієї роботи, свідчать про інваріантність зазначених інтервалів по відношенню до зміни граничних умов термінальних задач керування динамічними системами та до вибору функціоналів оцінки якості керування. Таким чином, є підстави стверджувати, що сталість введених в розгляд в цій статті енергетичних параметрів носить загальносистемний характер в динаміці керованих коливальних об'єктів.

Проаналізуємо варіації повної енергії динамічної системи на прикладі проблеми керування коливаннями з використанням системи керувань, що включає дві функції керування (див. систему рівнянь (1)). Припустимо, що єдина причина безповоротних втрат енергії рухомого об'єкта – гідравлічний опір: $-2cv$.

На рисунку представлено залежність керувань $u_1 \in [u_{10}, u_1^0]$, $u_2 \in [u_{20}, u_2^0]$ від часу та відповідних перемикаючих функцій.



Відмітимо, що ϑ збігається з моментом досягнення центром мас керованого об'єкта локального максимуму повної енергії, а τ – з моментом проходження центром мас найближчої до ϑ точки мінімуму.

2. Аналіз керування аперіодичними динамічними системами.

Представлене в попередньому розділі поняття отримано і проаналізовано для окремого випадку системи (1). У загальному випадку системи другого порядку:

$$\frac{d x_1}{d t} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1 u_1; \quad \frac{d x_2}{d t} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_2 u_2. \quad (5)$$

Співвідношення (4) між зазначеними моментами в разі дійсних коренів характеристичного рівняння перетвориться до вигляду

$$\theta = \tau + \frac{1}{2\sqrt{c^2 - k^2}} \ln \frac{a_{11} + k_1}{a_{11} + k_2}. \quad (6)$$

Отже, для системи (5) тривалість паузи між сусідніми моментами перемикання керувань не залежить не тільки від граничних умов і функціонала задачі, але і від чутливості об'єкта до керуючих впливів (параметри b_1 та b_2). Сталість тривалості інтервалів природна при керуванні рухом об'єкта, що має однакові корені характеристичного рівняння. У разі комплексних коренів мова йде про резонансне керування рухом динамічної системи. Але який сенс оптимального керування рухом системи при дійсних коренях характеристичного рівняння, коли рух носить аперіодичний характер з локальними амплітудами керуючих функцій, що зменшуються під впливом тертя? Чому природне зменшення амплітуд керуючих функцій не супроводжується зменшенням інтервалів між точками перемикання керувань u_1 і u_2 ? Здавалося б – чим слабший вплив керувань, тим довший повинен бути інтервал прикладення керуючої сили. Питання залишається відкритим. Не ясно, яким повинен бути цей інтервал в разі дійсних коренів характеристичного рівняння, коли розв'язок спряженої системи аперіодичний і про резонансність керування мова йти не може. Вдається лише отримати трактування динамічного сенсу тривалості цього інтервалу. Це відстань у часі між моментами досягнення максимального значення кінетичної енергії центру мас керованого об'єкта і його мінімального значення. Встановлений збіг тривалості цієї паузи з відстанню між тими двома моментами перемикання керувань, про які йде мова в теоремі Фельдбаума [5]. Нижче наведені міркування автора цієї роботи про те, чому така тактика керування рухом може виявитися доцільною.

Інваріантність тривалості цієї паузи щодо термінальної задачі керування динамічною системою виявилася несподіваною властивістю енергетичної сталої. Для обчислення тривалості енергетичної паузи навіть немає необхідності формулювати будь-яку варіаційну проблему для керованого об'єкта. Для того, щоб виписати відповідну формулу для системи (1), необхідні лише значення сталих τ і θ та параметрів k і c . Отже, енергетична стала часу є загальносистемним параметром, що відображає особливості реакції динамічних систем на динаміку керуючих впливів. По теоремі Фельдбаума [5] кожна з керуючих функцій в системі (1) має не більше одного перемикання, причому тривалість інтервалу $[\tau, \theta]$ не залежить не тільки від граничних умов, а й від граничних значень керуючих впливів u_1 та u_2 , що характеризують потужність системи управління. Співпадіння тривалості паузи $\theta - \tau$ з інтервалом, зазначеним теоремою Фельдбаума, дозволяє стверджувати про загальносистемний характер такого характеру управління коливальними системами.

Висновки.

Поняття «стала часу» постійно використовується в теорії керування. Інваріантність енергетичної сталої щодо зміни граничних умов і критерію якості управління динамічною системою виду (1) або, в загальному випадку, виду (5) – несподівана властивість енергетичної характеристики керованої динамічної системи. Автор цієї робо-

ти пропонує для обговорення гіпотезу про можливість вважати зазначену інваріантність безпосередньо пов'язаною зі справедливістю загального принципу мінімуму дисипації енергії. Цей принцип відноситься до емпіричних, оскільки в даний час в науковій літературі відсутні як логічний доказ його справедливості, так і приклади його порушення [4].

Поняття «інваріантність» як науковий термін введено в теорію автоматичного керування Г.І. Щипановим в 1939 році в роботі [6]. В роботі [3] і в монографії [1] отримані і проаналізовані умови інваріантності, тобто незалежності однієї або декількох регульованих величин від зовнішніх впливів. У цій же роботі вводиться в розгляд нове поняття – загальносистемна інваріантність як спосіб узгодження дій, які керують динамічною системою, що не залежить від граничних умов, критерію якості та керування в кожному конкретному випадку. Властивість інваріантності сама по собі вимагає ретельного аналізу, оскільки є такою, що порушує глобальний принцип зв'язку наслідку і його причини. Це протиріччя вимагає як спеціального аналізу причин цієї інваріантності, так і з'ясування природи тих властивостей керованого об'єкта, які ці співвідношення виражають. Відсутність відповідей на зазначені питання викликає природну недовіру до отриманого розв'язку, обґрунтовану *prinsipium sive lex ratiois sufficientis* Лейбніца: «жодне явище не може опинитися істинним або дійсним, жодне твердження – справедливим без достатніх підстав, чому справа йде так, а не інакше ...» [2].

Отже, проведений аналіз дозволив встановити, що тривалість інтервалу між оптимальними моментами перемикання керуючих функцій зберігає постійне значення. Результати аналізу процесів енергетичного обміну в системі керування рухом дозволили ввести в розгляд нове поняття «енергетична стала часу» системи. Висунуто гіпотезу про те, що постійність зазначеної величини є своєрідним підтвердженням її зв'язку з валідністю загального принципу мінімуму дисипації енергії в процесах будь якої природи.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Наведено результати аналізу режимів керування коливальними динамічними системами. Проведений аналіз дозволив встановити, що тривалість інтервалу між оптимальними моментами переключення керуючих функцій зберігає постійні значення. Введено в розгляд нове поняття «енергетична константа часу» системи. Проаналізовано зв'язок постійності зазначеної величини з валідністю загального дослідного принципу мінімуму дисипації енергії в процесах довільної природи.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: коливальні динамічні системи, оптимальні моменти перемикання, система часу очікування, принцип мінімізації розсіювання енергії.

1. *Кухтенко А.И.* Проблема инвариантности в автоматике. – Киев: Гостехиздат УССР, 1965. – 376 с.
2. *Лейбниц Г.* Монадология. Сочинения в 4 томах. Том I. – Москва: Мысль, 1982. – 636 с.
3. *Лузин Н.Н.* К изучению матричной теории дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. – 1940. – № 5. – С. 3 – 66.
4. *Моисеев Н.Н.* Человек, среда, общество. – Москва: Наука, 1982. – 240 с.
5. *Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.* Методы теории автоматического управления. – Москва: Наука, 1971. – 743 с.
6. *Щипанов Г.В.* Теория и методы проектирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. – 1939. – № 1. – С. 49 – 66.
7. *Nikitina N.V.* Stability Analysis of Rotary Motions of a Quadrocopter // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 648 – 653.
8. *Tkachenko Ya.V.* Method of Optimizing Maneuvers of an Orbital Transfer Vehicle in a Strong Central Field of Gravity // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 544 – 551.

Надійшла 09.10.2019

Затверджена до друку 15.12.2020