

В.С.Ловейкін¹, Ю.О.Ромасевич¹, А.С.Хорошун²

**ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СТАБІЛІЗАЦІЄЮ
ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА З МАХОВИКОМ. ЧАСТИНА 2**

¹Національний університет біоресурсів і природокористування України,
вул. Героїв оборони, 12 в, Київ, Україна; e-mail: lovvs@ukr.net

¹Національний університет біоресурсів і природокористування України,
вул. Героїв оборони, 12 в, Київ, Україна; e-mail: romasevichyuriy@ukr.net

²Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: khoroshunanatoliy@gmail.com

Abstract. The transformation of the mathematical model of an inverted pendulum with a flywheel is carried out. A complex optimization criterion and the constraints on the control of the motion of system are justified. In order to solve the problem, the dynamic programming method was used. It allowed to reduce the initial problem to the finding of the roots of a system of algebraic equations. Among the set of the found roots, those were selected that ensure the stability of the motion of system. Thus, the optimal control of stabilization of inverted pendulum with a flywheel in the closed-loop form is found. The measurable variable is the angle of deviation of the pendulum (other phase coordinates can be calculated based on the measurable variable). A brief comparative analysis of the results showed a significant impact of the optimization criterion weight coefficients on the control dynamics.

Key words: inverted pendulum, closed-loop control, dynamic programming, optimal control.

Вступ.

Перевернутий маятник з маховиком відноситься до класу малоприводних систем [5]. Задачі їх керування є цінними з точки зору розробки нових або вдосконалення відомих методів керування. Ці задачі також мають практичну цінність у зв'язку з широким розповсюдженням гіробордів, сігвеїв, квадрокоптерів та інших мехатронних пристроїв. Отримані методи можна використовувати також в сфері вантажопідійомних машин [12], транспорту [16], робототехніки [3], автоматики [13] тощо.

Інтерес до задачі стабілізації перевернутого маятника з маховиком підтверджується значною кількістю публікацій по даній тематиці. Наприклад, в наукометричній базі Web of Science запит „control of the inertia wheel pendulum” дозволяє знайти 143 наукові роботи (станом на 2 липня 2019 р.).

Для розв'язання задач керування перевернутого маятника з маховиком використовуються нелінійні [1, 5, 7] і лінійні [4, 8, 10] моделі. Останні адекватно описують поведінку системи поблизу положення рівноваги, тому результати, які отримано з їх використанням, можна застосовувати лише при незначному куті відхилення маятника від рівноваги.

Одним з елементів постановочної частини задачі керування стабілізацією перевернутого маятника з маховиком є обмеження на керування [1, 4, 7, 8, 10, 14]. Його введення обґрунтовано обмеженими можливостями електроприводу маховика [8, 14] або джерела живлення електроприводу [1, 7, 8, 10].

Один з підходів [7] до розв'язання задачі полягає у переведенні маятника в окіл верхнього положення рівноваги і його стабілізації в цьому положенні за допомогою ПІД-регулятора, коефіцієнти якого знайдені за допомогою генетичного алгоритму. ПІД-алгоритм використаний також в роботах [10, 17]. Налаштування коефіцієнтів ПІД-регулятора в роботі [14] проводилося за допомогою програмного продукту Matlab Graphical Controller Design Toolbox. Однак, ці та подібні методи не у всіх випадках дають можливість знайти оптимальні коефіцієнти регулятора.

У даному дослідженні знайдено розв'язок задачі оптимального керування стабілізацією перевернутого маятника з маховиком у вигляді зворотного зв'язку (задачу можна розглядати як синтез оптимального регулятора). Критерій оптимізації представлено у вигляді комплексного інтегрального функціоналу, а на керування накладаються обмеження.

§1. Перетворення математичної моделі перевернутого маятника з маховиком.

В даному дослідженні користуватимемося моделлю перевернутого маятника з маховиком, яка була використана в першій частині статті [8], і яка подана на рис. 1.

У попередній частині дослідження [8] було використано лінеаризовану систему диференціальних рівнянь, яка описує динаміку руху перевернутого маятника з маховиком:

$$\begin{cases} \alpha_1 \ddot{\varphi} + J \dot{\omega} = \alpha_2 \varphi; \\ J(\ddot{\varphi} + \dot{\omega}) = M, \end{cases} \quad (1.1)$$

де φ – узагальнена координата маятника (кут відхилення маятника від вертикалі); ω – кутова швидкість руху маховика маятника; J – момент інерції маховика і ротора електродвигуна; M – електромагнітний момент, створюваний електродвигуном; α_1 і α_2 – коефіцієнти, які визначаються із наступних співвідношень: $\alpha_1 = J_p + m_w L^2$, $\alpha_2 = (m_p l + m_w L)g$; m_p – маса маятника; m_w – маса маховика та електродвигуна; g – прискорення вільного падіння; l – відстань від центра мас маятника до осі його повороту; L – еквівалентна довжина маятника; J_p – момент інерції маятника. Точка над символом в рівняннях (1.1) та у наступному викладі означає диференціювання за часом.

Задача керування рухом системи (1.1) полягає в тому, щоб перевести її з початкового (збуреного) стану в стан спокою. При цьому маятник повинен займати положення верхньої (нестійкої) рівноваги. Математично це записується в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0; \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0; \quad \omega(0) = \omega_0; \\ \varphi(T) &= 0; \quad \dot{\varphi}(T) = 0; \quad \omega(T) = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де T – тривалість керованого режиму руху системи.

Для проведення досліджень перетворимо математичну модель системи (1.1) в більш зручну форму. Для цього виразимо з першого рівняння кутове прискорення маховика і проінтегруємо отриману рівність в межах від 0 до t :

$$\int_0^t \dot{\omega} dt = \frac{\alpha_2}{J} \int_0^t \varphi dt - \frac{\alpha_1}{J} \int_0^t \ddot{\varphi} dt. \quad (1.3)$$

Обчислюючи інтеграли та врахувавши початкові умови (1.2), отримаємо наступний вираз:

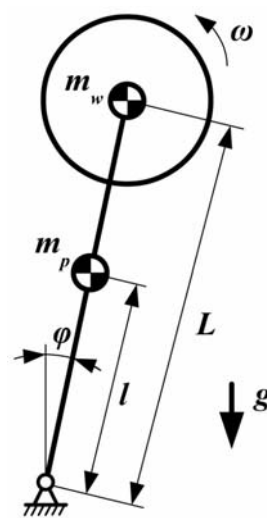


Рис. 1

$$\omega = \frac{\alpha_2}{J} \int_0^t \varphi dt - \frac{\alpha_1}{J} \dot{\varphi} + \frac{\alpha_1}{J} \dot{\varphi}_0 + \omega_0. \quad (1.4)$$

Відзначимо, що зробивши заміну символу $t \rightarrow T$, а також з огляду на кінцеві умови (1.2), можемо отримати ізопериметричну умову:

$$\int_0^T \varphi dt = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \dot{\varphi}_0 - \frac{J}{\alpha_2} \omega_0, \quad (1.5)$$

яку було використано в першій частині дослідження [8] для розв'язку задачі оптимального керування системою у варіаційній постановці.

Введемо в розгляд наступну функцію:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\alpha_2}{J} \int_0^t \varphi dt + \frac{\alpha_1}{J} \dot{\varphi}_0 + \omega_0. \quad (1.6)$$

Якщо буде задовольнятися умова $\tilde{\varphi}(T) = 0$, то очевидно, що ізопериметрична умова (1.5) буде справедливою, що, у свою чергу, означає, що $\omega(T) = 0$.

Введення в розгляд функції (1.6) дозволяє записати рівняння (1.1) в нормальній формі:

$$\ddot{\tilde{\varphi}} = \varphi A_1; \quad \dot{\varphi} = \gamma; \quad \dot{\gamma} = u - \varphi A_2, \quad (1.7)$$

де A_1 і A_2 – коефіцієнти, які визначаються наступним чином: $A_1 = \alpha_2 / J$, $A_2 = \alpha_2 / (J - \alpha_1)$; u – керування ($u = M / (J - \alpha_1)$); γ – кутова швидкість коливань маятника.

Для нових координат системи запишемо краєві умови руху:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(0) &= \frac{\alpha_1}{J} \dot{\varphi}_0 + \omega_0; \quad \varphi(0) = \varphi_0; \quad \gamma(0) = \dot{\varphi}_0; \\ \tilde{\varphi}(T) &= 0; \quad \varphi(T) = 0; \quad \gamma(T) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким чином, перетворена математична модель системи (1.7) має перевагу: єдиною вимірюваною координатою при побудові керування у вигляді зворотного зв'язку може бути кут φ . Інтеграл і похідна φ за часом можуть бути без проблем обчислені в чисельному вигляді. У плані практичної реалізації таке керування має перевагу, оскільки в разі $\omega_0 = 0$ відпадає необхідність вимірювати кутову швидкість маховика. Дійсно, на початку керованого режиму маховик може знаходитись у стані спокою.

§2. Обґрунтування критерію і обмежень в задачі оптимального керування.

В даному дослідженні прийемо наступний критерій оптимізації:

$$I = \int_0^T (\delta_0 \tilde{\varphi}^2 + \delta_1 \varphi^2 + \delta_2 \gamma^2 + \delta_3 u^2) dt \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

де $\delta_0, \dots, \delta_3$ – коефіцієнти, які визначаються наступним чином:

$$\delta_j = w_j \mu_j \sum_{j=0}^3 w_j = 1, \quad j = (\overline{0, 3}), \quad (2.2)$$

де w_j – ваговий коефіцієнт, який показує важливість мінімізації j -го компоненту критерію (2.1); μ_j – коефіцієнт, який зводить розмірність j -го компоненту критерію (2.1) до безрозмірного виду.

Критерій (2.1) на компромісній основі відображає необхідність мінімізації небажаних показників керованого процесу. Його перші три компонента показують величину фазових координат системи протягом руху системи.

Останній компонент критерію (2.1) показує величину витрачених «ресурсів» на керування рухом системи.

Крім того, як і в першій частині дослідження [8], на керування накладаються симетричні обмеження:

$$|u| \leq u_{\max}, \quad (2.3)$$

де u_{\max} – максимальне керування ($u_{\max} = M_{\max}/(J - \alpha_1)$); M_{\max} – максимальний електромагнітний момент двигуна, який визначається його перевантажувальною здатністю.

§3. Розв'язок задачі методом динамічного програмування.

Для розв'язку поставленої задачі використаємо метод динамічного програмування [15]. Основне функціональне рівняння для критерію (2.1) буде мати такий вигляд:

$$\min_{|u| \leq u_{\max}} \left[\delta_0 \tilde{\varphi}^2 + \delta_1 \varphi^2 + \delta_2 \gamma^2 + \delta_3 u^2 + \frac{\partial S}{\partial \tilde{\varphi}} \varphi A_1 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \gamma + \frac{\partial S}{\partial \gamma} (u - \varphi A_2) \right] = 0, \quad (3.1)$$

де S – функція Беллмана. Рівняння (3.1) розпадається на два рівняння: перше відображає необхідну умову мінімуму критерію (2.1) при керуванні u , для якого справедлива нерівність (2.3), а друге є тривіальним, оскільки для нього керування знаходиться на межі допустимої області $u = u_{\max}$ або $u = -u_{\max}$. Таким чином, розв'яжемо рівняння (3.1) без урахування обмежень (2.3) – їх вплив враховуватиметься за допомогою наступної форми оптимального керування:

$$u_{opt} = \begin{cases} u_S, & \text{якщо } -u_{\max} \leq u_S \leq u_{\max}; \\ u_{\max}, & \text{якщо } u_{\max} \leq u_S; \\ -u_{\max}, & \text{якщо } -u_{\max} \geq u_S, \end{cases} \quad (3.2)$$

де u_S – розв'язок рівняння (3.1) без врахування обмежень (2.3); u_{opt} – розв'язок задачі оптимального керування (1.7), (1.8), (2.1) – (2.3).

Провівши заміну символу в рівнянні (3.1) $u \rightarrow u_S$ відмітимо, що воно лінійно залежить від u_S . Значить мінімум правої частини рівняння (3.1) будемо шукати по u_S . Для цього продиференціюємо її по u_S і прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_3 u_S + \frac{\partial S}{\partial \gamma} = 0. \quad (3.3)$$

З рівняння (3.3) знайдемо керування u_S :

$$u_S = -\frac{1}{2\delta_3} \frac{\partial S}{\partial \gamma}. \quad (3.4)$$

Підставимо вираз (3.4) в рівняння (3.1), в результаті чого матимемо нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних:

$$\min \left[\delta_0 \tilde{\varphi}^2 + \delta_1 \varphi^2 + \delta_2 \gamma^2 + \delta_3 \left(-\frac{1}{2\delta_3} \frac{\partial S}{\partial \gamma} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial \tilde{\varphi}} \varphi A_1 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \gamma + \frac{\partial S}{\partial \gamma} \left(-\frac{1}{2\delta_3} \frac{\partial S}{\partial \gamma} - \varphi A_2 \right) \right] = 0. \quad (3.5)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (3.5) у вигляді квадратичної форми:

$$S = B_0 \tilde{\varphi}^2 + B_1 \varphi^2 + B_2 \gamma^2 + B_3 \tilde{\varphi} \varphi + B_4 \tilde{\varphi} \gamma + B_5 \varphi \gamma, \quad (3.6)$$

де B_0, \dots, B_5 – постійні коефіцієнти. Візьмемо частинні похідні виразу (3.6) за функціями $\tilde{\varphi}$, φ та γ :

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{\varphi}} = 2B_0 \tilde{\varphi} + B_3 \varphi + B_4 \gamma; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = B_3 \tilde{\varphi} + 2B_1 \varphi + B_5 \gamma; \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma} = B_4 \tilde{\varphi} + B_5 \varphi + 2B_2 \gamma. \quad (3.9)$$

Підставимо вирази (3.7) – (3.9) в рівняння (3.5) і після перетворень матимемо:

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}^2 \left(\delta_2 - \frac{B_4^2}{4\delta_3} \right) + \tilde{\varphi} \varphi \left(2A_1 B_0 - \frac{B_4(B_5 + 2A_2 \delta_3)}{2\delta_3} \right) + \varphi^2 \left(A_1 B_3 + \delta_1 - \frac{B_4(B_5 + 4A_2 \delta_3)}{4\delta_3} \right) + \\ & + \tilde{\varphi} \gamma \left(B_3 - \frac{B_2 B_4}{\delta_3} \right) + \varphi \gamma \left(2B_1 - 2A_2 B_2 + A_1 B_4 - \frac{B_2 B_5}{\delta_3} \right) + \gamma^2 \left(B_5 + \delta_2 - \frac{B_2^2}{\delta_3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Рівняння (3.10) буде справедливим в тому випадку, коли вираз в дужках буде рівний нулю, оскільки $\tilde{\varphi}$, φ та γ не рівні нулю одночасно. Це означає, що рівняння (3.10) можна замінити на систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \delta_2 - \frac{B_4^2}{4\delta_3} = 0; \quad 2A_1 B_0 - \frac{B_4(B_5 + 2A_2 \delta_3)}{2\delta_3} = 0; \quad A_1 B_3 + \delta_1 - \frac{B_4(B_5 + 4A_2 \delta_3)}{4\delta_3} = 0; \\ B_3 - \frac{B_2 B_4}{\delta_3} = 0; \quad 2B_1 - 2A_2 B_2 + A_1 B_4 - \frac{B_2 B_5}{\delta_3} = 0; \quad B_5 + \delta_2 - \frac{B_2^2}{\delta_3} = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Використовуючи вирази (3.4) та (3.9), запишемо:

$$u_S = -\frac{B_4 \tilde{\varphi} + B_5 \varphi + 2B_2 \gamma}{2\delta_3}. \quad (3.12)$$

Таким чином, задача спрощується, оскільки нам необхідно знайти лише три коефіцієнта B_4 , B_5 та B_2 . Для цього перейдемо до системи трьох рівнянь:

$$\delta_2 - \frac{B_4^2}{4\delta_3} = 0; \quad B_5 + \delta_2 - \frac{B_2^2}{\delta_3} = 0; \quad -A_2 B_5 + \delta_1 - \frac{-4A_1 B_2 B_4 + B_2^2}{4\delta_3} = 0. \quad (3.13)$$

Перше рівняння системи (3.13) співпадає з першим рівнянням системи (3.11), друге – з останнім рівнянням системи (3.11), третє рівняння системи (3.13) отримано як різниця третього рівняння (3.11) і четвертого рівняння системи (3.11), яке помножене на A_1 .

Перше рівняння системи (3.13) незалежне і його корені легко знайти:

$$B_{4(1),(2)} = \pm 2\sqrt{\delta_0 \delta_3}. \quad (3.14)$$

Виражаючи з другого рівняння B_5 і підставляючи отримане в третє рівняння системи (3.13), отримуємо алгебраїчне рівняння четвертого степеня:

$$\sum_{n=0}^4 B_2^n C_n = 0, \quad (3.15)$$

де C_0, \dots, C_4 – коефіцієнти, які визначаються наступним чином: $C_0 = (\delta_1 + A_2 \delta_2 - \delta_2^2)/4\delta_3$;

$C_1 = A_1 B_4^2/\delta_3$; $C_2 = (\delta_2 - 2A_2 \delta_3)/2\delta_3^2$; $C_3 = 0$; $C_4 = -1/4\delta_3^3$.

За допомогою методу Декарта – Ейлера [2] отримано чотири корені рівняння (3.15): $B_{2(1)}, B_{2(2)}, B_{2(3)}, B_{2(4)}$. Із знайдених коренів необхідно вибрати один, це ж стосується і коефіцієнта B_4 . Цей вибір повинен бути здійснений з урахуванням вимоги стійкості

розв'язків системи диференціальних рівнянь (1.7). З цією метою був використаний алгебраїчний критерій Рауса – Гурвіца [9]. Ми не зупинятимемося на методиці використання цього критерію. Зазначимо лише остаточний результат: $B_4 = B_{4(2)}$, $B_2 = B_{2(2)}$ (обидва коефіцієнти додатні). Коефіцієнт $B_{2(2)}$ розраховується за допомогою такої формули:

$$B_{2(2)} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{6}} \left((C_3^{-1}(-4C_2 + \tilde{C}_2 \tilde{C}_1^{-1} + 2^{2/3} \tilde{C}_1))^{1/2} + (-C_3^{-1}(8C_2 + \tilde{C}_2 \tilde{C}_1^{-1} + 2^{2/3} \tilde{C}_1 + 12\sqrt{6}C_1(((C_3^{-1}(-4C_2 + \tilde{C}_2 \tilde{C}_1^{-1} + 2^{2/3} \tilde{C}_1)))^{-1}))^{1/2}) \right), \quad (3.16)$$

де \tilde{C}_1 , \tilde{C}_2 – коефіцієнти, які визначаються наступним чином:

$$\tilde{C}_1 = \sqrt[3]{2C_2^3 + 27C_1^2C_3 - 72C_0C_2C_3 + \sqrt{-4(C_2^3 + 27C_1^2C_3 - 72C_0C_2C_3)^2}};$$

$$\tilde{C}_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{2}(C_2^2 + 12C_0C_3).$$

Коефіцієнт B_5 (також додатній) з допомогою другого рівняння системи (3.13) виражається через знайдений коефіцієнт B_2 .

Для того, щоб оцінити знайдене оптимальне керування, задамо чисельними значеннями параметрів системи, а також режимними параметрами (таблиця).

Коефіцієнти μ_j розраховані, виходячи з наступних формул: $\mu_1 = 1/\omega_{ном}$, $\mu_2 = 1/\varphi_0$, $\mu_3 = 1/\dot{\varphi}_0$, $\mu_4 = 1/u_{max}$. Для представлення отриманих результатів побудуємо неklasичний фазовий портрет системи (рис. 2) і графік функції крутного моменту приводу (рис. 3). Сіра точка на рис. 2 і наступних графіках позначає початок координат. Всі графіки побудовано для таких значень коефіцієнтів: $\delta_0 = 0,1$, $\delta_1 = 0,01$, $\delta_2 = 0,01$, $\delta_3 = 0,01$.

Параметр	Значення
Параметри динамічної системи	
Еквівалентна довжина маятника L , м	$2,9 \cdot 10^{-1}$
Відстань від центра мас маятника до осі його повороту l , м	$2,6 \cdot 10^{-1}$
Момент інерції маховика і ротора електродвигуна J , кгм ²	$1,5 \cdot 10^{-3}$
Момент інерції маятника J_p , кгм ²	$4,2 \cdot 10^{-2}$
Маса маятника m_p , кг	$3,0 \cdot 10^{-1}$
Маса маховика та електродвигуна m_w , кг	$2,8 \cdot 10^{-1}$
Максимальний електромагнітний момент двигуна M_{max} , Нм	$6,0 \cdot 10^{-1}$
Режимні параметри	
Початковий кут відхилення маятника φ_0 , рад	$-1,5 \cdot 10^{-1}$
Початкова кутова швидкість маятника $\dot{\varphi}_0$, рад/с	$-1,5 \cdot 10^{-1}$
Початкова кутова швидкість маховика ω_0 , рад/с	0
Коефіцієнти для зведення розмірностей компонентів критерія (2.1) до безрозмірного вигляду:	
μ_1	$1,(6) \cdot 10^{-2}$
μ_2	$6,(6) \cdot 10^0$
μ_3	$6,(6) \cdot 10^0$
μ_4	$1,1 \cdot 10^{-1}$

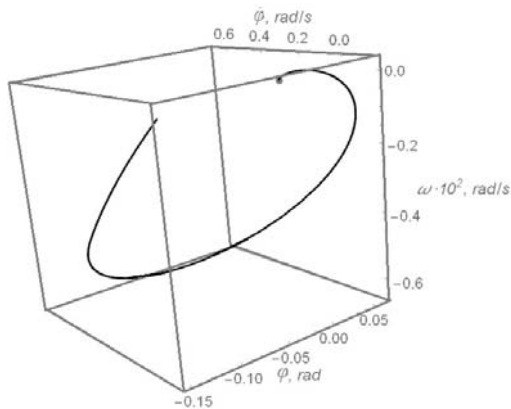


Рис. 2

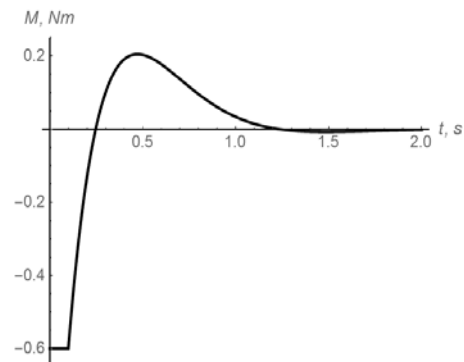


Рис. 3

Чисельні значення знайдених коефіцієнтів такі: $B_2 = 1,429$, $B_4 = 0,027$, $B_5 = 18,832$. Ці значення також було отримано за допомогою методики, що описана в першій частині статті [8] і яка ґрунтується на методі чисельної оптимізації ME-D-PSO [11]. Це підтверджує ефективність її використання для задач такого роду.

В подальшому викладі проведемо короткий аналіз отриманих результатів.

§4. Короткий аналіз результатів.

Аналізуючи рис. 3, можна переконатися в тому, що на початковій стадії функція оптимального керування проходить по області допустимих значень. Це викликано тим, що початкові значення фазових координат значні. По мірі руху точки в фазовому просторі до початку координат (рис. 2) керування слабшає: система наближається до кінцевого стану і складові в чисельнику дробу (3.12) зменшуються. Відзначимо, що подібна закономірність присутня і в інших задачах керування рухом малоприводних систем [6].

Зменшення коефіцієнта δ_3 сприяє зсуву «важливості» мінімізації керування до мінімізації фазових координат і, відповідно, керування збільшується (рис. 5). Однак, при цьому швидкодія системи зростає незначно, що викликано небажаним перерегулюванням (рис. 4).

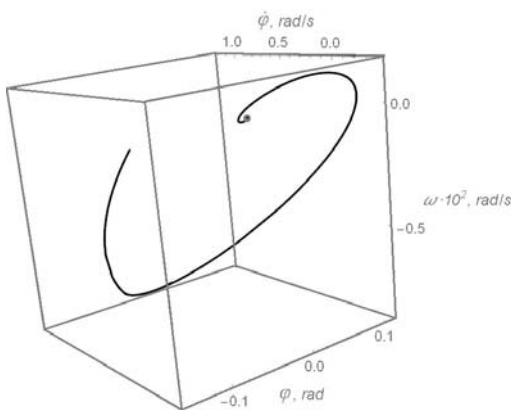


Рис. 4

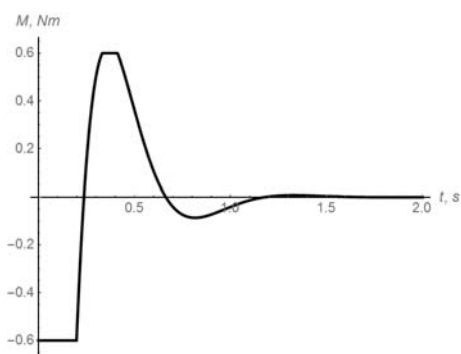


Рис. 5

Невеликий коефіцієнт δ_3 (наприклад, $\delta_3 = 0,05$ для варіанта, якому відповідає рис. 5) може викликати навіть досягнення керуванням іншої межі області допустимих керувань.

Можна навести приклади невдало підібраних коефіцієнтів $\delta_0, \dots, \delta_3$. Наприклад, величинам коефіцієнтів $\delta_0 = 0,1$, $\delta_1 = 100$, $\delta_2 = 100$, $\delta_3 = 1$ відповідають рис. 6 та 7.

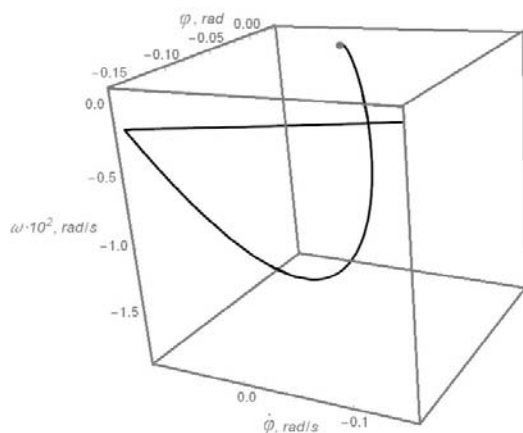


Рис. 6

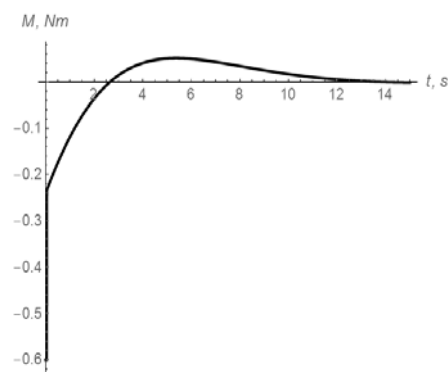


Рис. 7

З графічних залежностей, представлених на рис. 6 та 7 видно, що тривалість керування досить велика. Це є наслідком «слабкості» керування: воно значне лише в початковий момент часу. Крім того, максимальна кутова швидкість маховика зросла в порівнянні з варіантом, який показаний на рис. 2, в 2,1 рази. Це викликає питання про можливість реалізації такого керування на практиці.

Таким чином, було показано, що величини коефіцієнтів $\delta_0, \dots, \delta_3$ значно впливають на динаміку керування системою. Питання вибору цих коефіцієнтів, на наш погляд, заслуговує на окреме глибоке дослідження. Зазначимо лише, що вибір вагових коефіцієнтів повинен проходити з урахуванням основних показників керованого процесу: тривалості, перерегулювання, величини критерію (2.1) та інших.

Висновок.

В другій частині дослідження задача оптимального керування стабілізацією перевернутого маятника з маховиком була розв'язана у вигляді зворотного зв'язку. Для цієї мети математична модель руху системи була перетворена в нормальну форму, що дозволило використати метод динамічного програмування Беллмана. В даному дослідженні використано комплексний інтегральний критерій оптимізації, який на компромісній основі відображав небажані показники руху системи, які виражені через фазові координати та керування.

Врахування обмежень на керування, які накладаються з боку електроприводу маховика, було здійснено шляхом введення «насичення» в закон оптимального керування. Це дозволило спростити задачу.

Знайдену необхідну умову мінімуму критерію – функціональне рівняння Беллмана – представлено нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних. Було обрано квадратичну форму його розв'язку, що дозволило вихідну задачу звести до задачі знаходження коренів системи трьох алгебраїчних рівнянь. З кількох знайдених коренів було обрані ті, які забезпечували стійкість руху системи.

Короткий аналіз отриманих результатів виявив значний вплив на динаміку керування системою вагових коефіцієнтів оптимізаційного критерію. Було наведено випадки невдало підібраних вагових коефіцієнтів, а також ті випадки, в яких керування досягає обох меж області допустимих керувань. Очевидно, що більш глибоке дослідження дозволить розробити метод задання вагових коефіцієнтів, який би дав можливість задовольнити суперечливі вимоги до керованого режиму (наприклад, по незначній тривалості руху і перерегулюванню, а також кутовій швидкості маховика, тощо).

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто математичну модель перевернутого маятника з маховиком. Обґрунтовано комплексний критерій оптимізації і обмеження на керування рухом системи. Для розв'язання задачі використано метод динамічного програмування, який дозволив звести задачу до знаходження коренів системи алгебраїчних рівнянь. Із множини знайдених коренів були вибрані ті, які забезпечують стійкість руху системи. Таким чином, знайдено оптимальне керування стабілізацією маятника з маховиком у вигляді зворотного зв'язку. Вимірюваною координатою є кут відхилення маятника від вертикалі (інші фазові координати можуть бути обчислені на основі вимірюваної координати). Короткий порівняльний аналіз отриманих результатів показав значний вплив на динаміку керування вагових коефіцієнтів критерію оптимізації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: перевернутий маятник, керування у вигляді зворотного зв'язку, динамічне програмування, оптимальне керування.

1. *Aoustin Y., Formal'sky A., Martynenko Y.* Stabilization of Unstable Equilibrium Postures of a Two-Link Pendulum Using a Flywheel // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2004. – P. 1 – 19.
2. *Bronshstein I.N., Semendyayev K.A., Musiol G., Mühlhig H.* Handbook of Mathematics (6th ed.). – Haan-Gruiten: Springer, 2015. – 1207 p.
3. *Chatraei A., Zada V.* Global Optimal Feedback-Linearizing Control of Robot Manipulators // Asian J. of Control. – 2013. – **15**, N 4 – P. 1178 – 1187.
4. *Enev S.* Feedback Linearization Control of the Inertia Wheel Pendulum // Cybernetics and Information Technologies. – 2014. – **14**, N 3. – P. 96 – 109.
5. *Khoroshun A.S.* Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum by Spinning an Inertial Flywheel // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5 – P. 547 – 556.
6. *Khoroshun A.S.* Stabilization of Translation by an Eccentric Flywheel // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 600 – 610.
7. *Lin J., Chen S.Y., Gau W.H.* Design and implementation of a novel inertia flywheel pendulum mechatronic kit // J. Vibration and Control. – 2014. – P. 1 – 14.
8. *Loveikin V.S., Romasevich Yu.A., Khoroshun S.A.* Optimal Stabilization Control of an Inverted Pendulum with a Flywheel. Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 462 – 470.
9. *Nise N.* Control Systems Engineering. – New York: Wiley, 2015 – 944 p.
10. *Olivares M., Albertos P.* Linear control of the flywheel inverted pendulum // ISA Transactions. – 2013. – P. 1 – 8.
11. *Romasevych Y., Loveikin V., Makarets V.* Optimal constrained tuning of PI-controllers via a new PSO-based technique // Int. J. of Swarm Intelligence Research. – 2020. – **11**, № 4. – P. 87 – 105.
12. *Romasevych Y., Loveikin V., Stekhno O.* Closed-loop optimal control of a system Trolley – Payload // UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering. – 2019. – **81**, № 2. – P. 3 – 12.
13. *Romasevych Y., Loveikin V., Usenko S.* PI-controller tuning optimization via PSO-based technique // Przegląd Elektrotechniczny. – 2019. – **95**, 7. – P. 33 – 37.
14. *Santibanez V., Kelly R., Sandoval J.* Control of the Inertia Wheel Pendulum by Bounded Torques // Proc. of the 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. – 2005. – P. 8266 – 8270.
15. *Sniedovich M.*, Dynamic Programming: Foundations and Principles (2nd ed.). – Melbourne: Taylor and Francis. – 2010. – 624 p.
16. *Taran I., Bondarenko A.* Conceptual approach to select parameters of hydrostatic and mechanical transmissions for wheel tractors designed for agricultural operations // Archives of Transport. – 2017. – **41**, N 1. – P. 89 – 100.
17. *Vasconcelos J.R.C., Gonzalez E.M.A., del Foyo P.M.G.* Design and control of a flywheel inverted pendulum system // Congresso Brasileiro de Automática. – 2019. – **1**, N 1. – P. 1 – 6.

Надійшла 28.02.2020

Затверджена до друку 18.03.2021