

Л. В. Мольченко, І. І. Лоос

ДЕФОРМУВАННЯ ГНУЧКОЇ ОРТОТРОПНОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ З УРАХУВАННЯМ ДЖОУЛЕВОГО ТЕПЛА

Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,
вул. Никольська, 24, 54030, Миколаїв, Україна;
e-mail: ¹l.molchenko@gmail.com, ²Loiri@ukr.net

Abstract. The construction and method of solving the nonlinear equations of thermomagnetic elasticity of the flexible orthotropic shells of revolution are presented with taking into account the orthotropic electrical conductivity and Joule heating. The thermomagnetic elasticity of a flexible orthotropic annular plate of variable stiffness in an axisymmetric formulation with orthotropic conductivity and Joule heat is analyzed.

Key words: annular plate, magnetoelasticity, geometric nonlinearity, orthotropy, Joule heat.

Вступ.

На даний момент в теоретичних та прикладних дослідженнях істотний розвиток отримує напрямок, який пов'язаний з дослідженням нестационарних термомеханічних процесів деформування при дії на електропровідні тіла нестационарних магнітних полів [8 – 13, 16 – 20, 26].

Вплив нестационарного магнітного поля на провідне тіло призводить до появи нестационарного електричного поля та індукційних струмів, які, взаємодіючи з магнітним полем, викликають об'ємні електромагнітні (пондеромоторні) сили і появу джоулевого тепла. Електромагнітні сили та джерела тепла, в свою чергу, утворюють хвилі напружень і деформацій та змінюють термодинамічний стан тіла. Через це змінюється електромагнітне поле та електрофізичні властивості тіла. Таким чином, механічні, температурні та електромагнітні поля є взаємозв'язаними і повинні визначатися зі спільного розв'язання динамічних рівнянь термомеханіки та електродинаміки [1, 3, 4, 6, 7].

В даній роботі розглядаються зв'язані нестационарні задачі ортотропних кільцевих пластин змінної жорсткості при взаємодії магнітних полів, в яких нелінійні ефекти (кінцеві деформації, зміна механічних та електрофізичних властивостей пластини в результаті деформування і виділення джоулевого тепла) є визначальними. До розв'язання таких доволі складних задач в даний час можливо застосувати лише чисельні методи. Якраз з таких позицій і формулюються основні рівняння механіки та електродинаміки електропровідних пружних пластин та оболонок. Аналіз проведено з використанням теорії кінцевих деформацій та лагранжевих змінних, як в рівняннях механіки, так і в електродинамічній групі рівнянь [7, 14, 15, 21 – 25].

Строгий аналіз фізико-механічних процесів при електромагнітній взаємодії включає рівняння руху пружного тіла та рівняння електродинаміки для області тіла (внутрішня задача), а також рівняння електродинаміки для вакууму (зовнішня задача).

1. Двовимірні рівняння магнітопружності гнучких ортотропних оболонок обертання в нестационарному магнітному полі.

Розглянемо гнучкі ортотропні оболонки, які перебувають під дією нестационарних поверхневих і контурних силових та нестационарних електромагнітних навантажень. Припускаємо, що матеріал оболонки деформується згідно з узагальненим законом

Гука. Вважаємо, що геометричні та механічні характеристики оболонки, методи її закріплення такі, що для описання процесу деформування можна застосувати варіант геометрично-нелінійної теорії тонких оболонок в квадратичному наближенні. Серединну поверхню оболонки в недеформованому стані віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат (s, θ) , де s – довжина меридіану; θ – центральний кут в паралельному колі.

Координатні лінії $s = \text{const}$ та $\theta = \text{const}$ є лініями головних кривизн серединної поверхні. Відраховуючи координату γ по нормалі до координатної поверхні обертання, віднесемо оболонку до ортогональної криволінійної просторової системи координат (s, θ, γ) .

Запишемо першу квадратичну форму серединної поверхні оболонки обертання в канонічному вигляді: $dS^2 = ds^2 + r^2 d\theta^2$, звідки видно, що коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні обертання оболонки у випадку канонічних координат будуть $A = 1$, $B = r(s)$.

Геометричні співвідношення Кодаці – Гаусса приймають вигляд $dr/ds = \cos \varphi$, де φ – кут між віссю обертання і нормаллю до поверхні оболонки, також має місце співвідношення $R_\theta \sin \varphi = r$ (R_θ – головний радіус кривизни).

У сучасних технологіях все частіше використовуються конструкційні матеріали [12], які в недеформованому стані є анізотропними. Відмітимо, що запропонована теорія нелінійної магнітопружності оболонок розроблено для пара- і діаманітних матеріалів. До таких матеріалів відносять берилій, бороалюміній, вольфрам, кадмій, цинк та багато інших. Поряд з анізотропією матеріалів вони володіють анізотропією електропровідності і температури. Всі ці матеріали мають монокристалічну структуру. Монокристали – це однорідні анізотропні матеріали, у всьому об'ємі яких атоми розташовано регулярно, так що весь матеріал складається з однакових кристалічних комірок, які періодично повторюються. Кристали в загальному випадку анізотропні по відношенню до електропровідності. Процес переносу електричного струму в анізотропному кристалічному тілі підлягає узагальненому закону Ома.

Використовуючи тензор питомого електричного опору η_{ij} , запишемо компоненти напруженості електричного поля через густину електричного струму у вигляді

$$E_i = \eta_{ij} J_k,$$

де η_{ij} – матриця питомого електричного опору. Введемо матрицю питомої електричної провідності σ_{ij} , обернену матриці η_{ij} . Якщо $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, тоді

$$\eta_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{|\sigma_{ij}|} \Delta_{ij},$$

де Δ_{ij} – детермінант, який отриманий із $|\sigma_{ij}|$ викреслюванням i -ої стрічки та j -го стовпця. Тут матриця σ_{ij} – обернена матриці питомого електричного опору, звідки $\eta_{ij} = \eta_{ji}$. Якщо симетричний тензор η_{ij} , який приведено до головних осей, співпадає з головними осями тензора коефіцієнтів електропровідності, отримуємо

$$\eta_1 = 1/\sigma_1; \eta_2 = 1/\sigma_2; \eta_3 = 1/\sigma_3.$$

Враховуючи останні співвідношення, значення головних компонент тензора питомої електропровідності отримаємо у вигляді

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} (\text{ом} \cdot \text{м})^{-1}.$$

Таким чином, як і будь-які симетричні тензори другого рангу, тензори ε_{ij} , μ_{ij} і σ_{ij} шляхом відповідного вибору осей координат можуть бути зведені до діагонального вигляду. У загальному випадку тензори ε_{ij} , μ_{ij} і σ_{ij} визначаються трьома незалежними величинами – трьома головними значеннями. У залежності від тієї чи іншої симетрії кристалу число різних головних значень тензорів, що розглядаються, може бути менше трьох.

Відзначимо також, що діелектричні та магнітні властивості пружного тіла змінюються не тільки при зміні його густини, але і при деформаціях, які не змінюють густину (зсувах). Деформація порушує, в загальному випадку, ізоτροпію тіла, в результаті стають також анізотропними і його діелектричні та магнітні властивості, а скалярні діелектрична і магнітна проникності ε і μ замінюються діелектричними та магнітними тензорами ε_{ij} і μ_{ij} .

Таким чином, матеріальні співвідношення електродинаміки, узагальнений закон Ома та вирази сил Лоренца запишемо, відповідно, у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_{ij} \vec{H}; \quad \vec{D} = \varepsilon_{ij} \vec{E}; \quad \vec{J} = \sigma_{ij} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}); \\ \rho \vec{F}^\wedge &= \sigma_{ij} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{J}_{cm} \times \vec{B}.\end{aligned}\quad (1)$$

Тут \vec{J} – густина електричного струму; \vec{J}_{cm} – густина стороннього електричного струму; \vec{E} – напруженість електричного поля; \vec{H} – напруженість магнітного поля; \vec{B} – магнітна індукція; \vec{D} – електрична індукція; $\rho \vec{F}^\wedge$ – сила Лоренца; \vec{V} – швидкість деформування.

При побудові двовимірному варіанту рівнянь магнітопружності пружних ортотропних оболонок обертання скористаємось принципом віртуальних переміщень із застосуванням гіпотез Кірхгофа – Лява та електромагнітних гіпотез [1, 3, 4, 6].

$$\begin{aligned}E_1 &= E_1(s, \theta, t); \quad E_2 = E_2(s, \theta, t); \\ J_1 &= J_1(s, \theta, t); \quad J_2 = J_2(s, \theta, t); \quad J_3 = 0; \\ H_1 &= \frac{1}{2}(H_1^+ + H_1^-) + \frac{\gamma}{h}(H_1^+ - H_1^-); \\ H_2 &= \frac{1}{2}(H_2^+ + H_2^-) + \frac{\gamma}{h}(H_2^+ - H_2^-); \quad H_3 = H_3(s, \theta, t).\end{aligned}$$

Тут E_1, E_2 – компоненти напруженості електричного поля; J_1, J_2, J_3 – компоненти густини електричного струму; H_1, H_2, H_3 – компоненти напруженості магнітного поля; H_1^\pm, H_2^\pm – відомі компоненти напруженості магнітного поля на поверхнях оболонки; $h = h(s, \theta)$ – товщина оболонки.

Відзначимо, що при отриманні двовимірних співвідношень нехтуватимемо змінною густини. Це спрощення не суперечить тому, що допускаючи кінцеві деформації, вони в металевих оболонках можуть реалізуватись тільки при пластичній течії.

Із загальних рівнянь магнітопружності гнучких ортотропних оболонок обертання [3, 5, 7, 15, 24] і складових сили Лоренца (1) отримуємо вихідні співвідношення гнучких ортотропних оболонок обертання, які знаходяться в магнітному полі: рівняння магнітопружності:

$$\frac{\partial}{\partial s}(rN_s) - \cos \varphi N_\theta + \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{r}{R_s} Q_s + r(P_s + \rho F_s^\wedge) = r \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 S) + \frac{\partial}{\partial s} (\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_s} H + \sin \varphi Q_\theta + r (P_\theta + \rho F_\theta^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial}{\partial s} (r Q_s) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{r}{R_s} N_s - \sin \varphi N_\theta + r (P_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial s} (r M_s) - \cos \varphi M_\theta - r Q_s - r \left(N_s - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta \right) \mathcal{G}_s - r S \mathcal{G}_\theta &= 0; \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r^2 H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - r Q_\theta - r \left(N_\theta - \frac{1}{R_s} M_s \right) \mathcal{G}_\theta - r S \mathcal{G}_s &= 0; \\
-\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_s}{\partial \theta} \right); \\
\sigma_1 \left[E_s - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma - 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \theta} + \frac{H_\theta^+ - H_\theta^-}{h}; \\
\sigma_2 \left[E_\theta - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] &= -\frac{\partial H_\gamma}{\partial s} + \frac{H_s^+ - H_s^-}{h};
\end{aligned} \tag{2}$$

представлення деформацій через переміщення:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ss} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w + \frac{1}{2} \mathcal{G}_\theta^2; \\
\varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{r} \right) + \mathcal{G}_s \mathcal{G}_\theta; \quad \chi_{ss} = \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s}; \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \\
\chi_{s\theta} &= \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_\theta + \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right) + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial s},
\end{aligned} \tag{3}$$

де

$$\mathcal{G}_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s}; \quad \mathcal{G}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} v - \text{кути повороту нормалі};$$

співвідношення пружності:

$$\begin{aligned}
N_s &= \frac{e_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta} [\varepsilon_{ss} + \nu_\theta \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu_s) \varepsilon_T]; \quad N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - e_s e_\theta} [\varepsilon_{\theta\theta} + \nu_s \varepsilon_{ss} - (1 + \nu_\theta) \varepsilon_T]; \\
S &= \frac{e_s h}{2(1 + \nu_\theta)} \varepsilon_{s\theta}; \quad H = \frac{e_\theta h^3}{12(1 + \nu_s)} \chi_{s\theta}; \\
M_s &= \frac{e_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} [\chi_{ss} + \nu_\theta \chi_{\theta\theta} - (1 + \nu_s) \chi_T]; \\
M_\theta &= \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} [\chi_{\theta\theta} + \nu_s \chi_{ss} - (1 + \nu_\theta) \chi_T]; \\
\nu_s &= \nu_{\theta s}; \quad \nu_\theta = \nu_{s\theta}; \quad e_s \nu_\theta = e_\theta \nu_s.
\end{aligned} \tag{4}$$

Також

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) d\gamma; \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) \gamma d\gamma,$$

де: ε_T, χ_T – інтегральні характеристики температурного поля; R_s – головний радіус кривизни; α – коефіцієнт лінійного температурного розширення; $T(s, \theta, \gamma, t)$ – джоулева температура оболонки.

Складові сили Лоренца $\rho \vec{F}^\wedge$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\rho F_s^\wedge &= h J_{\theta cm} B_\gamma + \sigma_1 h E_\theta B_\gamma + \sigma_1 h \left\{ 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25 (B_s^+ + B_s^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] \right\}; \\
\rho F_\theta^\wedge &= -h J_{s cm} B_\gamma - \frac{h}{r \mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} B_\gamma + \\
&\quad + \sigma_2 h \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[0,25 (B_s^+ + B_s^-) (B_\theta^+ + B_\theta^-) + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-) (B_\theta^+ - B_\theta^-) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial v}{\partial t} \left[0,25 (B_\theta^+ + B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 \right] \right\} - \frac{B_\theta^+ - B_\theta^-}{\mu} B_\gamma; \quad (5) \\
\rho F_\gamma^\wedge &= 0,5 h \left[J_{s cm} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - J_{\theta cm} (B_s^+ + B_s^-) \right] + \frac{h}{2r \mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial \theta} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \\
&\quad - 0,5 \sigma_2 h E_\theta (B_s^+ + B_s^-) + \sigma_2 h \left\{ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma - \frac{\partial w}{\partial t} \left[0,25 (B_s^+ + B_s^-)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{12} (B_\theta^+ - B_\theta^-)^2 + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-)^2 \right] \right\} + \frac{B_\theta^{+2} - B_\theta^{-2}}{\mu}.
\end{aligned}$$

До отриманих рівнянь необхідно приєднати початкові та граничні умови.

Тут: N_s, N_θ – нормальні тангенціальні зусилля; S – зсувне зусилля; M_s, M_θ – згинальні зусилля; H – крутильний момент; Q_s, Q_θ – поперечні зусилля; u, v, w – компоненти вектора переміщень; $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{s\theta}, \chi_{ss}, \chi_{\theta\theta}, \chi_{s\theta}$ – компоненти тензора деформацій; P_s, P_θ, P_γ – складові механічної сили; e_s, e_θ – модулі Юнга; ν_s, ν_θ – коефіцієнти Пуассона; σ_1, σ_2 – ортотропні компоненти тензора електропровідності; μ – коефіцієнт магнітної проникності.

2. Термодинамічні співвідношення для визначення температури провідних оболонок.

Розглянемо рівняння термодинаміки гнучких провідних оболонок з урахуванням джоулевої температури при дії магнітного поля в мікросекундному діапазоні (перехідний процес) [3, 7, 15, 22 – 25].

Густина магнітної енергії на одиницю об'єму запишемо у вигляді функції

$$W = 0,5(\vec{B}\vec{H}),$$

а кількість тепла, яке виділяється струмом \vec{J} в одиницю часу (потужність джоулевого тепла на одиницю маси) визначається формулою

$$\dot{Q}_{дж} = \frac{\vec{J}\vec{E}}{\rho}.$$

Запишемо магнітний тиск P у вигляді суми двох складових

$$P(\rho, T) = P_\chi(\rho) + P_T(\rho, T),$$

де $P_\chi(\rho)$ – складова тиску, яка залежить тільки від густини ρ , $P_T(\rho, T)$ – теплова складова, яка залежить від температури та густини. Також представимо приріст внутрішньої енергії у вигляді суми «холодної» і теплової складових

$$\rho dU = \rho dU_\chi + \rho dU_T,$$

де

$$\rho dU_\chi = \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik} + 3P_\chi de;$$

$$\rho dU_T = 3P_T de + \rho dQ_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad } T) dt. \quad (6)$$

Тут λ_T – коефіцієнт теплопровідності.

Вважатимемо далі, що приріст теплової енергії пропорційний приросту температури, тобто

$$dU_T = C_\varepsilon(T) dT; \quad U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT,$$

де C_ε – питома теплоємність при сталій деформації. Тоді рівняння (6) можемо використати для обчислення температури

$$\rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \dot{Q}_{дж} + \text{div}(\lambda_T \text{grad } T). \quad (7)$$

Враховуючи, що питома теплоємність металів для температур вища T_0 аж до точки плавлення змінюється неістотно (не більше ніж на 5 – 10 % від середнього значення), теплову енергію можна представити у вигляді

$$U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT \approx C_\varepsilon^{cp} (T - T_0) + U_{T0}; \quad U_{T0} = \int_0^{T_0} C_\varepsilon(T) dT,$$

де C_ε^{cp} – середнє значення теплоємності на інтервалі $[T_0, T]$.

Слідуючи [7], рівняння (7) перетворюється у відоме рівняння теплопровідності з джерелом джоулевого тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_\varepsilon^{cp}} \dot{Q}_{дж} + \alpha_T \nabla^2 T; \quad \alpha_T = \frac{\lambda_T}{\rho C_\varepsilon^{cp}}; \quad \lambda_T = \text{const}, \quad (8)$$

де α_T – коефіцієнт теплової дифузії.

Використовуючи вираз для обчислення джоулевого тепла, оцінимо величину температури, яка виникає в результаті джоулевого нагріву в залежності від величини магнітної індукції \vec{B} . Скориставшись (6) та рівнянням Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \sigma_{ij} \vec{E}$, з теорії розмірності та на основі (8) маємо

$$\tilde{T} \approx T_0 + \frac{2}{\rho C_\varepsilon^{cp}} \tilde{W} + \frac{\alpha_T}{\alpha_D} \tilde{T}; \quad \tilde{W} = 0,5 \frac{\tilde{B}^2}{\mu}, \quad (9)$$

де $\alpha_D = 1/\sigma_{ij} \mu$ – коефіцієнт магнітної дифузії. За характерний час взято час дифузії магнітного поля на віддаль \tilde{L} , тобто $\tilde{t} = \tilde{L}/\alpha_D$. Так як $\alpha_T/\alpha_D \ll 1$ для металів (на-

приклад, для алюмінію при $T_0 = 20^\circ\text{C} - \alpha_T / \alpha_D \approx 4,3 \cdot 10^{-6}$, для нержавіючої сталі $-\alpha_T / \alpha_D \approx 0,8 \cdot 10^{-5}$), тоді із символічного рівняння (9) випливає, що процесом теплопровідності у перехідному режимі можна знехтувати.

Таким чином, враховуючи оцінку членів рівняння (8), остаточно отримуємо рівняння для визначення величини температури, яка виникає в результаті джоулевого нагріву у вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T_0 + \frac{1}{\sigma_{ij} \rho C_\varepsilon^{cp}} Q_{дж}. \quad (10)$$

Як відомо, при дії на оболонку магнітного поля в ній виникають об'ємні сили Лоренца $\rho \vec{F}^\Lambda = \vec{J} \times \vec{B}$.

Виходячи з рівнянь для магнітної енергії оболонки та використовуючи тотожність

$$\vec{A} \times \text{rot } \vec{A} + \vec{A} \nabla \vec{A} = 0,5 \nabla (\vec{A} \vec{A}),$$

вираз для пондеромоторних сил запишемо у вигляді

$$\rho \vec{F}^\Lambda = \vec{J} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{H} \times \vec{B} = \vec{B} \nabla \vec{H} - \frac{\partial W}{\partial \xi^k} \vec{G}^k,$$

де $(\partial W) / (\partial \xi^k) \vec{G}^k$ – член сили Лоренца, що відповідає джоулеву нагріву оболонки; \vec{G}^k – базовий вектор; ∇ – оператор в лагранжевій метриці; ξ^k – лагранжеві змінні ($k = 1, 2, 3$). Таким чином, вплив джоулевого тепла враховується як в рівняннях магнітопружності, так і у виразі для сили Лоренца.

Виходячи з рівняння (10) маємо

$$\frac{h}{2} Q_{дж} dt = \frac{h}{2} \rho C_\varepsilon^{cp} dT_\Pi + \lambda_F (T_\Pi - T_C) dt, \quad (11)$$

де T_Π – температура на поверхнях оболонки; T_C – температура серединної поверхні оболонки; λ_F – коефіцієнт тепловіддачі.

Виходячи з симетрії задачі для оболонок обертання, на серединній поверхні тепловий потік $q = 0$ при $\gamma = 0$, а на поверхні $-q = Q_{дж} h / 2$ і $T = T_\Pi$.

З урахуванням (11), вираз для визначення температури приймає вигляд

$$T = T_C + \frac{Q_{дж} h^2}{8 \lambda_T} \left[1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} - 4 \left(\frac{\gamma}{h} \right)^2 \right] - \frac{\rho h C_\varepsilon^{cp}}{2 \lambda_F} \dot{T}_\Pi. \quad (12)$$

Компоненти електричного струму з урахуванням стороннього струму мають вигляд

$$J_s = J_{s\text{ cm}} + \sigma_1 \left[E_s + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma \right];$$

$$J_\theta = J_{\theta\text{ cm}} + \sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right];$$

$$J_\gamma = 0.$$

3. Розв'язувальна система рівнянь осесиметричних ортотропних оболонок обертання з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла в геометрично-нелінійній постановці.

Вважаючи, що всі компоненти збуреного електромагнітного поля та поля переміщень не залежать від координати θ , покладемо [4, 6]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; \nu = 0; S = 0; H = 0; E_s = 0; B_\theta = 0; P_\theta = 0; \rho F_\theta^\wedge = 0.$$

При побудові розв'язувальної системи рівнянь термомагнітопружності ортотропної оболонки обертання вибираємо за шукані функції наступні:

$$u, w, \mathcal{G}_s, N_s, Q_s, M_s, B_\gamma, E_\theta.$$

У цьому випадку, розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь термомагнітопружності гнучкої ортотропної оболонки обертання з урахуванням джоулевої температури приймає вигляд [4, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} u - \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} \right) w - \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2 + (1 + \nu_s) \varepsilon_T; \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\mathcal{G}_s + \frac{u}{R_s}; \quad \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) N_s + e_\theta h \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - \frac{1}{R_s} Q_s - P_s - h J_{\theta cm} B_\gamma - \\ &\quad - \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] - \frac{e_s h \cos \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} \right) N_s + e_\theta h \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - P_\gamma - \\ &\quad - 0,5 h J_{\theta cm} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h \left[-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{12} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) \right] - \frac{e_s h \sin \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] + Q_s + N_s \mathcal{G}_s - \\ &\quad - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\nu_\theta M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] \mathcal{G}_s; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} = -\mu\sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h};$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta.$$

Тут

$$\begin{aligned} \varepsilon_T = & \\ = & \alpha T_C + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma_2^2 \left[E_\theta^2 + 0,25 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_s^+ + B_s^-)^2 + E_\theta \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] \right\} + \\ & + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ 2\sigma_2 J_{\theta cm} \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \dot{T}_{II}; \\ \chi_T = & 0. \end{aligned}$$

Розв'язувальна система рівнянь (13) є нелінійною мішаною гіперболо-параболічною системою диференціальних рівнянь восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Для визначення довільностей, які виникають у загальному розв'язку системи рівнянь (13) після інтегрування, необхідно приєднати граничні умови на контурах оболонки. Крайові умови для функцій, які характеризують механічну частину задачі, задаються так само, як і в теорії оболонок. Крайові умови для електромагнітних параметрів задаються через компоненти електричного поля або через комбінацію компонент електричного і магнітного полів. Початкові умови задаються у класичному вигляді.

4. Методика розв'язання задач термомагнітопружності гнучких ортотропних оболонок обертання з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевої температури в осесиметричній постановці.

Розв'язання крайових задач магнітопружності ортотропних оболонок обертання з урахуванням джоулевого тепла в нелінійній постановці пов'язано зі значними обчислювальними складностями. Це пояснюється тим, що система (13), яка описує напружено-деформівний стан (НДС) оболонки, є зв'язаною, тобто включає рівняння руху та рівняння електродинаміки. Крім того, вона є нелінійною мішаною гіперболо-параболічною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Об'ємні сили Лоренца – нелінійні та змінюються зі зміною матеріальної і часової координат.

Запропонований підхід чисельного розв'язання нелінійних задач магнітопружності теорії гнучких оболонок обертання побудовано на послідовному застосуванні скінченно-різницевої схеми Ньюмарка [27], методів квазілінеаризації [2] та дискретної ортогоналізації [5].

Запишемо розв'язувальну систему рівнянь (13) у векторній формі:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F} \left(s, t, \vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right) \quad (14)$$

з граничними умовами

$$g_1 \vec{N}(s_0, t) = \vec{b}_1; \quad g_2 \vec{N}(s_N, t) = \vec{b}_2$$

та початковими умовами

$$\vec{N} = 0; \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Тут: $\vec{N} = \{u, w, \vartheta_s, N_s, Q_s, M_s, E_\theta, B_\gamma\}^T$; \vec{F} – в загальному випадку нелінійна вектор-функція; g_1, g_2 – прямокутні матриці; \vec{b}_1, \vec{b}_2 – відомі вектори.

Для розділення змінних за часом застосовується скінченно-різницева схема Ньюмарка

$$\ddot{u}^{t+\Delta t} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{0,25(\Delta t)^2} - \frac{1}{0,25} \left(\frac{\dot{u}^t}{\Delta t} + 0,25\ddot{u}^t \right); \quad \dot{u}^{t+\Delta t} = \dot{u}^t + 0,5\Delta t(\ddot{u}^t + \ddot{u}^{t+\Delta t}). \quad (15)$$

Застосування цієї схеми дозволить весь інтервал за часом представити через скінченні інтервали і відслідкувати НДС на кожному часовому проміжку.

Після застосування схеми Ньюмарка (15) розв'язувальна система магнітопружності (14) для відповідного часового проміжку в векторній формі приймає вигляд

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{F}_1(s, \vec{N}), \quad (16)$$

де \vec{F}_1 – восьмивимірний вектор.

Граничні умови на контурі $s = \text{const}$ мають вигляд:

$$D_1 \vec{N} /_{s=s_0} = \vec{d}_1; \quad D_2 \vec{N} /_{s=s_N} = \vec{d}_2, \quad (17)$$

де D_1, D_2 – відомі прямокутні матриці відповідно порядків $k \times 8$ та $(8-k) \times 8$, ($k < 8$);

\vec{d}_1, \vec{d}_2 – задані вектори; k – кількість граничних умов на контурі $s = s_0$.

Розв'язок нелінійних крайових задач методом квазілінеаризації являється аналогом методу Ньютона для розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь у функціональному просторі вектор-функцій шуканих розв'язків поставленої задачі. Проводиться лінеаризація системи диференціальних рівнянь і граничних умов, а також будується ітераційний процес розв'язання нелінійної крайової задачі, для якого задається початкове наближення і на кожному кроці розв'язується лінійна крайова задача.

Таким чином, нелінійна крайова задача (16), (17) зводиться до послідовності лінійних крайових задач

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{N}^{k+1}}{ds} &= \vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k); \\ B_1(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(s_0) &= \vec{b}_1(\vec{N}^k); \quad B_2(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(s_N) = \vec{b}_2(\vec{N}^k) \\ &(k = 0, 1, 2 \dots), \end{aligned} \quad (18)$$

\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k – розв'язок відповідно на $(k+1)$ -й та k -й ітераціях; $\vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k)$ – вектор правої частини системи рівнянь; $B_1(\vec{N}^k), B_2(\vec{N}^k), \vec{b}_1(\vec{N}^k), \vec{b}_2(\vec{N}^k)$ – відповідно матриці та праві граничні умови.

Після застосування викладених вище методів лінійна крайова задача (18) розв'язується методом дискретної ортогоналізації [5].

Відзначимо, що на кожному кроці ітераційного процесу коефіцієнти правої частини лінійної системи рівнянь (18), елементи матриць B_1, B_2 та компоненти векторів \vec{b}_1, \vec{b}_2 граничних умов залежать від кількості кроків за матеріальною і часовою змінними, а також від розв'язків лінійної задачі на попередньому кроці, тобто послідовність крайових задач – зв'язана послідовність лінійних задач. На першому кроці за часом за початкове наближення в ітераційному процесі вибираємо розв'язок лінійної задачі. На наступних кроках – розв'язок, який отримано на попередньому кроці, вже є розв'язком нелінійної задачі. Вибір такої схеми істотно зменшує кількість ітерацій, які необхідні при розв'язанні задачі.

При заміні похідних за часом скінченно-різницевими виразами у відповідності до схеми Ньюмарка, необхідно враховувати взаємозв'язок між кроком за часом і кроком

інтегрування за змінною s . Для отримання збіжного алгоритму та виконання критерію Куранта, перетворимо систему рівнянь до «масових» координат Лагранжа, тобто введемо заміну $m = \rho s$. Ця процедура дозволяє істотно збільшити крок за часом.

При розв'язанні крайових задач для провідних оболонок необхідно також враховувати обмеження, які накладаються на густину струму і зовнішнє магнітне поле. Ці обмеження пов'язані з джоулевим теплом і величиною критичної сили стороннього електричного струму.

5. Розв'язувальна нелінійна система магнітопружності ортотропної кільцевої пластини з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла в осесиметричній постановці.

Розглянемо осесиметричну нелінійну крайову задачу магнітопружності про НДС кільцевої пластини змінної товщини вздовж радіуса, яка перебуває під дією нестационарного магнітного поля та механічного навантаження з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла. Пластина пружна ортотропна, виготовлена із матеріалу скінченної провідності. Пластина є провідником рівномірно розподіленого електричного струму густини \vec{J}_{cm} .

Нехай задачу магнітостатики для збуреного стану розв'язано, тобто, відомі вектори магнітної індукції початкового стану для зовнішньої та внутрішньої областей. За координатну площину вибираємо серединну поверхню пластини, яку віднесено до полярної системи координат r, θ , координата z відраховується по нормалі до серединної площини пластини (рис. 1).

Для отримання розв'язувальної системи рівнянь ортотропної кільцевої пластини скористаємося системою (13), замінюючи $s = r, \theta = \theta, \gamma = z$. При цьому враховано, що для пластини $\varphi = 0; 1/R_s = 0$.

Розв'язувальна система рівнянь в цьому випадку приймає вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{(1 - \nu_r \nu_\theta)}{e_r h} N_r - \frac{\nu_\theta}{r} u - 0,5 \mathcal{G}_r^2 + (1 + \nu_r) \varepsilon_T; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\mathcal{G}_r; \\ \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} &= \frac{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}{e_r h^3} M_r - \frac{\nu_\theta}{r} \mathcal{G}_r + (1 + \nu_r) \chi_T; \\ \frac{\partial N_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left[(\nu_\theta - 1) N_r + \frac{e_\theta h}{r} u \right] - \frac{e_r h}{r} \varepsilon_T - P_r - h J_{\theta cm} B_z - \\ &\quad - \sigma_1 h \left[E_\theta B_z + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_z (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} &= -\frac{1}{r} Q_r - P_z - 0,5 h J_{\theta cm} (B_r^+ + B_r^-) + \sigma_2 h \left[0,5 E_\theta (B_r^+ + B_r^-) + \right. \\ &\quad \left. + 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ - B_r^-)^2 - 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_z (B_r^+ + B_r^-) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left[(\nu_\theta - 1) M_r + \frac{e_\theta h^3}{12r} \mathcal{G}_r \right] + Q_r + N_r \mathcal{G}_r; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0,5(B_r^+ + B_r^-) \frac{\partial w}{\partial t} - B_z \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \frac{B_r^+ - B_r^-}{h};$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{r} E_\theta.$$

Тут

$$\begin{aligned} \varepsilon_T = & \alpha T_C + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \times \\ & \times \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma_2^2 \left[E_\theta^2 + 0,25 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_r^+ + B_r^-)^2 + E_\theta \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) \right] \right\} + \\ & + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ 2\sigma_2 J_{\theta cm} \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \frac{\partial T_\Pi}{\partial t}. \end{aligned}$$

У відповідності з методикою розв'язання магнітопружної задачі після застосування схеми Ньюмарка, переходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь магнітопружності на кожному часовому кроці. Після застосування методу квазілінеаризації, будеться ітераційний процес розв'язання нелінійної крайової задачі, для якого задається початкове наближення і на кожному часовому кроці розв'язується лінійна крайова задача.

Розв'язувальна система диференціальних рівнянь ортотропної термопружної кильцевої пластини в цьому випадку має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{du^{(k+1)}}{dr} &= \frac{1 - \nu_r \nu_\theta}{e_r h} N_r^{(k+1)} + 0,5(g_r^{(k)})^2 - g_r^{(k+1)} g_r^{(k)} - \frac{\nu_\theta}{r} u^{(k+1)} + (1 + \nu_r) \varepsilon_T^{(k+1)}; \\ \frac{dw^{(k+1)}}{dr} &= -g_r^{(k+1)}; \\ \frac{dg_r^{(k+1)}}{dr} &= \frac{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}{e_r h^3} M_r^{(k+1)} - \frac{\nu_\theta}{r} g_r^{(k+1)}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_r}{dr} &= \frac{1}{r} \left[(\nu_\theta - 1) N_r^{(k+1)} - e_\theta h \varepsilon_T^{(k+1)} + \frac{e_\theta h}{r} u^{(k+1)} \right] - P_r^{(k+1)} - h J_{\theta cm} B_z^{(k+1)} - \\ & - \sigma_1 h \left[-E_\theta^{(k)} B_z^{(k)} + E_\theta^{(k+1)} B_z^{(k)} + E_\theta^{(k)} B_z^{(k+1)} + \right. \\ & \left. + 0,5 \left(-\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k)} + \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} B_z^{(k)} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k+1)} \right) (B_r^+ + B_r^-) - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} (B_z^{(k)})^2 + \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t} (B_z^{(k)})^2 + 2 \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k+1)} B_z^{(k)} \right] + \rho h \frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_r^{(k+1)}}{dr} &= -\frac{1}{r} Q_r^{(k+1)} - P_z^{(k+1)} - 0,5hJ_{\theta cm} (B_r^+ + B_r^-) + \sigma_2 h \left[0,5E_\theta^{(k+1)} (B_r^+ + B_r^-) + \right. \\
&\quad \left. + 0,25 \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} (B_r^+ - B_r^-)^2 - \right. \\
&\quad \left. - 0,5 \left(-\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k)} + \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t} B_z^{(k)} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k+1)} \right) (B_r^+ + B_r^-) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w^{(k+1)}}{\partial t^2}; \\
\frac{dM_r^{(k+1)}}{dr} &= \frac{1}{r} \left[(v_\theta - 1) M_r^{(k+1)} + \frac{e_\theta h^3}{12r} g_r^{(k+1)} \right] + N_r^{(k+1)} g_r^{(k)} + N_r^{(k)} g_r^{(k+1)} - N_r^{(k)} g_r^{(k)} + Q_r^{(k+1)}; \\
\frac{dB_z^{(k+1)}}{dr} &= \\
&= -\sigma_2 \mu \left[E_\theta^{(k+1)} + 0,5(B_r^+ + B_r^-) \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} - B_z^{(k)} \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t} - B_z^{(k+1)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + B_z^{(k)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} \right] + \\
&\quad + \frac{B_r^+ - B_r^-}{h}; \\
\frac{dE_\theta^{(k+1)}}{dr} &= -\frac{\partial B_z^{(k+1)}}{\partial t} - \frac{1}{r} E_\theta^{(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2 \dots),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\varepsilon_T^{(k+1)} &= \alpha T_C + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma_2^2 \left[-\left(E_\theta^{(k)} \right)^2 + 2E_\theta^{(k+1)} E_\theta^{(k)} - \left(0,25 \left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right)^2 + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 0,5 \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right) (B_r^+ + B_r^-)^2 + \left(E_\theta^{(k+1)} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} + E_\theta^{(k)} \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} - E_\theta^{(k)} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right) (B_r^+ + B_r^-) \right\} + \\
&\quad + \frac{\alpha h^2}{8\sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4\lambda_T}{h\lambda_F} \right) \left\{ 2\sigma_2 J_{\theta cm} \left[E_\theta^{(k+1)} + 0,5 \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t} B_z^{(k)} - \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} B_z^{(k+1)} \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_\varepsilon^{cp}}{2\lambda_F} \frac{\partial T_\Pi^{(k+1)}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Похідні за часом на $(k+1)$ -му наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u^{t+\Delta t}}{\partial t} \right)^{(k+1)} &= \left[\frac{2(u^{t+\Delta t})}{\Delta t} - \frac{\partial u^t}{\partial t} \right]^{(k+1)}; \quad \left(\frac{\partial T_\Pi^{t+\Delta t}}{\partial t} \right)^{(k+1)} = \left[\frac{2(T_\Pi^{t+\Delta t})}{\Delta t} - \frac{\partial T_\Pi^t}{\partial t} \right]^{(k+1)}; \\
\left(\frac{\partial^2 u^{t+\Delta t}}{\partial t^2} \right)^{(k+1)} &= \left(\frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{0,25(\Delta t)^2} - \frac{1}{0,25\Delta t} \frac{\partial u^t}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^t}{\partial t^2} \right)^{(k+1)}.
\end{aligned}$$

Для отримання похідних за часом на k -му наближенні, необхідно замінити індекс $(k+1)$ на індекс (k) .

7. Числовий приклад.

Розглянемо осесиметричну геометрично-нелінійну крайову задачу термомагнітопружності про визначення НДС гнучкої ортотропної кільцевої пластини змінної товщини $h = 3 \cdot 10^{-4} (1 - \gamma r^2 / r_0)$ м з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла (рис. 1).

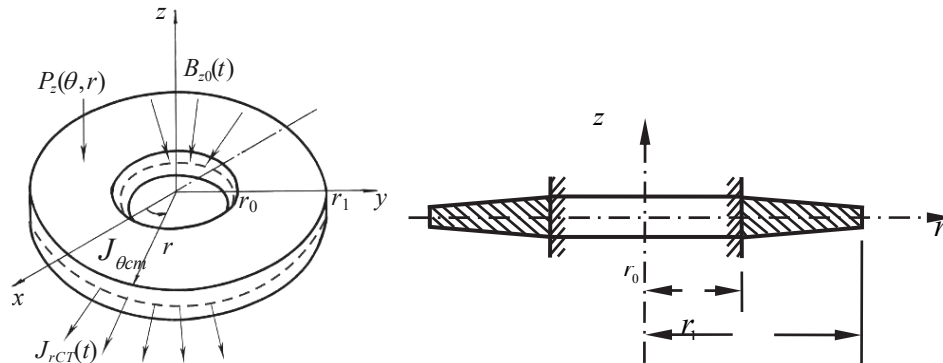


Рис. 1

Пластина пружна ортотропна, що виготовлена із металевого композитного матеріалу берилію. Берилій – діаманетик, кристалографічна структура гексагональна. Через значну жорсткість, малу масу і стабільність розмірів у широкому температурному діапазоні, берилієвий метал використовується для легких конструкційних компонентів в оборонній та аерокосмічній промисловості, на високошвидкісних літаках, керованих ракетах, космічних апаратах і супутниках. В деяких ракетах з рідким паливом використовували ракетні сопла з чистого берилію.

Вважатимемо, що на поверхнях ортотропної пластини відбувається теплообмін за законом Ньютона – Ріхмана з зовнішнім середовищем, яке має температуру 0°C (з коефіцієнтом теплообміну λ_F). Пластина також є провідником стороннього електричного струму \vec{J}_{cm} .

Вважаємо, що стаціонарна задача термомагнітопружності для збуреного стану розв’язана, тобто, відомі вектори магнітної індукції початкового стану для зовнішньої та внутрішньої областей.

Розглянуто випадок, коли пластина знаходиться під дією нормальної складової механічної сили $P_z = 5 \cdot 10^3 \sin \omega t$ Н/м² та зовнішнього електричного струму $J_{\theta cm} =$

$$= 5 \cdot 10^6 \sin \omega t \text{ А/м}^2, \text{ де } \omega - \text{ кругова частота.}$$

Граничні умови вибрані в наступному вигляді:

$$u = 0; w = 0; \vartheta_r = 0; B_z = 0,5 \sin \omega t; r_0 = 0,5 \text{ м};$$

$$N_r = 0; Q_r = -100; M_r = 0; E_\theta = 0; r_1 = 0,9 \text{ м}.$$

Параметри оболонки та матеріалу такі:

$$r_0 = 0,5 \text{ м}; r_1 = 0,9 \text{ м}; \sigma_1 = 27,9 \cdot 10^6 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}; \sigma_2 = 32,1 \cdot 10^6 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}; \nu_r = 0,03;$$

$$\nu_\theta = 0,09; e_r = 28,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_\theta = 33,53 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \rho = 2300 \text{ кг/м}^3;$$

$$\omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; B_r^\pm = 0,5 \text{ Тл}; C_\varepsilon^{cp} = 1883 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C)};$$

$$\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}; \lambda_T = 216 \text{ Вт/(м} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}; \lambda_F = 212 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C)}.$$

При розв'язанні крайової задачі скористаємося системою диференціальних рівнянь (20), до якої застосуємо метод дискретної ортогоналізації. Розв'язок задачі отримано на часовому проміжку $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с, часовий крок інтегрування $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ с.

На рис. 2 показано розподіл прогину $w(r)$ у безрозмірному вигляді при $\gamma = 0,03$ – лінія 1; $\gamma = 0,06$ – лінія 2; $\gamma = 0,10$ – лінія 3, при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с. Максимальне нелінійне значення прогину досягається на зовнішньому контурі на лінії 3 і відповідає величині $w/h_{cp} = -7,50$. Прогин дорівнює нулю на внутрішньому контурі, що відповідає граничній умові. Прогин являється нелінійним і додатним вздовж радіуса, крім значень зовнішнього контуру.

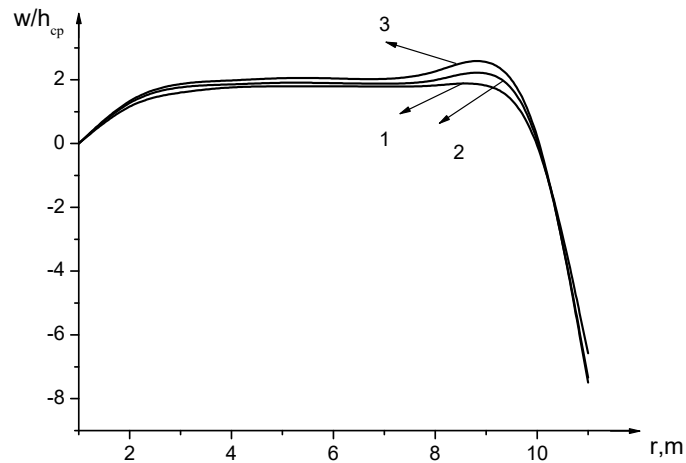


Рис. 2

На рис. 3 представлено розподіл джоулевої температури $T(t)$ на зовнішньому контурі. Лінії 1, 2, 3 відповідають значенням γ рис. 2. Як видно з графіків, максимальне значення температури досягається при $\gamma = 0,10$ та дорівнює 140°C .

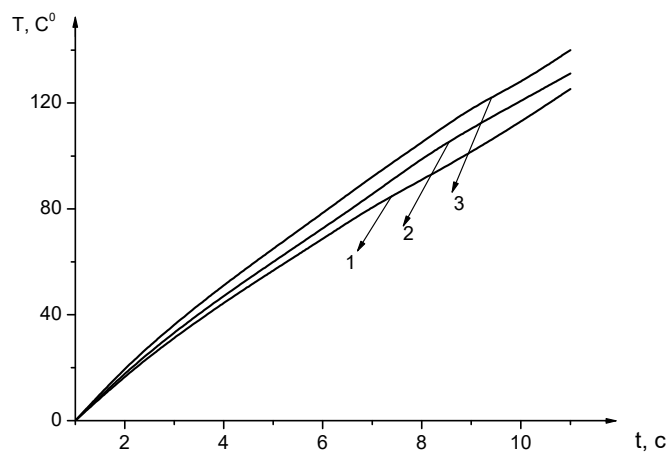


Рис. 3

Рис. 4 представляє розподіл безрозмірного прогину при $t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ – лінія 1; $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ – лінія 2; $t = 9 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ – лінія 3. Всі значення прогину на лініях 1, 2 – нелінійні для всіх значень вздовж радіуса. На лінії 3 значення прогину лінійні, крім зовнішнього контуру, де прогин досягає максимального значення $w/h_{cp} = -8,80$.

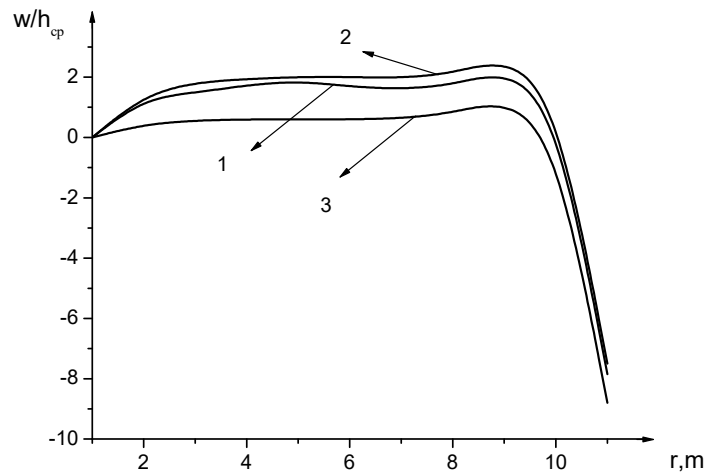


Рис. 4

Рис. 5 ілюструє розподіл джоулевої температури $T(t)$ на внутрішньому контурі пластини при $\gamma = 0,03$ – лінія 1; $\gamma = 0,06$ – лінія 2; $\gamma = 0,10$ – лінія 3. Максимальне значення температури досягається при $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$. Лінія 1 – $257,75^\circ\text{C}$; лінія 2 – $252,26^\circ\text{C}$; лінія 3 – $242,96^\circ\text{C}$.

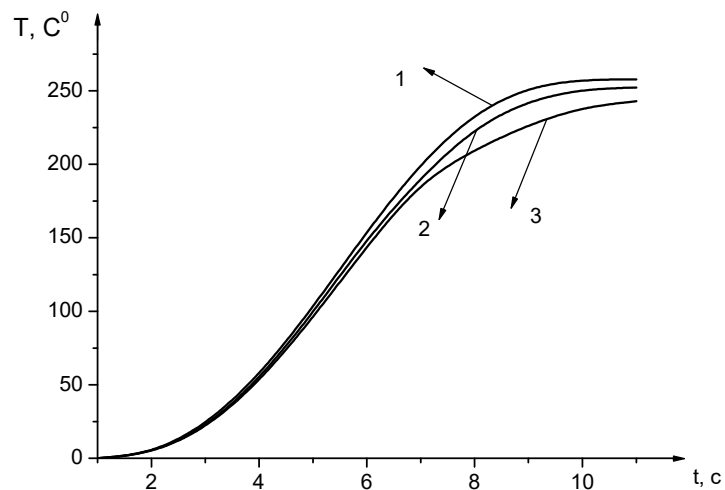


Рис. 5

На рис. 6 представлено розподіл температури від часу для $\gamma = 0,10$ при $r = 0,54\text{ м}$ – лінія 1; $r = 0,60\text{ м}$ – лінія 2; $r = 0,90\text{ м}$ – лінія 3. Як видно з графіків, максимальне значення температури досягається на зовнішньому контурі та приймає значення 140°С . Відзначимо, що отриманий результат узгоджується з результатом, представленим на рис. 3.

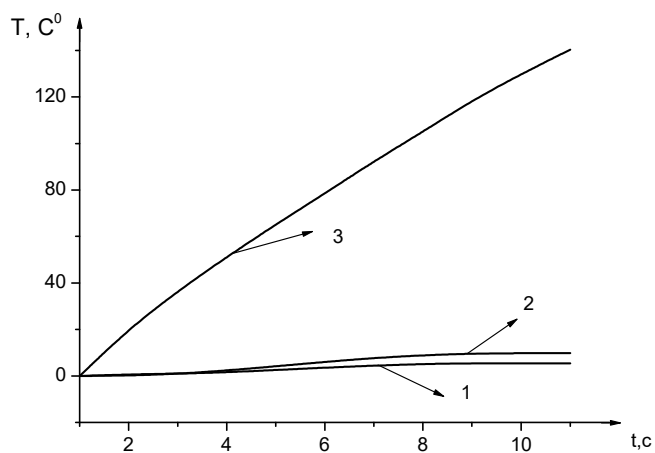


Рис. 6

Рис. 7 ілюструє розподіл механічного напруження на верхній поверхні пластини $\sigma_1^+(r) \text{ Н/м}^2$ – лінія 1; на нижній поверхні пластини $\sigma_1^-(r) \text{ Н/м}^2$ – лінія 2 для $\gamma = 0,10$ при $t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

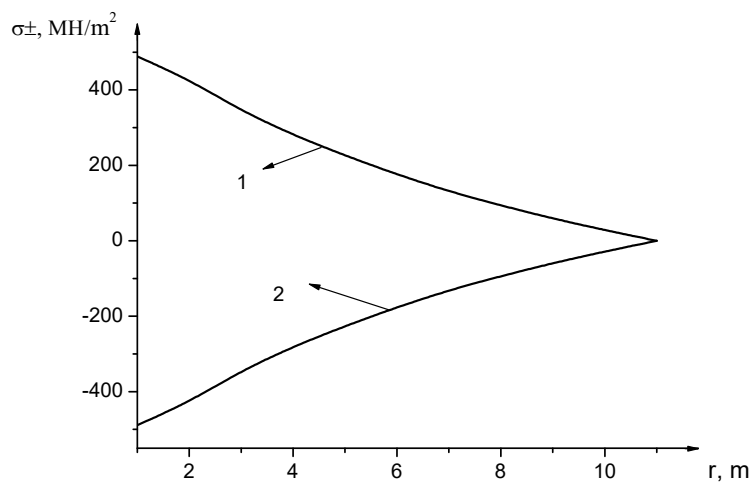


Рис. 7

На рис. 8 показано розподіл напружень при $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$. Через тонкостінність пластини, поверхневі напруження рівні за абсолютною величиною та протилежні, що відповідає напрямкам нормалей поверхонь.

На рис. 9 представлено розподіл джоулевої температури в залежності від значень радіуса пластини для $\gamma = 0,10$ при $t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ – лінія 1; $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ – лінія 2 та $t = 9 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ – лінія 3. Значення температури на лініях 1, 3 співпадають, крім значень на зовнішньому контурі. Максимальне значення температури фіксуємо на лінії 2 на внутрішньому контурі пластини, яке – 243°C . На зовнішньому контурі температура приймає значення на лінії 1 – 134°C ; на лінії 2 – $89,90^\circ\text{C}$; на лінії 3 – 123°C .

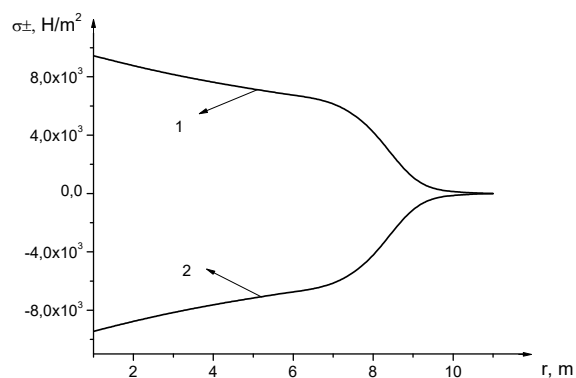


Рис. 8

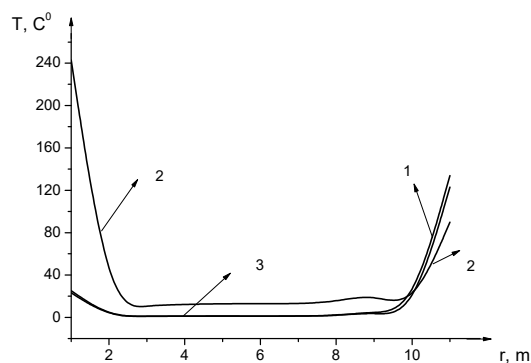


Рис. 9

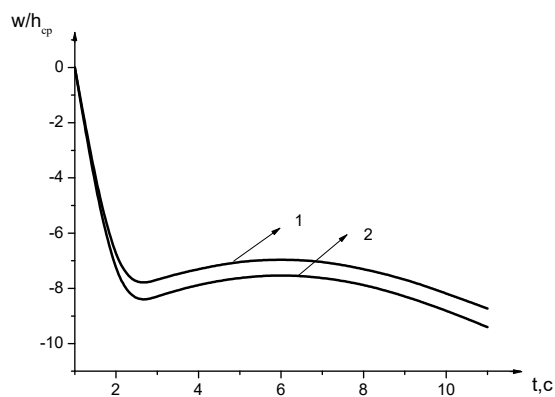


Рис. 10

Рис. 10 представляє безрозмірний розподіл прогину в залежності від часу $w(t)$. Лінія 1 відповідає $\gamma = 0,06$; лінія 2 – $\gamma = 0,10$ при $r = 0,90$ м (зовнішній контур пластини). Значення прогину при $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с дорівнює $w/h_{cp} = -8,73$ на лінії 1 та $w/h_{cp} = -9,40$ на лінії 2. Товщина пластини більша при $\gamma = 0,06$ від товщини пластини $\gamma = 0,10$, що і пояснює значення прогину на зовнішньому контурі. Знак «мінус» пов'язаний з граничними умовами на цьому контурі.

Висновок.

Отримані нелінійні рівняння термомагнітопружності, з використанням запропонованої методики, дозволяють визначати термонапружений стан гнучких ортотропних оболонок обертання з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла. Запропонована методика дозволяє застосовувати різні варіанти фізико-механічних параметрів ортотропних оболонок обертання в геометрично-нелінійній постановці, які завантажено нестационарними механічними і магнітними зусиллями, різноманітними граничними умовами. Розглянуто розв'язок гнучкої ортотропної осесиметричної кільцевої пластини змінної жорсткості з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла. Проведено обговорення отриманих результатів.

РЕЗЮМЕ. Наведено побудову та методику розрахунку нелінійних рівнянь термомагнітопружності гнучких ортотропних оболонок обертання з урахуванням ортотропної електропровідності і джоулевого тепла. Проведено аналіз термомагнітопружності гнучкої ортотропної кільцевої пластини змінної жорсткості в осесиметричній постановці з урахуванням ортотропної електропровідності та джоулевого тепла.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: кільцева пластинка, магнітопружність, геометрична нелінійність, ортотропія, джоулеве тепло.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – Москва: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 184 с.
3. Будақ В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Чисельно-аналітичне розв'язання крайових задач магнітопружності. – Миколаїв: Іліон, 2016. – 148 с.
4. Будақ В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Нелинейные магнитоупругие оболочки. – Николаев: Иллион, 2016. – 136 с.
5. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук, – 1963. – 16, вып. 5(99). – С. – 171 – 174.
6. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 403 с.
7. Дресвянников В.И. О нестационарных задачах механики упругопластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – 19. – С. 32 – 47.
8. Ландау Л.В., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 624 с.
9. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. – Москва: Мир, 1967. – 385 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – Т.1. – Москва: Наука, 1976. – 492 с.
11. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. – Москва: Наука, 1979. – 639 с.
12. Страттон Д.А. Теория электромагнетизма. – Москва-Ленинград: ГТТИ, 1948. – 540 с.
13. Тамм И.Е. Теория электромагнетизма. – Москва: Наука, 1976. – 624 с.
14. Bian U.H. Analysis of Nonlinear Stresses and Strains in a Thin Current-carrying Elastic Plate // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 108 – 120.
15. Bian Y.H., Zhao H.T. Analysis of Thermal-Magnetic-Elastic Stresses and Strains in a Thin Current-carrying Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. 2016. – 52, N 4. – P. 437 – 448.

16. *Dinzhos R.V., Privalko V.P., Privalko E.G.* Enthalpy Relaxation in the Cooling/heating Cycles of Polypropylene / organosilicananocomposites. I. Nonisothermal crystallization // *J. Macromol Sci. Phys.* – 2005. – **B44**. – P. 421 – 430.
17. *Dinzhos R.V., Privalko V.P., Privalko E.G.* Enthalpy Relaxation in the Cooling/heating Cycles of Polypropylene/organosilicananocomposites. II. Melting behavior // *J. Macromol Sci. Phys.* – 2005. – **B44**. – P. 431 – 443.
18. *Elhajjar R., Saponara V., Muliana A.* Smart Composites. Mechanics and Design. – New York: CRC Press. – 2013, – 430 p.
19. *Hutter K., Van de Ven A.F., Ursescu A.* Electromagnetic Field Matter Interactions in Thermoelastic Solids and Viscous Fluids. – Berlin: Springer. – 403 p.
20. *Mol'chenko L.V., Fedorchenko L.N., Vasil'eva L.Ya.* Nonlinear Theory of Magnetoelasticity of Shells of Revolution with Joule Heat Taken into Account // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 3. – P. 306 – 314.
21. *Mol'chenko L.V., Loos I.I.* Effect of Conicity on Axisymmetrical Strain State of Flexible Orthotropic Shell of Revolution in Magnetic Field // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 11. – P. 1261 – 1267.
22. *Mol'chenko L.V., Loos I.I.* Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Isotropic Shells of Revolution Subject to Joule Heating // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 1. – P. 68 – 78.
23. *Mol'chenko L.V., Loos I.I.* Asymmetric Deformation of Sells of Revolution of Variable Stiffness in a Nonstationary Magnetic Field // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 3. – P. 311 – 320.
24. *Mol'chenko L.V., Loos I.I.* Thermomagnetoelastic Deformation of a Flexible Orthotropic Conical Shell with Electrical Conductivity and Joule Heat Taken into Account // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 5. – P. 534 – 543.
25. *Mol'chenko L.V., Loos I.I., Darmosyuk V.N.* Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Orthotropic Shells of Revolution of Variable Stiffness with Joule Heat Taken into Account // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 4. – P. 498 – 511.
26. *Moon F.C.* Magneto-Solid Mechanics. – New York: Wiley, 1984. – 448 p.
27. *Newmark N.M.* A Method of Computation for Structural Dynamics // *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE.* – 1959. – **85**, N 7. – P. 67 – 97.

Надійшла 17.12.2019

Затверджена до друку 18.03.2021