

В.І.Острик

ЗАКРИТА НАПІВНЕСКІНЧЕННА ТРІЩИНА НА МЕЖІ ПОДІЛУ
МАТЕРІАЛІВ У КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ СМУЗІ

*Інститут прикладної фізики НАН України,
вул. Петрапавлівська, 58, 40000, Суми, Україна; e-mail: v.i.ostryk@gmail.com*

Abstract. The compression and shear of an elastic piece-wise homogeneous strip with a semi-infinite crack on the interface are considered. The crack is completely closed and its faces are in a state of full sliding. Using the Wiener – Hopf method, the analytical solution is obtained. The distributions of normal and tangential stresses are found on both the crack line and its continuation as well as the shear stress intensity factor is determined. It is shown that the crack faces break out of the contact in their middle part, when the ratio of shear and compressive intensities of loading exceeds a certain critical value.

Key words: interface crack, elastic strip, friction, sliding contact, Wiener – Hopf method.

Вступ.

Напружений стан пружної однорідної площини з прямолінійною тріщиною в умовах стиску та зсуву вивчено в роботі [6]. Тріщина вважалася повністю закритою, а між її берегами відбувався фрикційний контакт. Нижче розглянуто аналогічну задачу для міжфазної напівнескінченної тріщини у пружній кусково-однорідній смугі. Частинний випадок цієї задачі, коли одна зі складових смуг є абсолютно жорсткою, розглянуто раніше [8].

§1. Постановка задачі.

Нехай кусково-однорідна смуга складена з двох смуг $-\infty < x < \infty$, $-h_1 \leq y \leq 0$, $0 \leq y \leq h_2$ з модулями зсуву G_1 , G_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 відповідно (рис. 1). На частині $0 \leq x < \infty$ межі $y = 0$ поділу матеріалів смуги жорстко з'єднані, а на іншій її частині $-\infty < x < 0$ кусково-однорідна смуга має напівнескінченну тріщину. Грані $y = -h_1$, $y = h_2$ загальної смуги з'єднані з жорсткими стінками, до яких прикладено рівномірно розподілене навантаження стиску та зсуву інтенсивностей p і q . Вважаємо, що береги тріщини $y = \pm 0$ контактують. При цьому враховуємо сили тертя в контакті згідно з законом Амонтона.

Крайові умови задачі запишемо у вигляді

$$u_y^{(1)} \Big|_{y=0} = u_y^{(2)} \Big|_{y=0} \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$\tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)} \Big|_{y=0} = -\mu_0 \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = -\mu_0 \sigma_y^{(2)} \Big|_{y=0}$$

$$(-\infty < x < 0);$$

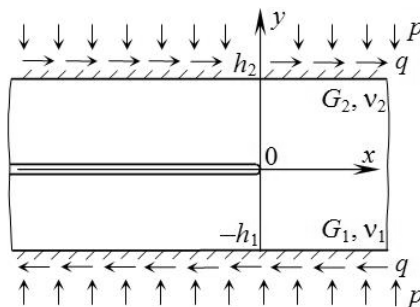


Рис. 1

$$u_x^{(1)} \Big|_{y=0} = u_x^{(2)} \Big|_{y=0}; \quad \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)} \Big|_{y=0}; \quad \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)} \Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty); \quad (1.1)$$

$$u_x^{(1)} \Big|_{y=-h_1} = 0; \quad u_y^{(1)} \Big|_{y=-h_1} = 0; \quad u_x^{(2)} \Big|_{y=h_2} = \delta_2, \quad u_y^{(2)} \Big|_{y=h_2} = -\delta_1 \quad (-\infty < x < \infty),$$

де δ_1, δ_2 – нормальне та тангенціальне відносні зміщення стінок; μ_0 – коефіцієнт тертя. Друга крайова умова описує проковзування верхнього берега тріщини відносно нижнього у напрямку до її вершини, що справедливо за значного зсуву, коли $q > \mu_0 p$.

Відносні зміщення стінок виразимо через інтенсивності навантаження з умов на нескінченності:

$$\delta_1 = \left(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1} \frac{h_1}{G_1} + \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2} \frac{h_2}{G_2} \right) \frac{p}{2}; \quad \delta_2 = \left(\frac{h_1}{G_1} + \frac{h_2}{G_2} \right) (2q - \mu_0 p). \quad (1.2)$$

Дійсно, на необмеженому віддаленні праворуч і ліворуч від вершини тріщини у кожній зі складових смуг встановлюється однорідний напружено-деформований стан, для якого деформації та напруження незмінні, причому

$$\varepsilon_x^{(1,2)} = 0; \quad \sigma_y^{(1,2)} = -p; \quad \varepsilon_y^{(1)} h_1 + \varepsilon_y^{(2)} h_2 = -\delta_1 \quad (x \rightarrow \pm\infty); \quad (1.3)$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} h_1 + \gamma_{xy}^{(2)} h_2 = \delta_2 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Зідно з умовою рівноваги кожної смуги

$$2q = \mu_0 p + \tau_{xy}^{(1,2)} \Big|_{x \rightarrow \infty}. \quad (1.4)$$

Добавимо до співвідношень (1.3), (1.4) закон Гука і приходимо до рівностей (1.2).

§2. Інтегральне рівняння задачі.

Ввівши місцеві системи координат $x_j O y_j$ ($j=1, 2$; $x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $x_2 = x$, $y_2 = y$), для кожної смуги розглянемо основну змішану задачу з крайовими умовами

$$\frac{1}{2G_j} \sigma_y^{(j)} \Big|_{y_j=0} = \sigma_j(x_j); \quad \frac{1}{2G_j} \tau_{xy}^{(j)} \Big|_{y_j=0} = \tau_j(x_j); \quad u_x^{(j)} \Big|_{y_j=h_j} = 0; \quad u_y^{(j)} \Big|_{y_j=h_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$(-\infty < x_j < \infty), \quad j=1, 2.$$

Для розв'язання цієї задачі використаємо загальний розв'язок рівнянь рівноваги для пружної смуги [5]:

$$u_x^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u_j(\mu, y_j) e^{-i\mu x_j} d\mu; \quad u_y^{(j)} = \int_{-\infty}^{\infty} v_j(\mu, y_j) e^{-i\mu x_j} d\mu;$$

$$\frac{1}{2G_j} \sigma_y^{(j)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_j(\mu, y_j) e^{-i\mu x_j} d\mu; \quad \frac{1}{2G_j} \tau_{xy}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_j(\mu, y_j) e^{-i\mu x_j} d\mu;$$

$$\mu^2 u_j(\mu, y) = \mu A_j(\mu) \operatorname{ch} \mu y + \mu B_j(\mu) \operatorname{sh} \mu y + C_j(\mu) [(3-4\nu_j) \operatorname{ch} \mu y + \mu y \operatorname{sh} \mu y] -$$

$$-D_j(\mu) [(3-4\nu_j) \operatorname{sh} \mu y + \mu y \operatorname{ch} \mu y];$$

$$v_j(\mu, y) = A_j(\mu) \operatorname{sh} \mu y + B_j(\mu) \operatorname{ch} \mu y + C_j(\mu) y \operatorname{ch} \mu y - D_j(\mu) y \operatorname{sh} \mu y ; \quad (2.2)$$

$$\sigma_j(\mu, y) = \mu A_j(\mu) \operatorname{ch} \mu y + \mu B_j(\mu) \operatorname{sh} \mu y + C_j(\mu) [(1 - 2\nu_j) \operatorname{ch} \mu y + \mu y \operatorname{sh} \mu y] - \\ - D_j(\mu) [(1 - 2\nu_j) \operatorname{sh} \mu y + \mu y \operatorname{ch} \mu y] ;$$

$$\mu \tau_j(\mu, y) = \mu A_j(\mu) \operatorname{sh} \mu y + \mu B_j(\mu) \operatorname{ch} \mu y + C_j(\mu) [2(1 - \nu_j) \operatorname{sh} \mu y + \mu y \operatorname{ch} \mu y] - \\ - D_j(\mu) [2(1 - \nu_j) \operatorname{ch} \mu y + \mu y \operatorname{sh} \mu y] ,$$

де $A_j(\mu)$, $B_j(\mu)$, $C_j(\mu)$, $D_j(\mu)$ ($j = 1, 2$) – довільні функції.

Задовольнивши розв'язком (2.2) крайові умови (2.1), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sigma_j(\mu, 0) = \tilde{\sigma}_j(\mu) ; \quad \tau_j(\mu, 0) = \tilde{\tau}_j(\mu) ; \quad u_j(\mu, h_j) = 0 ; \quad v_j(\mu, h_j) = 0 ; \quad (2.3)$$

$$\tilde{\sigma}_j(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_j(x) e^{i\mu x} dx ; \quad \tilde{\tau}_j(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_j(x) e^{i\mu x} dx$$

для визначення невідомих $A_j(\mu)$, $B_j(\mu)$, $C_j(\mu)$, $D_j(\mu)$ ($j = 1, 2$).

Із виразів для $u_j(\mu, y)$, $v_j(\mu, y)$ із (2.2), використовуючи розв'язок системи рівнянь (2.3), знаходимо

$$-iu_j(\mu, 0) \mu^2 \Delta_1^{(j)}(\mu h_j) = \lambda_{21}^{(j)}(\mu h_j) \sigma_j(\mu, 0) - i\mu \lambda_{22}^{(j)}(\mu h_j) \tau_j(\mu, 0) ;$$

$$v_j(\mu, 0) \mu \Delta_1^{(j)}(\mu h_j) = \lambda_{11}^{(j)}(\mu h_j) \sigma_j(\mu, 0) - i\mu \lambda_{12}^{(j)}(\mu h_j) \tau_j(\mu, 0) ; \quad (2.4)$$

$$\lambda_{11}^{(j)}(\tau) = 2(1 - \nu_j) [(3 - 4\nu_j) \operatorname{sh} 2\tau - 2\tau] ;$$

$$\lambda_{12}^{(j)}(\tau) = -\lambda_{21}^{(j)}(\tau) = -2i [(3 - 4\nu_j)(1 - 2\nu_j) \operatorname{sh}^2 \tau - \tau^2] ;$$

$$\lambda_{22}^{(j)}(\tau) = 2(1 - \nu_j) [(3 - 4\nu_j) \operatorname{sh} 2\tau + 2\tau] ;$$

$$\Delta_1^{(j)}(\tau) = (3 - 4\nu_j)(\operatorname{ch} 2\tau - 1) + 2\tau^2 + 8(1 - \nu_j)^2 \quad (j = 1, 2).$$

Співвідношення (2.4) зв'язують трансформанти переміщень з трансформантами напружень на одній із граней смуги ($y = 0$), якщо на іншій її грані ($y = h_j$) відсутні переміщення.

Згідно з крайовими умовами (1.1) переміщення u_y і напруження σ_y , τ_{xy} неперервно продовжувані через межу поділу матеріалів ($y = 0$), тобто

$$v_2(\mu, 0) = -v_1(-\mu, 0) - \delta_1 \delta(\mu) ; \quad G_2 \sigma_2(\mu, 0) = G_1 \sigma_1(-\mu, 0) ; \quad (2.5)$$

$$G_2 \tau_2(\mu, 0) = -G_1 \tau_1(-\mu, 0) ,$$

де $\delta(\mu)$ – дельта-функція Дірака. У першій рівності (2.5) враховано останню з крайових умов (1.1).

Сім лінійних співвідношень (2.4), (2.5) зв'язують вісім трансформант переміщень та напружень на лінії $y = 0$, що дає можливість виразити ці трансформанти через одну з них або будь-яку їхню лінійну комбінацію.

Введемо невідому функцію

$$g(x) = \frac{1}{2G_1} (\tau_{xy}^{(1)} + \mu_0 \sigma_y^{(1)}) \Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty) \quad (2.6)$$

та її трансформанту Фур'є

$$a(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(x) e^{i\mu x} dx = -i\mu\tau_1(\mu, 0) + \mu_0\sigma_1(\mu, 0). \quad (2.7)$$

При цьому $g(x) = 0$ ($-\infty < x < 0$) згідно з другою крайовою умовою (1.1).

Врахувавши поведінку на нескінченності функції $g(x)$, яка впливає з формул (1.3), (1.4), подамо її у вигляді

$$g(x) = \frac{q - \mu_0 p}{G_1} + g_*(x); \quad g_*(\infty) = 0.$$

Використавши значення інтеграла [4]:

$$\int_0^{\infty} e^{i\mu x} dx = \pi\delta(\mu) + \frac{i}{\mu},$$

матимемо

$$a(\mu) = \frac{q - \mu_0 p}{2G_1} \left(\delta(\mu) + \frac{i}{\pi\mu} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g_*(x) e^{i\mu x} dx. \quad (2.8)$$

Для знаходження невідомої функції $g(x)$ із (2.6) використаємо третю крайову умову (1.1), яка на відміну від інших крайових умов залишається поки не виконаною. Для цього стрибок тангенціальних переміщень на лінії поділу матеріалів

$$\left(u_x^{(1)} - u_x^{(2)} \right) \Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} [u_2(\mu, 0) - u_1(-\mu, 0)] e^{-i\mu x} d\mu,$$

виразивши за допомогою співвідношень (2.4), (2.5) різницю трансформант $u_2(\mu, 0) - u_1(-\mu, 0)$ через комбінацію трансформант напружень $a(\mu)$ із (2.7) і врахувавши (2.8), перетворимо до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \left(u_x^{(1)} - u_x^{(2)} \right) \Big|_{y=0} &= -\frac{q - \mu_0 p}{2G_1} \left(K(0) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\mu h_1)}{\mu} e^{-i\mu x} d\mu \right) + \\ &+ \int_0^{\infty} g_*(r) dr \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu h_1) e^{-i\mu(x-r)} d\mu; \\ K(\tau) &= \frac{\lambda(\tau)}{\tau \Delta(\tau)}; \quad K(0) = 2(1 + \bar{G} \bar{h}); \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \lambda(\tau) &= \lambda^{(1)}(\tau) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) + \bar{G}^2 \lambda^{(2)}(\bar{h}\tau) \Delta_1^{(1)}(\tau) + \\ &+ \bar{G} \left[\lambda_{11}^{(1)}(\tau) \lambda_{22}^{(2)}(\bar{h}\tau) + \lambda_{22}^{(1)}(\tau) \lambda_{11}^{(2)}(\bar{h}\tau) + \lambda_{12}^{(1)}(\tau) \lambda_{21}^{(2)}(\bar{h}\tau) + \lambda_{21}^{(1)}(\tau) \lambda_{12}^{(2)}(\bar{h}\tau) \right]; \end{aligned}$$

$$\Delta(\tau) = \Delta^{(1)}(\tau) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) + \bar{G} \Delta^{(2)}(\bar{h}\tau) \Delta_1^{(1)}(\tau); \quad \bar{h} = \frac{h_2}{h_1}; \quad \bar{G} = \frac{G_1}{G_2};$$

$$\lambda^{(j)}(\tau) = \frac{\lambda_{11}^{(j)}(\tau) \lambda_{22}^{(j)}(\tau) - \lambda_{12}^{(j)}(\tau) \lambda_{21}^{(j)}(\tau)}{\Delta_1^{(j)}(\tau)} = (3 - 4\nu_j)^2 (\text{ch} 2\tau - 1) - 2\tau^2;$$

$$\Delta^{(j)}(\tau) = \lambda_{11}^{(j)}(\tau) - (-1)^j \mu_0 \lambda_{12}^{(j)}(\tau) \quad (j = 1, 2).$$

Задовольнивши першим виразом із (2.9) третю крайову умову (1.1) і зробивши заміни

$$x = h_1 \xi; \quad r = h_1 \eta; \quad \mu = \frac{\tau}{h_1}, \quad (2.10)$$

відносно нової невідомої функції

$$\varphi(\xi) = g_*(h_1 \xi) \quad (2.11)$$

отримуємо інтегральне рівняння

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 < \xi < \infty);$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau; \quad (2.12)$$

$$f(\xi) = \frac{q - \mu_0 p}{2G_1} \left(K(0) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\tau)}{\tau} e^{-i\tau\xi} d\tau \right) = \frac{q - \mu_0 p}{G_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is'_k)}{s_k'^2 \Delta'(is'_k)} e^{s_k' \xi}.$$

Тут інтеграл із правої частини рівняння перетворений за теорією лишків, а через s'_k ($k = 1, 2, \dots$) позначені корені рівняння $\Delta(is) = 0$ із півплощини $\text{Re } s < 0$.

§3. Розв'язання інтегрального рівняння.

Інтегральне рівняння (2.12) задано на напівнескінченному інтервалі та має різниче ядро. Знайдемо його розв'язок методом Вінера – Хопфа [3].

Розповсюдимо рівняння (2.12) на всю числову вісь та застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Увівши до розгляду невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi; \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad (3.1)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ ($c^+ < 0$) і $\text{Im } z < c^-$ ($c^- > 0$) комплексної площини, з урахуванням теореми про згортку отримаємо функціональне рівняння

$$K(z) \Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z) \quad (-\infty < \text{Re } z < \infty, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-); \quad (3.2)$$

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{iz\xi} d\xi = -\frac{q - \mu_0 p}{G_1 \sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is'_k)}{s_k'^2 \Delta'(is'_k)} \frac{1}{s_k' + iz}.$$

Тут функція $F^+(z)$ є аналітичною у півплощині $\text{Im } z > c^+$.

Факторизуємо коефіцієнт $K(z)$ рівняння (3.2), тобто подамо його у вигляді

$$K(z) = K(0) K^+(z) K^-(z), \quad (3.3)$$

де $K^+(z)$ і $K^-(z)$ – функції, які є аналітичні та не обертаються в нуль у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ відповідно. Факторизацію виконаємо у нескінченних добутках [3]

$$K^+(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\tau_n} \right) \left(1 + \frac{iz}{s_n'} \right)^{-1}; \quad K^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\tau_n} \right) \left(1 + \frac{iz}{s_n'} \right)^{-1}, \quad (3.4)$$

де τ_n і s_n ($n=1, 2, \dots$) – корені рівнянь $\lambda(is) = 0$ і $\Delta(is) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$.

Праву частину рівняння (3.2), що віднесено до функції $K^-(z)$, представимо як різницю аналітичних у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ функцій

$$\frac{F^+(z)}{K^-(z)} = f^+(z) - f^-(z); \quad f^+(z) = \frac{q - \mu_0 p}{G_1 \sqrt{2\pi}} K(0) \frac{K^+(z) - 1}{iz}.$$

Розв'язок функціонального рівняння (3.2) знаходимо у вигляді [3]

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z)}{K(0)K^+(z)} = -\frac{q - \mu_0 p}{G_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{iz} \left(\frac{1}{K^+(z)} - 1 \right), \quad (3.5)$$

а інтегрального (2.12) отримаємо, застосувавши інтегральне перетворення Фур'є до першої рівності (3.1). Урахувавши при цьому (3.3), (3.5), маємо

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau = -\frac{q - \mu_0 p}{G_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} \left(K(0) \frac{\tau\Delta(\tau)}{\lambda(\tau)} K^-(\tau) - 1 \right) e^{-i\tau\xi} d\tau.$$

Перетворивши останній інтеграл у ряд за теорією лишків, отримаємо

$$\varphi(\xi) = -\frac{q - \mu_0 p}{G_1} K(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(-i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} K^-(-i\tau_k) e^{-\tau_k \xi}. \quad (3.6)$$

§4. Напруження на лінії поділу матеріалів.

Повернувшись до замін (2.6), (2.10), (2.11), на підставі (3.6) знаходимо лінійну комбінацію дотичних і нормальних напружень на лінії продовження тріщини

$$\frac{1}{2G_1} (\tau_{xy}^{(1)} + \mu_0 \sigma_y^{(1)}) \Big|_{y=0} = \frac{q - \mu_0 p}{G_1} \left(1 - K(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(-i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} K^-(-i\tau_k) e^{-\tau_k \xi} \right), \quad \xi = \frac{x}{h_1} \quad (0 < x < \infty). \quad (4.1)$$

Виразивши трансформанту $\sigma_1(\mu, 0)$ напружень $\sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0}$ за допомогою співвідношень (2.4), (2.5) через комбінацію трансформант напружень $a(\mu)$ із (2.7), маємо

$$\frac{1}{2G_1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = -\frac{p}{2G_1} + \frac{q - \mu_0 p}{G_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(\tau)}{\tau\Delta(\tau)K^+(\tau)} e^{-i\tau\xi} d\tau; \quad (4.2)$$

$$\lambda_{12}(\tau) = \lambda_{12}^{(1)}(\tau)\Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) - \bar{G}\lambda_{12}^{(2)}(\bar{h}\tau)\Delta_1^{(1)}(\tau).$$

У верхній півплощині комплексної площини підінтегральна функція із (4.2) має прості полюси у точках $\tau = is_k$, а у нижній (якщо врахувати (3.3) і другу рівність (2.9)) – у точках $\tau = -i\tau_k$ ($k=1, 2, \dots$). Обчисливши інтеграл із (4.2) через лишки підінтегральної функції у вказаних полюсах, отримаємо нормальні напруження на лінії $y=0$ ($\xi = x/h_1$)

$$\sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = -p + 2(q - \mu_0 p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(is_k)}{is_k \Delta'(is_k)} \frac{1}{K^+(is_k)} e^{s_k \xi} \quad (-\infty < x < 0);$$

$$\sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = -p + 4(q - \mu_0 p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} K^-(-i\tau_k) e^{-\tau_k \xi} \quad (0 < x < \infty). \quad (4.3)$$

Узявши лінійну комбінацію формули (4.1) і другої рівності (4.3), знайдемо дотичні напруження на продовженні тріщини:

$$\tau_{xy}^{(1)}|_{y=0} = q + (q - \mu_0 p) \left(1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{11}(i\tau_k)}{\lambda'_{11}(i\tau_k)} K^{-}(-i\tau_k) e^{-\tau_k \xi} \right) \quad (0 < x < \infty);$$

$$\lambda_{11}(\tau) = \lambda_{11}^{(1)}(\tau) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) + \bar{G} \lambda_{11}^{(2)}(\bar{h}\tau) \Delta_1^{(1)}(\tau).$$

Отримаємо асимптотичну поведінку напружень на лінії $y=0$ в околі вершини тріщини ($x \rightarrow \pm 0$), узявши до уваги, що згідно роботи [2]

$$K^{+}(z) \sim A^{+}(-iz)^{-\rho}; \quad K^{-}(z) \sim A^{-}(iz)^{\rho-1}, \quad |z| \rightarrow \infty;$$

$$A^{+} = \pi^{\rho} e^{-C\rho} \frac{-s'_1}{\tau_1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-s'_{n+1}}{\tau_{n+1}} e^{\frac{\rho}{2(n+1/2)}}; \quad A^{-} = \frac{\kappa}{K(0)A^{+}};$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\mu_0 \operatorname{th} \pi\theta); \quad \kappa = [1 + (3 - 4\nu_2)\bar{G}] (\operatorname{th} \pi\theta + 1) \sin \pi\rho; \quad (4.4)$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(3 - 4\nu_1)G_2 + G_1}{G_2 + (3 - 4\nu_2)G_1} \quad (0 < \rho \leq 1/2, \theta > 0),$$

де C – стала Ейлера – Маскероні.

Члени рядів із рівностей (4.3) у випадку $\xi=0$ мають порядки величин $k^{\rho-1}$ і $k^{-\rho-1}$ відповідно, якщо $k \rightarrow \infty$. Тобто, перший ряд при $\xi=0$ є розбіжний, а другий – збіжний. Отже, нормальні напруження на продовженні тріщини скінченні, а на берегах тріщини необмежені поблизу її вершини, що є характерним для міжфазної тріщини [1, 7, 11]. Із виразів (3.1), (4.2) з урахуванням (3.5), (4.4) при $|z| \rightarrow \infty$ маємо

$$\int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi \sim \frac{q - \mu_0 p}{A^{+} G_1} (-iz)^{\rho-1}; \quad \int_{-\infty}^0 (\sigma_y^{(1)}|_{y=0} + p) e^{iz\xi} d\xi \sim 4(q - \mu_0 p) A^{-} (iz)^{\rho-1}.$$

Звідси за тауберовою теоремою [3], врахувавши заміни (2.6), (2.10), (2.11), отримуємо

$$\tau_{xy}^{(1)}|_{y=0} \sim \frac{2(q - \mu_0 p)}{A^{+} \Gamma(1 - \rho)} \left(\frac{x}{h_1} \right)^{-\rho}, \quad x \rightarrow +0; \quad \sigma_y^{(1)}|_{y=0} \sim \frac{4(q - \mu_0 p) A^{-}}{\Gamma(1 - \rho)} \left(-\frac{x}{h_1} \right)^{-\rho}, \quad x \rightarrow -0$$

і визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow +0} (2\pi x)^{\rho} \tau_{xy}^{(1)}|_{y=0} = \frac{2(q - \mu_0 p)}{A^{+} \Gamma(1 - \rho)} (2\pi h_1)^{\rho}.$$

Через коефіцієнт K_{II} розподіли напружень та переміщень всередині смуги поблизу вершини тріщини визначаються за відомими формулами [1, 9].

За відсутності тертя ($\mu_0 = 0$) функція $\Delta(\tau)$ із (2.9) стає непарною, і для коренів рівняння $\Delta(is) = 0$ маємо $s'_n = -s_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Із формул (3.4) випливає, що $K^{-}(z) \equiv K^{+}(-z)$. Тоді зі співвідношень (4.4) при $\rho = 1/2$ отримуємо:

$$A^{+} = A^{-} = \sqrt{\frac{\operatorname{th} \pi\theta + 1}{K(0)} [1 + (3 - 4\nu_2)\bar{G}]}; \quad K_{II} = \frac{2q}{A^{+}} \sqrt{2h_1} \quad (\mu_0 = 0).$$

Знайдемо інший вираз для коефіцієнта K_{II} . Подамо

$$K(z) = h(z) K_1(z); \quad h(z) = -\frac{ikz}{z^2 + b^2} \frac{\sin \pi(iz - \rho)}{\sin \pi iz},$$

де поведінка функції $h(z)$ на нескінченності така ж, як і функції $K(z)$; b – довільна додатна стала. Виконавши факторизацію функцій $h(z)$ і $K_1(z)$ відповідно у гамма-функціях та інтегралах типу Коші [3], отримаємо

$$K_{II} = 2(q - \mu_0 p)(2\pi h_1)^p \sqrt{\frac{K(0) \sin \pi \rho}{\pi \kappa}} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0 \tilde{\lambda}_{12}(\zeta) \operatorname{th} \pi \rho - \tilde{\lambda}_{11}(\zeta) \operatorname{th} \pi \zeta}{\tilde{\lambda}_{11}(\zeta) \operatorname{th} \pi \rho + \mu_0 \tilde{\lambda}_{12}(\zeta) \operatorname{th} \pi \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} \right\};$$

$$\tilde{\lambda}_{1j}(\zeta) = i^{j-1} \left[\lambda_{1j}^{(1)}(\zeta) \Delta_1^{(2)}(\bar{h}\zeta) - (-1)^j \bar{G} \lambda_{1j}^{(2)}(\bar{h}\zeta) \Delta_1^{(1)}(\zeta) \right] \quad (j=1, 2).$$

§5. Результати обчислень.

На рис. 2 подано розподіли безрозмірних дотичних $\tau_{xy}^{(1)}/q$ і нормальних $\sigma_y^{(1)}/p$ на лінії поділу матеріалів ($y=0$) у випадку абсолютно жорсткої верхньої смуги ($G_2/G_1 = \infty$, $\nu_1 = 1/3$) за різних відношень інтенсивностей q/p зсувного та стискувального навантажень ($q/p = 0,5; 1; 2; 3; 3,26$).

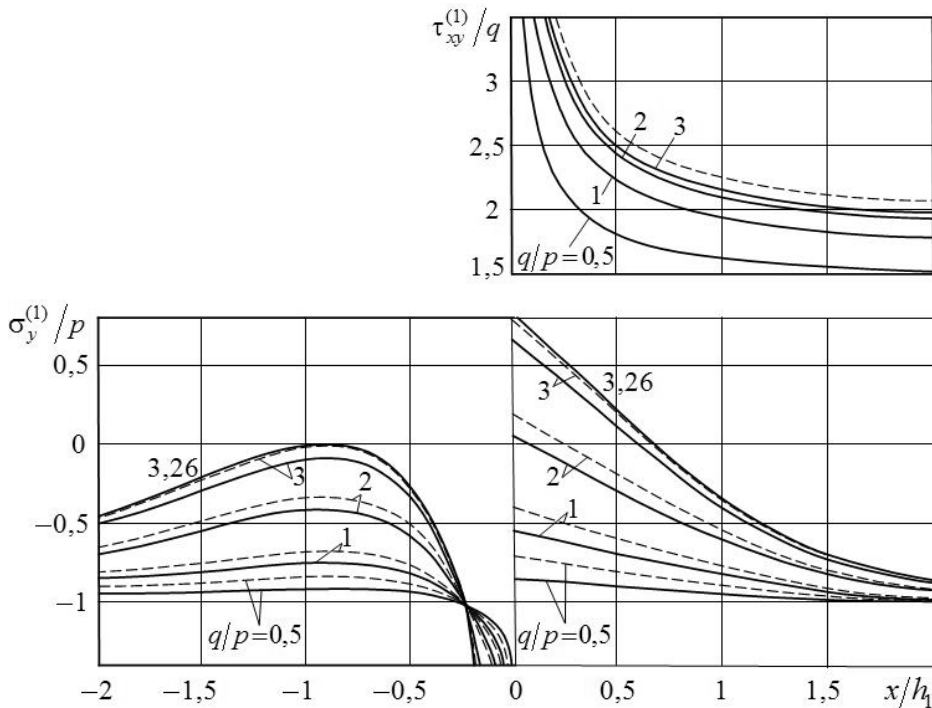


Рис. 2

Суцільні криві відповідають фрикційному контакту берегів тріщини ($\mu_0 = 0,25$), пунктирні – гладкому ($\mu_0 = 0$). Тертя між берегами закритої тріщини суттєво знижує дотичні напруження $\tau_{xy}^{(1)}/q$ на продовженні тріщини ($x > 0$). При цьому зі збільшенням відношення q/p дотичні напруження зростають і наближаються при $q/p \rightarrow \infty$ до тих самих значень, що й за відсутності тертя незалежно від відношення q/p . Тертя у меншій мірі зменшує нормальні напруження $\sigma_y^{(1)}/p$ на продовженні тріщини. Якщо $q/p < 2$, нормальні напруження $\sigma_y^{(1)}$ на продовженні за вершину тріщини ($x > 0$)

стискувальні ($\sigma_y^{(1)} < 0$). Якщо $q/p \geq 2$, вони переходять у розтягувальні ($\sigma_y^{(1)} > 0$) у деякому околі вершини тріщини. Зі збільшенням зсувного навантаження зростають як на продовженні тріщини, так за абсолютним значенням і на тріщині поблизу її вершини на інтервалі $-h_1/4 < x < 0$ довжиною у чверть ширини нижньої смуги, де їхні абсолютні значення необмежено зростають. На всій іншій частині тріщини ($x < -h_1/4$) зі збільшенням q/p напруження $\sigma_y^{(1)}$ зменшуються за абсолютним значенням і за коефіцієнта тертя $\mu_0 = 0,25$ і відношення $q/p = 3,2614$ стають нульовими у точці $x/h_1 = 0,9$. Подальше збільшення відношення q/p призводить до появи на тріщині ділянки, яка містить всередині точку $x/h_1 = 0,9$, де ці напруження стають додатними. Це вказує на часткове розкриття берегів тріщини, що суперечить постановці задачі. Таким чином, коли $q/p = 3,2614$ (при $\mu_0 = 0,25$), розв'язок задачі втрачає зміст і її необхідно розглядати в уточненій постановці з уведенням зони відриву, яка відповідає розкриттю тріщини на деякій її внутрішній частині [10]. За відсутності тертя ($\mu_0 = 0$) максимальне значення напружень $\sigma_y^{(1)}$ сягає нуля при $q/p = 3,05$.

Нормалізовані значення коефіцієнта інтенсивності напружень $\tilde{K}_{II} = \pi^{-\rho+1/2} q^{-1} \times (2h_1)^{-\rho} K_{II}$ залежно від відношення зусиль q/p при $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$, $\mu_0 = 0,25$ і різних відношеннях модулів зсуву G_2/G_1 наведено у таблиці. Коефіцієнт \tilde{K}_{II} монотонно зростає зі збільшенням зсувного навантаження. Коли відношення зусиль досягає критичного значення (останній стовбчик), яке відповідає початку відриву берегів тріщини, його значення збігається з відповідним значенням \tilde{K}_{II} за відсутності тертя, незалежно від відношення q/p . При переході до випадку однорідної смуги ($G_2/G_1 \rightarrow 1$) критичне значення відношення q/p необмежено зростає, що вказує на відсутність розкриття тріщини як за комбінованого навантаження, так і чисто зсувного (при $p = 0$).

$$G_2/G_1 = 1,5$$

q/p	0,5	1	1,5	2	2,5	3	5	8	15,79
\tilde{K}_{II}	1,246	1,869	2,077	2,181	2,243	2,284	2,367	2,414	2,453

$$G_2/G_1 = 2$$

q/p	0,5	1	1,5	2	2,5	3	5	8	9,52
\tilde{K}_{II}	1,262	1,893	2,104	2,209	2,272	2,314	2,398	2,445	2,458

$$G_2/G_1 = 4$$

q/p	0,5	1	1,5	2	2,5	3	5	5,35
\tilde{K}_{II}	1,300	1,949	2,166	2,274	2,339	2,382	2,469	2,478

$$G_2/G_1 = \infty$$

q/p	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,26
\tilde{K}_{II}	1,370	2,055	2,283	2,397	2,466	2,512	2,530

Підсумок.

За умов стиску та зсуву міжфазна напівнескінченна тріщина у пружній кусково-однорідній смузі залишається закритою, якщо відношення інтенсивностей зсувного та стискального навантажень не перевищує деякого критичного значення, що залежить від пружних сталих складових смуг. Лише у випадку однорідної смуги тріщина залишається закритою за будь-яких відношень між зсувним і стискальним наванта-

женнями. При перевищенні відношенням інтенсивностей навантажень свого критичного значення задачу слід розглядати в уточненій постановці з частково розкритою тріщиною.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто стиск і зсув пружної кусково-однорідної смуги з напівнескінченною тріщиною на межі поділу матеріалів. Тріщина повністю закрита, а її береги перебувають в умовах проковзування з тертям. Методом Вінера – Хопфа отримано аналітичний розв’язок задачі. Знайдено розподіли нормальних і дотичних напружень на лінії тріщини та її продовженні, а також коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень. Показано, що при перевищенні відношенням інтенсивностей навантажень зсувом та стиском певного критичного значення береги тріщини не контактують у своїй середній частині.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: міжфазна тріщина, пружна смуга, тертя, ковзний контакт, метод Вінера – Хопфа.

1. Дундурс Я., Комниноу М. Обзор и перспективы исследования межфазной трещины. В кн.: Разрушение композит. материалов. – Рига, 1979. – С. 78 – 87.
2. Зражевський Г.М., Острик В.І. Асимптотика канонічних добутків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 69 – 77.
3. Нобл Б. Метод Вінера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
5. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 342 с.
6. Черепанов Г.П. О развитии трещин в сжатых средах // Прикл. математика и механика. – 30, вып. 1. – 1966. – С. 82 – 93.
7. Ostryk V.I. Friction contact of the edges of an interface crack under the conditions of tension and shear // Materials Sci. – 2003. – 39, N 2 – P. 214 – 224.
8. Ostryk V.I. Closed semi-infinite crack on the boundary of an elastic strip and a rigid wall // Materials Sci. – 2017. – 53, N 1. – P. 93 – 101.
9. Ostryk V.I. Asymptotic distributions of stresses and displacements near the edge of a contact zone // J. of Mathem. Sci. – 2019. – 238, N 1. – P. 63 – 82.
10. Ostryk V.I. Partial opening of semi-infinite crack on the boundary of an elastic strip and a rigid wall // Materials Sci. – 56, N 1. – 2020. – P. 105 – 113.
11. Ostryk V.I., Ulitko A.F. Axisymmetric contact problem for an interface crack // Materials Sci. – 40, N 1. – 2004. – P. 20 – 28.

Надійшла 02.03.2020

Затверджена до друку 18.03. 2021