

О.Я. Григоренко<sup>1</sup>, В.А. Маланчук<sup>2</sup>,  
Г.В. Сороченко<sup>2</sup>, Я.Я. Рушицький<sup>1</sup>

### ЗАСТОСУВАННЯ НЕОДНОРІДНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДО ОПИСУ МЕХАНІЧНОГО СТАНУ ОДНОКОРЕНЕВОГО ЗУБА

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua;  
<sup>2</sup>Національний медичний університет ім. О.О. Богомольця,  
просп. Перемоги, 34, 03057, Київ, Україна; e-mail: malanchuk\_V\_A@ukr.net

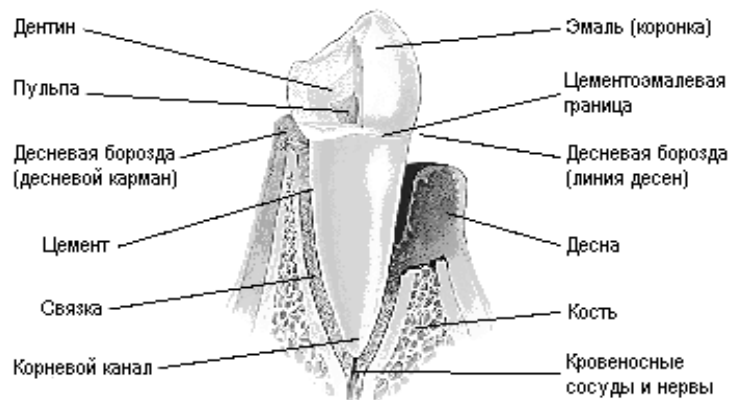
**Abstract.** Some preliminary experience is described in application of the inhomogeneous theory of elasticity to description of the mechanical state of one-root tooth. A few simplest models of axisymmetric state of cylindrical elastic isotropic and transversely isotropic bodies are considered and commented.

**Key words:** inhomogeneous theory of elasticity, depending on radius properties, simplest models for cylindrical bodies.

#### Вступ.

Кінцевою метою дослідження є виявлення особливостей розподілу напружень в однокореновому зубі, який спочатку дуже наближено моделюється пружним циліндричним стержнем з механічними властивостями, які змінюються неперервно по радіусу. Насправді, зуб являє собою складну конструкцію.

Зуб побудовано з трьох шарів кальцифікованих тканин: емалі, дентину і цементу. Порожнина зуба заповнена пульпою. Пульпа оточена дентином – основною кальцифікованою тканиною. На видимій частині зуба дентин покритий емаллю. Занурені в щелепу корені зубів покриті цементом. Більш повну картину реальної конструкції показано на рисунку.



Біомеханіка досліджує зуб як конструкцію з композитного матеріалу достатньо активно. До прикладу, недавні публікації [1, 2] повністю присвячено експериментальному дослідженню міцнісних властивостей зуба і містять такий висновок: «...тверді тканини зубів побудовані природою з одного білково-мінерального матеріалу, однак мають різну структуру, що обумовлює різні механічні характеристики: міцність емалі вище міцності дентину в 7 – 10 разів, однак модулі пружності речовин, які утворюють тверді тканини зуба, при певних умовах роботи плавно змінюються таким чином, що напруження і деформації при навантаженні на зуби не утворюють паразитарних значень...». Вкажемо теж публікації [8, 9].

Представлення зуба як композиції з багатьох шарів, які мають відмінні між собою механічні властивості, що нагадують геометрично структуру бамбука чи цибулини, можна вважати достатньо адекватним на початкових етапах аналізу зуба в рамках сучасної біомеханіки. Тому моделювання зуба в рамках механіки неоднорідної теорії пружності як багатшарової конструкції циліндричної форми можна вважати прийнятним з врахуванням того, що в механіці композитних матеріалів уже давно зафіксовано факт неусувної залежності властивостей такої конструкції від радіуса.

Предмети циліндричної форми часто зустрічаються в природі, техніці і навіть у побуті. Класичним прикладом з природи є стовбур дерева чи кістка; таким же прикладом з техніки може бути круглий болт (прогонич); у побуті людина постійно використовує щось кругле і довге – від звичайної палиці, олівця, водопровідної труби до качалки для тіста. У більшості випадків всі ці предмети піддаються з причини їхньої функціональної приналежності різноманітним механічним навантаженням – вони розтягуються, стискаються, згинаються, скручуються, зрізаються і т.п. Тому механіка матеріалів і конструкцій завжди приділяла і приділяє зараз велику увагу тілам циліндричної форми. Опису їх механічної поведінки присвячено тисячі наукових публікацій. Як правило, тіла у вигляді суцільних чи порожнистих циліндрів вважаються однорідними за їх механічними властивостями. Однак нерідко реальні спостереження показують, що циліндричні предмети суттєво неоднорідні [3, 4, 28]. Частіше за все, така неоднорідність полягає у зміні густини та інших механічних властивостей по радіусу. Тут знову доречно згадати бамбук чи кістку – вони мають більшу густину і є більш міцними на зовнішній поверхні, а при віддаленні від неї углиб зменшуються як густина, так і такі механічні властивості як модулі розтягу і зсуву. Не тільки природні матеріали неоднорідні, виявилось технологічно доцільним штучно вводити неоднорідність у матеріали. Недавно сформульована і перебуваюча в активному розвитку теорія функціонально східчастих матеріалів (ФСМ) концентрує увагу на штучно створених неоднорідних матеріалах і є головним споживачем результатів з аналізу неоднорідних матеріалів.

*Примітка 1.* В успішності та актуальності теорії ФСМ можна пересвідчитись з приведених у списку літератури знакових публікацій: перш за все, ряду перших робіт [19 – 21, 27, 31], огляду в кращому світовому реферативному журналі [5], двох змістовних монографій [26, 30], декількох характерних статей останніх років [10, 22, 23, 29].

Якщо механіка однорідних тіл може умовно вважатися цілком сформованою наукою, то механіка неоднорідних тіл характерна багатьма недостатньо дослідженими фрагментами. Особливо це відноситься до тієї частини механіки неоднорідних тіл, яку називають аналітичною і в якій розвиваються строгі математичні моделі, які описуються диференціальними чи інтегральними рівняннями (до яких далі застосовуються аналітичні методи знаходження розв'язку). Саме один зі згаданих вище фрагментів досліджується в даній роботі як розвиток результатів публікацій [4, 12 – 18, 28].

З точки зору загальної теорії матеріалів, вона присвячена аналізу циліндричного тіла з застосуванням осесиметричної теорії неоднорідної ізотропної і трансверсально-ізотропної пружності для того типу неоднорідності, коли механічні властивості пружного середовища змінюються по радіусу [12 – 18].

### **1. Основні рівняння статички пружного циліндричного тіла.**

Розглянемо випадок функціональної залежності пружних параметрів від координати  $r$ , коли пружні постійні Ляме  $\lambda$ ,  $\mu$  перетворюються в функції

$$\lambda(r) = \lambda_0 l(r); \mu(r) = \mu_0 m(r) \left( \lambda_0, \mu_0 = \text{const}; \nu_0 = \frac{\lambda_0}{2(\lambda_0 + \mu_0)} \right), \quad (1)$$

які диференційовані принаймні два рази.

Осесиметричний стан в кругових циліндричних координатах  $(r, \vartheta, z)$  описується для випадку, коли віссю симетрії є вісь  $z$  і координата  $\vartheta$  відсутня. Тоді [3, 6, 7, 24, 25] вектор зміщень має лише дві ненульові компоненти  $u = (u_r, u_\vartheta = 0, u_z)$ ; тензор деформацій характеризується чотирма ненульовими компонентами

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}; \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = (u_r/r); \quad \varepsilon_{zz} = u_{z,z}; \quad \varepsilon_{rz} = (1/2)(u_{r,z} + u_{z,r}); \quad \varepsilon_{r\vartheta} = 0; \quad \varepsilon_{\vartheta z} = 0;$$

вираз для дилатації теж спрощується

$$e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz} = u_{r,r} + u_{z,z} + (u_r/r) = (1/r)(ru_r)_{,r} + u_{z,z};$$

лінійний тензор напружень має чотири ненульові компоненти

$$\sigma = (\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\vartheta} = 0, \sigma_{\vartheta z} = 0).$$

Конститутивні рівняння мають вигляд

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{rr}; \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{\vartheta\vartheta}; \quad \sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{zz}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}; \quad (2)$$

система рівнянь рівноваги (без об'ємних сил) включає тільки два рівняння

$$\sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + (1/r)(\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (3)$$

Система рівнянь Ляме теж складається з двох рівнянь

$$\mu \left[ \Delta - (1/r^2) \right] u_r + (\lambda + \mu) e_{,r} = 0; \quad \mu \Delta u_z + (\lambda + \mu) e_{,z} = 0; \quad \Delta e = e_{,rr} + (1/r) e_{,r} + e_{,zz}, \quad (4)$$

ці ж рівняння у записі без дилатації є такими:

$$(\lambda + 2\mu) \left[ \Delta - (1/r^2) \right] u_r - (\lambda + \mu) u_{r,zz} + (\lambda + \mu) u_{z,rz} = 0; \quad (5)$$

$$\mu \Delta u_z + (\lambda + \mu) u_{z,zz} + (\lambda + \mu) \left[ u_{r,r} + (u_r/r) \right]_{,z} = 0. \quad (6)$$

Перша принципова відмінність від задачі однорідної теорії виявляється в конститутивних рівняннях

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z) &= \lambda(r) e(r, z) + 2\mu(r) \varepsilon_{rr}(r, z); \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}(r, z) &= \lambda(r) e(r, z) + 2\mu(r) \varepsilon_{\vartheta\vartheta}(r, z); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = \lambda(r) e(r, z) + 2\mu(r) \varepsilon_{zz}(r, z); \quad \sigma_{rz}(r, z) = 2\mu(r) \varepsilon_{rz}(r, z).$$

Формули (7) свідчать про те, що в кінематичній частині опису механічного стану (зміщення і деформації) однорідна і неоднорідна теорії пружності формально ідентичні. Відмінність з'являється в кінетичній частині (напруження). Іншими словами, неоднорідність фізичних властивостей як функціональна залежність густини і пружних характеристик має наслідком перш за все перерозподіл поля напружень у відповідності з законами неоднорідності властивостей. Звичайно, якщо розв'язується якась крайова задача, тобто, враховуються крайові умови, то всі механічні поля, як правило, стають неоднорідними і змінюються від точки до точки.

## 2. Найпростіша задача, яка моделює поздовжній стиск зуба.

Розглянемо класичну в однорідній теорії пружності задачу про універсальну деформацію одноосного розтягу – стиску стосовно неоднорідної теорії пружності для випадку залежності параметрів пружності від радіуса. Вважається, що вказана деформація створюється в довгому прямолінійному стержні кругового поперечного перетину з віссю в напрямку осі  $Oz$  (в циліндричній системі координат  $Or\theta z$ ). При цьому припускаємо, що бічна поверхня циліндра вільна від напружень. Якщо стержень розтягується чи стискається в осьовому напрямку, то в стержні формується однорідний осесиметричний напружено-деформований стан у всіх поперечних перетинах за винятком областей біля кінців стержня. Він характеризується тільки одним ненульовим компонентом  $\sigma_{zz}$  тензора напружень і двома ненульовими компонентами  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  тензора деформації (або двома головними розтягами  $\lambda_r$ ,  $\lambda_z$ ). Як і у випадку однорідної теорії пружності, зміщення, деформації, напруження в стержні не залежать від осьової координати. Однак вони змінюються по радіусу у всіх перетинах стержня ідентично. Аналіз цієї задачі дозволяє ввести нові пружні параметри – функції, які відповідають модулю Юнга і коефіцієнту Пуассона в однорідній теорії пружності. Первинними тут є конститутивні співвідношення (7). Вони для універсальної деформації одноосного розтягу – стиску (коли стержень піддається фіксованій за величиною і постійною за осьовою координатою поздовжньою деформацією, тобто, поздовжнє зміщення змінюється на деяку малу у порівнянні з довжиною і діаметром стержня величину, що створює в стержні ідентичне по довжині стержня і таке, що однаково змінюється по радіусу в довільному перетині стержня напруження  $\sigma_{zz}^o$ ) спрощуються до вигляду

$$0 = \lambda(r)e^o(r) + 2\mu(r)\varepsilon_{rr}^o(r); \quad \sigma_{zz}^o = \lambda(r)e^o(r) + 2\mu(r)\varepsilon_{zz}^o(r); \quad e^o = \varepsilon_{rr}^o + \varepsilon_{zz}^o. \quad (8)$$

Додавання перших двох рівнянь з (8) дає формулу для знаходження дилатації

$$\sigma_{zz}^o(r) = [3\lambda(r) + 2\mu(r)]e^o(r) \rightarrow e^o(r) = \sigma_{zz}^o(r) / [3\lambda(r) + 2\mu(r)]. \quad (9)$$

Підстановка дилатації (9) у друге рівняння (8) дає співвідношення між осьовими напруженням і деформацією

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^o(r) &= [\lambda(r)/(3\lambda(r) + 2\mu(r))] \sigma_{zz}^o(r) + 2\mu(r)\varepsilon_{zz}^o \rightarrow \\ &\rightarrow \sigma_{zz}^o = [\mu(r)(3\lambda(r) + 2\mu(r))/(\lambda(r) + \mu(r))] \varepsilon_{zz}^o \end{aligned} \quad (10)$$

Формула (10) являє собою елементарний закон  $\sigma_{zz}^o(r) = E(r)\varepsilon_{zz}^o$  зв'язку між стискующим напруженням і поздовжньою деформацією стержня, в якому використано змінний (залежний від радіуса) модуль Юнга  $E$ . При цьому формула (10) дає вираз змінного модуля Юнга через змінні модулі Ляме

$$E(r) = \frac{\mu(r)[3\lambda(r) + 2\mu(r)]}{\lambda(r) + \mu(r)}. \quad (11)$$

Підстановка виразу для дилатації в перше рівняння (8) дає формулу

$$-\varepsilon_{zz} = \frac{\lambda(r)}{2(\lambda(r) + \mu(r))} \varepsilon_{rr}(r), \quad (12)$$

яка виражає стосовно неоднорідних матеріалів класичний закон Пуассона про зв'язок поперечного стиску перетину стержня при поздовжньому одноосному стиску. Формула (12) демонструє відзначений вище факт, що граничні умови вводять закони неоднорідності в кінематичні параметри. Вона дозволяє ввести змінний коефіцієнт Пуассона

$$\nu(r) = -\frac{\varepsilon_{rr}(r)}{\varepsilon_{zz}(r)} = \frac{\lambda(r)}{2(\lambda(r) + \mu(r))}. \quad (13)$$

### 3. Випадок функціонально градієнтної моделі неоднорідної теорії пружності.

Розглянемо випадок функціональної залежності пружних параметрів від координати  $r$ , коли пружні постійні Ляме  $\lambda, \mu$  перетворюються у функції

$$\lambda(r) = \lambda_0 l(r); \quad \mu(r) = \mu_0 m(r) \quad (\lambda_0, \mu_0 = \text{const}), \quad (14)$$

які диференційовані принаймні два рази. Тоді формули (11) і (13) (вирази для модуля Юнга і коефіцієнта Пуассона) приймають вигляд

$$E(r) = \frac{\mu_0 m(r) [3\lambda_0 l(r) + 2\mu_0 m(r)]}{\lambda_0 l(r) + \mu_0 m(r)}; \quad (15)$$

$$\nu(r) = \frac{\lambda_0 l(r)}{2[\lambda_0 l(r) + \mu_0 m(r)]}. \quad (16)$$

З виразів (15) і (16) випливає, що всі чотири пружні константи (змінні пружні параметри неоднорідної ізотропної теорії пружності) змінюються в залежності від радіуса за відмінними між собою законами. Якщо модулі Ляме змінюються за однаковим законом, то за цим же законом змінюється модуль Юнга, а коефіцієнт Пуассона є постійним. Слід сказати, що припущення про постійність коефіцієнта Пуассона досить часто використовується в неоднорідній теорії пружності.

Прийемо припущення про також часто використовувану в неоднорідній теорії пружності експоненціальну залежність модулів Ляме

$$\lambda(r) = \lambda_0 e^{-lr}; \quad \mu(r) = \mu_0 e^{-mr} \quad (l, m = \text{const}). \quad (17)$$

Тоді формули (15), (16) спрощуються до вигляду

$$E(r) = \frac{\mu_0 (3\lambda_0 + 2\mu_0 e^{-(m-l)r})}{\lambda_0 + \mu_0 e^{-(m-l)r}} e^{-mr}; \quad (18)$$

$$\nu(r) = \frac{\lambda_0}{2(\lambda_0 + \mu_0 e^{-(m-l)r})}. \quad (19)$$

З аналізу останніх двох формул випливає, що відмінність у залежності від радіуса у всіх основних пружних параметрах залишається і для експоненціальної залежності. Однак при малій відмінності параметрів (при мало відмінних між собою законах зменшення параметрів Ляме по радіусу) така ж мала відмінність  $e$  буде і для модуля Юнга, а коефіцієнт Пуассона буде майже постійним.

Також корисно розглянути деякі особливості деформування неоднорідного по товщині стержня (при експоненціальній залежності параметрів пружності стержня від радіуса) при його одноосному стиску. Припустимо, що параметри пружності зменшуються суттєво при відході від зовнішньої поверхні стержня  $r = R^o$ . Це відображається у формулах (17) таким чином:

$$\lambda(r) = \lambda_0 e^{-l(R^o - r)}; \quad \mu(r) = \mu_0 e^{-m(R^o - r)} \quad (l, m = \text{const}). \quad (20)$$

Тоді параметри  $l, m$  характеризують неоднорідність як відмінність між значенням параметра на зовнішній поверхні  $\lambda^o, \mu^o$  і в центрі стержня

$$\lambda(0) = \lambda_0 e^{-lR^0}; \quad \mu(0) = \mu_0 e^{-mR^0}. \quad (21)$$

Напруження в фіксованому перетині, яке стискає стержень, залежить суттєво від радіуса

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{\mu_0 (3\lambda_0 + 2\mu_0 e^{-(m-l)r})}{\lambda_0 + \mu_0 e^{-(m-l)r}} e^{-mr} \varepsilon_{zz}(r) \quad (22)$$

з причини суттєвої залежності модуля Юнга від радіуса.

Збільшення радіуса поперечного перетину стержня (розбухання стержня) не таке суттєве і відрізняється від постійного значення, яке відповідає однорідному матеріалу

$$\nu(r) = -\frac{\varepsilon_{rr}(r)}{\varepsilon_{zz}(r)} = \frac{\lambda_0}{2(\lambda_0 + \mu_0 e^{-(m-l)r})}. \quad (23)$$

Відзначені особливості деформування прямого круглого неоднорідного за механічними властивостями стержня при одновісному стиску можуть бути орієнтиром для більш адекватних моделей деформування однокореневого зуба як складної конструкції, яка неоднорідна щодо властивостей від поверхні зуба до його середини.

#### 4. Числове моделювання універсальної деформації стиску стержня стосовно однокореневого зуба.

Виберемо довжину  $L$  і діаметр  $2R^0$  стержня:  $L = 30$  мм,  $2R^0 = 6$  мм. Також припустимо, що модулі Ляме верхнього шару зуба (емалі) і найближчого до середини шару зуба відрізняються приблизно в 7 – 10 разів [1,2]. Ще слід задати відмінність в експоненціальному описі змінних модулів Ляме в 10% –  $l = 0,9$  м і значення цих модулів для емалі  $\mu^0, \lambda^0$ .

Для наближеного визначення модуля Юнга  $E$  емалі використаємо експериментальні криві, які показані в [2] у вигляді рис. 4. Досить наближений перерахунок кривої  $l$  для залежності напружень від деформації, яка відповідає емалі, показує, що лінійний закон  $\sigma \sim \varepsilon$  зберігається до значення напруження  $\sigma \approx 78$  МПа, якому відповідає значення деформації  $\varepsilon \approx 6 \cdot 10^{-4}$ . Тоді модуль Юнга дорівнює  $E \approx 13 \cdot 10^{10}$  Па, що приблизно відповідає модулю Юнга вольфраму. При середньостатистичних значеннях коефіцієнта Пуассона для всіх шарів-компонентів, що утворюють зуб,  $\nu = 0,3$ , можна знайти необхідні модулі Ляме  $\mu^0 = 5 \cdot 10^{10}$ ,  $\lambda^0 = 7,5 \cdot 10^{10}$ .

Звернемося тепер до формули (20) і знайдемо відповідні значення параметрів  $l, m$  при умові, що  $R^0 = 0,003$  м і падіння модулів на відстані від поверхні циліндра до його центру складає 7,4 разів

$$\lambda(r) = \lambda_0 e^{-l(0,003-r)}; \quad \mu(r) = \mu_0 e^{-m(0,003-r)}.$$

Тоді повинні виконуватися рівності  $e^{-0,003l} = 0,1$ ;  $e^{-0,003m} = 0,1$ , звідки випливає, що

$$\lambda(r) = \lambda_0 e^{-741(0,003-r)}; \quad \mu(r) = \mu_0 e^{-667(0,003-r)}; \quad (24)$$

$$E(r) = \frac{\mu_0 (3\lambda_0 + 2\mu_0 e^{74(0,003-r)})}{\lambda_0 + \mu_0 e^{74(0,003-r)}} e^{-667(0,003-r)}; \quad (25)$$

$$\nu(r) = \frac{\lambda_0}{2(\lambda_0 + \mu_0 e^{74(0,003-r)})}. \quad (26)$$

Формули (25), (26) дозволяють визначити падіння двох важливих в інженерних розрахунках параметрів: модуль Юнга падає в 7,55 разів (від значення  $E \approx 13 \cdot 10^{10}$  до значення  $E \approx 1,72 \cdot 10^{10}$ ) і коефіцієнт Пуассона падає в 0,09 разів (від значення  $\nu \approx 0,3$  до значення  $\nu \approx 0,273$ ). Таким чином, при стиску розширення циліндра в поперечному напрямку досить незначне по товщині циліндра, тоді як зміна значення модуля Юнга в радіальному напрямку достатньо значна.

### 5. Більш загальні моделі неоднорідної теорії пружності в задачі про розтяг (стиск) циліндра в рамках теорії функціонально східчастих матеріалів.

Розглянемо круговий стержень у просторовій постановці при певних обмеженнях, коли стержень завантажується на кінцях силами, які можна описати як дію поздовжньої сили, є вільним від навантаження на бічній поверхні. При цьому відійдемо від припущення про ізотропію властивостей стержня і припустимо, що стержень трансверсально-ізотропний з віссю анізотропії, що збігається з віссю стержня (а також з віссю  $Oz$  в циліндричній системі координат  $Or\theta z$ ). Додатково припустимо, що характеристики матеріалу стержня змінюються тільки в площині поперечного перетину стержня (площині ізотропії) і не змінюються по довжині стержня (залежать від радіальної координати, а не від вертикальної).

При прийнятті припущення загальна система рівнянь неоднорідної лінійної теорії пружності має вигляд [3, 18]:

співвідношення Коші

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}(r, z) &= u_{r,r}(r, z); \quad \varepsilon_{\theta\theta}(r, z) = [u_r(r, z)/r]; \quad \varepsilon_{zz}(r, z) = u_{z,z}(r, z); \\ \varepsilon_{rz}(r, z) &= (1/2)(u_{r,z}(r, z) + u_{z,r}(r, z)); \quad \varepsilon_{r\theta}(r, z) = 0; \quad \varepsilon_{\theta z}(r, z) = 0; \\ e(r, z) &= \varepsilon_{rr}(r, z) + \varepsilon_{\theta\theta}(r, z) + \varepsilon_{zz}(r, z) = \\ &= u_{r,r}(r, z) + u_{z,z}(r, z) + (u_r(r, z)/r) = (1/r)[ru_r(r, z)]_r + u_{z,z}(r, z). \end{aligned} \quad (27)$$

Конститутивні рівняння для трансверсально-ізотропного матеріалу (при умові залежності пружних параметрів тільки від радіуса, що звичайно відповідає припущенню про осесиметрію задачі).

*Примітка 2.* Тут слід відзначити, що незважаючи на відоме стандартне представлення п'яти незалежних пружних параметрів  $C_{IK}(r)$  трансверсально-ізотропного матеріалу у вигляді матриці

$$C_{IK} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2)(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix},$$

ці рівняння найчастіше записують не як залежності напружень від деформацій, а навпаки

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z) &= A_{rr}(r)\sigma_{rr}(r, z) + A_{r\theta}(r)\sigma_{\theta\theta}(r, z) + A_{rz}(r)\sigma_{zz}(r, z); \\ \sigma_{\theta\theta}(r, z) &= A_{\theta r}(r)\sigma_{r\theta}(r, z) + A_{\theta\theta}(r)\sigma_{\theta\theta}(r, z) + A_{\theta z}(r)\sigma_{zz}(r, z); \\ \sigma_{zz}(r, z) &= A_{zr}(r)\sigma_{rz}(r, z) + A_{z\theta}(r)\sigma_{\theta z}(r, z) + A_{zz}(r)\sigma_{zz}(r, z); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r,\vartheta}(r,z) &= G_{r,\vartheta}(r)\sigma_{r,\vartheta}(r,z); \quad \varepsilon_{\vartheta,z}(r,z) = G_{\vartheta,z}(r)\sigma_{\vartheta,z}(r,z); \\ \varepsilon_{rz}(r,z) &= G_{rz}(r)\sigma_{rz}(r,z).\end{aligned}\quad (29)$$

З дев'яти механічних параметрів  $A_{rr}(r), \dots, G_{rz}(r)$  не всі незалежні між собою, тільки п'ять з них незалежні. Вони повинні визначатися з експериментів і мають відповідне трактування. У записі через так звані технічні пружні параметри рівняння (28), (29) мають вигляд

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}(r,z) &= \frac{1}{E(r)}\sigma_{rr}(r,z) - \frac{\nu(r)}{E(r)}\sigma_{\vartheta\vartheta}(r,z) + \frac{\nu'(r)}{E'(r)}\sigma_{zz}(r,z); \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu(r)}{E(r)}\sigma_{11} + \frac{1}{E(r)}\sigma_{22} - \frac{\nu'(r)}{E'(r)}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu'}{E'}\sigma_{11} - \frac{\nu'}{E'}\sigma_{22} + \frac{1}{E'}\sigma_{33};\end{aligned}\quad (30)$$

$$\varepsilon_{r,\vartheta}(r,z) = \frac{1}{G'(r)}\sigma_{r,\vartheta}(r,z); \quad \varepsilon_{zr}(r,z) = \frac{1}{G(r)}\sigma_{zr}(r,z); \quad \varepsilon_{\vartheta,z}(r,z) = \frac{1}{G(r)}\sigma_{\vartheta,z}(r,z).\quad (31)$$

Тут  $E$  і  $G$  є модулями Юнга і зсуву для будь-якого напрямку в площині ізотропії;  $\nu$  є коефіцієнтом Пуассона, що характеризує зменшення поперечного перетину стержня в площині ізотропії при розтязі в тій же площині;  $E'$  і  $G'$  є модулями Юнга і зсуву для напрямку, що перпендикулярний до площини ізотропії;  $\nu'$  є коефіцієнтом Пуассона, який характеризує зменшення поперечного перетину стержня в площині ізотропії при розтязі в напрямку, перпендикулярному до площини ізотропії;  $\nu''$  – коефіцієнтом Пуассона, який характеризує зменшення поперечного перетину стержня в напрямку, перпендикулярному до площини ізотропії при розтязі в напрямку, перпендикулярному до площини ізотропії і при цьому виконуються дві тотожності  $\nu'/E' = \nu''/E$ ,  $E = 2G(1+\nu)$ .

Таким чином, трансверсально-ізотропний матеріал характеризується п'ятьма незалежними технічними пружними параметрами  $E, G, E', G', \nu'$ .

Слід звернути увагу на те, що технічні пружні параметри звичайно використовуються при вивченні механіки матеріалів. Класичні пружні параметри зручніші при вивченні задач теорії пружності.

Відомі формули зв'язку між класичними і технічними параметрами

$$\begin{aligned}c_{1111} = C_{11} &= \frac{1 - (\nu')^2 (E/E')}{1 - \nu^2 + (1 + 2\nu)(\nu')^2 (E/E')} E; \quad c_{1122} = C_{12} = \frac{\nu - (\nu')^2 (E/E')}{1 - \nu^2 + (1 + 2\nu)(\nu')^2 (E/E')} E; \\ c_{1133} = C_{13} &= \frac{\nu'(1 - \nu)}{1 - \nu^2 + (1 + 2\nu)(\nu')^2 (E/E')} E; \\ c_{3333} = C_{33} &= \frac{1 - (\nu')^2}{1 - \nu^2 + (1 + 2\nu)(\nu')^2 (E/E')} E';\end{aligned}\quad (32)$$

$$c_{1111} - c_{1122} = C_{44} = \frac{1 - \nu}{1 - \nu^2 + (1 + 2\nu)(\nu')^2 (E/E')} E = (1/2)G; \quad c_{2323} = c_{3131} = (1/2)G'.$$

Запишемо конститутивні рівняння неоднорідної теорії пружності у вигляді, де присутні всі незалежні пружні параметри  $C_{11}(r), C_{12}(r), C_{13}(r), C_{33}(r), C_{44}(r)$



$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, z) &= C_{11}(r)\varepsilon_{rr}(r, z) + C_{12}(r)\varepsilon_{\theta\theta}(r, z) + C_{13}(r)\varepsilon_{zz}(r, z); \\
\sigma_{\theta\theta}(r, z) &= C_{12}(r)\varepsilon_{rr}(r, z) + C_{11}(r)\varepsilon_{\theta\theta}(r, z) + C_{13}(r)\varepsilon_{zz}(r, z); \\
\sigma_{zz}(r, z) &= C_{13}(r)\varepsilon_{rr}(r, z) + C_{13}(r)\varepsilon_{\theta\theta}(r, z) + C_{33}(r)\varepsilon_{zz}(r, z); \\
\sigma_{rz}(r, z) &= 2C_{44}(r)\varepsilon_{rz}(r, z).
\end{aligned} \tag{33}$$

Замикає повну систему рівнянь осесиметричної неоднорідної теорії пружності система рівнянь руху (3).

Далі розглядатимуться два шляхи розв'язування – найчастіше використовуваний в теорії пружності, коли повну систему рівнянь записано відносно зміщень (система рівнянь типу Ляме), і відомий в теорії пружності, коли повна система рівнянь записана на основі рівняння Бельтрамі – Мічелла відносно напружень.

5.1. Шлях розв'язування, який оснований на аналізі рівнянь у зміщеннях (рівнянь типу Ляме). Для отримання системи рівнянь типу Ляме слід підставити співвідношення Коші (27) і конститутивні рівняння (28) – (31) у рівняння рівноваги (6). Ця процедура переходу від рівнянь рівноваги (3), де невідомими є напруження, до системи рівнянь типу Ляме, де невідомими є зміщення, ускладнюється з причини необхідності диференціювання залежних від радіуса пружних параметрів-функцій

$$c_{11}(r), c_{12}(r), c_{13}(r), c_{33}(r), c_{44}(r).$$

Вказана система складається з двох рівнянь

$$\begin{aligned}
c_{11}(r)(u_{r,rr} + (1/r)u_{r,r} - (1/r^2)u_r) + \underline{c_{11,r}(r)u_{r,r}} + \underline{c_{12,r}(r)(1/r)} + c_{44}(r)u_{r,zz} + \\
+ (c_{13}(r) + c_{44}(r))u_{z,rz} + \underline{c_{13,r}(r)u_{z,z}} = 0;
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
(c_{13}(r) + c_{44}(r))(u_{r,rz} + (1/r)u_{r,z}) + \underline{c_{44,r}(r)u_{r,z}} + \\
+ c_{44}(r)\Delta u_z + (c_{33}(r) - c_{44}(r))u_{z,zz} + \underline{c_{44,r}(r)u_{z,r}} = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

П'ять доданків, що підкреслено в рівняннях (34), (35), є тими новими доданками в порівнянні з рівняннями Ляме однорідної теорії пружності, які характеризують саме особливості неоднорідної теорії пружності. Вони містять похідні від пружних параметрів, щодо яких припущено, що вони залежать від радіуса.

Введемо функцію (потенціал) Лява і цим зведемо розв'язування рівнянь (34), (35) до розв'язування нового рівняння відносно функції Лява. Для цього необхідно повторити класичний шлях від системи рівнянь (34), (35) щодо двох невідомих функцій  $u_r(r, z)$ ,  $u_z(r, z)$  до аналізу функції Лява. На першому кроці замість функцій  $u_r$ ,  $u_z$  слід ввести дві нові функції

$$u_r(r, z) = R_r(r, z); \quad u_z(r, z) = Z(r, z). \tag{36}$$

Далі необхідно підставити представлення (36) у систему (34), (35), в результаті чого отримуються два рівняння

$$\begin{aligned}
\left\{ c_{11}(r)\Delta R_r + \underline{c'_{11}(r)R_{,rr}} + \underline{c'_{12}(r)(1/r)R_{,r}} - [c_{11}(r) - c_{44}(r)]R_{,rzz} \right\} + \\
+ (c_{13}(r) + c_{44}(r))Z_{,rz} + \underline{c'_{13}(r)Z_{,z}} = 0;
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
(c_{13}(r) + c_{44}(r))(\Delta R - R_{,zz}) + \underline{c'_{44}(r)R_{,rz}} + \\
+ c_{44}(r)\Delta Z + (c_{33}(r) - c_{44}(r))Z_{,zz} + \underline{c'_{44}(r)Z_{,r}} = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

*Примітка 3.* Система (37), (38) відповідає системі однорідної теорії: з першої випливає друга при умові, що функції  $c_{11}(z)$ ,  $c_{12}(z)$ ,  $c_{13}(z)$ ,  $c_{44}(z)$  трансформуються в постійні величини (підкреслені доданки дорівнюють нулеві).

Введемо функцію типу Лява  $\chi(r, z)$  стандартним шляхом: рівняння (37) задовольняється тотожно введенням функції Лява

$$R = -[c_{13}(r) + c_{44}(r)]\chi_{,rz} - c'_{13}(r)\chi_{,z}; \quad (39)$$

$$Z = c_{11}(r)\Delta\chi_{,r} + c'_{11}(r)\chi_{,rr} + c'_{12}(r)(1/r)\chi_{,r} - (c_{11}(r) - c_{44}(r))\chi_{,rz};$$

рівняння (38) трансформується в рівняння для знаходження функції Лява

$$\begin{aligned} & -\left\{ [c_{44}(z) + c_{13}(z)](\Delta\chi_{,z} - \chi_{,zzz}) + c'_{13}(z)(\Delta\chi - \chi_{,zz}) \right\} \times \\ & \times \left[ (c_{13}(z) + c_{44}(z))\chi_{,z} + c_{44}(z)\chi \right] + \\ & + \left\{ c_{44}(z)(\Delta\chi - \chi_{,zz})\Delta + c_{33}(z)\chi_{,zz} + c'_{33}(z)\chi_{,z} \right\} \times \\ & \times \left\{ c_{11}(z)(\Delta\chi - \chi_{,zz}) + c_{44}(z)\chi_{,zz} + c_{44}(z)\chi_{,z} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Після трудомістких перетворень рівнянню (40) можна надати вигляд, у якому присутні нові доданки у порівнянні з аналогічним рівнянням для ізотропного випадку [3]

$$\begin{aligned} & \Delta\Delta\chi_r + k_{5rz}(r)\chi_{,rzzz} + k_{\Delta 3rz}\Delta\chi_{,rzz} + k_{4rz}(r)\chi_{,rzz} + k_{\Delta\Delta}(r)\Delta\Delta\chi + k_{\Delta r}(r)\Delta\chi_{,rr} + \\ & + k_{3rz}(r)\chi_{,rzz} + k_{\Delta}(r)\Delta\chi + k_{2z}(r)\chi_{,zz} + k_{2r}(r)\chi_{,rr} + k_{1r}(r)\chi_{,r} = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

де прийнято позначення

$$\begin{aligned} k_{5rz} &= -\frac{[c_{33}(r) - c_{44}(r)][c_{11}(r) - c_{44}(r)]}{c_{44}(r)c_{11}(r)}; \\ k_{\Delta 3rz} &= -\frac{2c_{44}(r)[c_{11}(r) + c_{13}(r)] + c_{11}(r)c_{33}(r) - [c_{13}(r)]^2}{c_{44}(r)c_{11}(r)}; \\ k_{4rz}(r) &= -2\frac{\lambda'(r) + \mu'(r)}{\lambda(r) + 2\mu(r)}; \quad k_{\Delta\Delta}(r) = \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r) + 2\mu(r)}; \\ k_{\Delta r}(r) &= \frac{\lambda(r)\mu'(r) + 2\lambda(r)\lambda'(r) + 3\mu(r)\lambda'(r) + 8\mu(r)\mu'(r)}{\mu(r)[\lambda(r) + 2\mu(r)]}; \\ k_{3rz}(r) &= -\frac{3\mu(\lambda'' - \mu'') + 4\lambda'\mu' + \mu(\lambda' + \mu')\frac{1}{r} + (\mu + \lambda)(\lambda + 2\mu)\frac{1}{r^2}}{\mu(r)[\lambda(r) + 2\mu(r)]}; \\ k_{\Delta}(r) &= \frac{\mu(r)\lambda'''(r) + \mu'(r)\lambda''(r) + \frac{1}{r}\mu(r)\lambda''(r)}{\mu(r)[\lambda(r) + 2\mu(r)]}; \end{aligned} \quad (42)$$

$$k_{2z}(r) = -\frac{\mu(r)\lambda'''(r) + \frac{1}{r}\mu(r)\lambda''(r) - 2\mu'(r)\lambda'(r)}{\mu(r)[\lambda(r) + 2\mu(r)]};$$

$$k_{2r}(r) = 2\frac{\mu'\mu'' + (\lambda\mu' + 2\mu\lambda' + 4\mu\mu') + \mu\mu''' + \frac{1}{r}\mu\mu''}{\mu(r)[\lambda(r) + 2\mu(r)]};$$

$$k_{1r}(r) = -\frac{\mu(3\lambda'' + 2\mu'')\frac{1}{r^2} + \mu'(\lambda' + 2\mu')\frac{1}{r^2} + 3\mu(\lambda' + 2\mu')\frac{1}{r^3}}{\mu(r)[\lambda(r) + 2\mu(r)]}.$$

*Примітка 4.* Тільки два перші з десяти коефіцієнтів (42) ( $k_{5rz}, k_{\Delta 3rz}$ ) не залежать від похідних пружних параметрів. З восьми коефіцієнтів, які залишилися, тільки шостий коефіцієнт  $k_{3rz}(r)$  не дорівнює нулеві при переході до однорідної теорії пружності. Ці три коефіцієнти визначають ту частину рівняння (42), яке отримується в однорідній теорії пружності. Решта сім коефіцієнтів включають лінійно лише похідні і дорівнюють нулеві в однорідній теорії пружності. При цьому третій, четвертий і п'ятий коефіцієнти (42) ( $k_{4rz}(r), k_{\Delta\Delta}(r), k_{\Delta r}(r)$ ) включають тільки перші похідні; десятий ( $k_{1r}(r)$ ) включає перші і другі похідні; сьомий, восьмий і дев'ятий ( $k_{\Delta}(r), k_{2z}(r), k_{2r}(r)$ ) включають першу, другу і третю похідні.

Рівняння (41) містить лапласіан. Іноді при застосуванні процедури розділення змінних зручно розділити лапласіан  $\Delta u = u_{,rr} + (1/r)u_{,r} + u_{,zz} = \Delta_r u + u_{,zz}$ . Тоді оператори, які включають лапласіан можуть бути записані таким чином:

$$\Delta \Delta u = \Delta_r \Delta_r u + 2\Delta_r u_{,zz} + u_{,zzzz}; \quad \Delta u_{,rr} = \Delta_r u_{,rr} + u_{,rrzz}; \quad \Delta u_{,r} = \Delta_r u_{,r} + u_{,rzz}$$

і рівняння (41) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \Delta_r \Delta_r \chi_{,r} + 2\Delta_r \chi_{,rzz} + \chi_{,rzzzz} + (k_{4rz}(r) + k_{\Delta 2r}(r)) \chi_{,rrzz} + \\ & + k_{\Delta\Delta}(r) (\Delta_r \Delta_r \chi + 2\Delta_r \chi_{,zz} + \chi_{,zzzz}) + \\ & + k_{\Delta 2r}(r) \Delta_r \chi_{,rr} + k_{\Delta r} \Delta_r \chi_{,r} + (k_{3rz}(r) + k_{\Delta r}) \chi_{,rzz} + \\ & + k_{\Delta}(r) \Delta_r \chi + (k_{2z}(r) + k_{\Delta}(r)) \chi_{,zz} + k_{2r}(r) \chi_{,rr} + k_{1r}(r) \chi_{,r} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Рівняння (43) можна ще записати у вигляді трьох груп: перша містить тільки оператори по  $r$  (перший і другий рядки), друга – тільки оператори по  $z$  (третій рядок), третя – змішані оператори (четвертий рядок)

$$\begin{aligned} & \Delta_r \Delta_r \chi_{,r} + k_{\Delta\Delta}(r) \Delta_r \Delta_r \chi + k_{\Delta 2r}(r) \Delta_r \chi_{,rr} + k_{\Delta r} \Delta_r \chi_{,r} + \\ & + k_{\Delta}(r) \Delta_r \chi + k_{2r}(r) \chi_{,rr} + k_{1r}(r) \chi_{,r} + \\ & + k_{\Delta\Delta}(r) (2\Delta_r \chi_{,zz} + \chi_{,zzzz}) + (k_{2z}(r) + k_{\Delta}(r)) \chi_{,zz} + \\ & + 2\Delta_r \chi_{,rzz} + \chi_{,rzzzz} + (k_{4rz}(r) + k_{\Delta 2r}(r)) \chi_{,rrzz} + (k_{3rz}(r) + k_{\Delta r}(r)) \chi_{,rzz} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

*Примітка 5.* Наявне в рівняннях (41), (43), (44) ускладнення у порівнянні з відповідним рівнянням однорідної теорії пружності є характерним для неоднорідної теорії [3, 4, 18, 28].

Таким чином, розв'язування будь-якої задачі здійснюється декількома кроками. Спочатку знаходиться відповідний розв'язок рівняння (44) з конкретним виглядом потенціалу  $\chi(r, z)$ . Далі через знайдений потенціал за формулами (36) визначаються зміщення  $u_r(r, z), u_z(r, z)$ . Тоді за формулами (27) знаходяться компоненти тензора деформації  $\varepsilon_{rr}(r, z), \varepsilon_{\theta\theta}(r, z), \varepsilon_{zz}(r, z), \varepsilon_{rz}(r, z)$ . На останньому кроці за формулами (33) слід знайти напруження  $\sigma_{rr}(r, z), \sigma_{\theta\theta}(r, z), \sigma_{zz}(r, z), \sigma_{rz}(r, z)$ . При цьому треба пам'ятати, що конститутивні співвідношення (33) додатково включають конкретні залежності пружних параметрів від радіуса.

*5.2. Шлях розв'язування, який оснований на аналізі рівнянь в напруженнях.* В рамках вказаного в назві алгоритму при розв'язуванні задачі про рівновагу циліндричного стержня, яку поставлено на початку розділу 5, в однорідній теорії пружності вводять потенціал (функцію), через який представляють напруження. Аналогічну процедуру можна застосувати і у випадку неоднорідної теорії осесиметричної пружності щодо тензора напружень  $\sigma = (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{\theta z} = 0)$ . Особливість такого шляху для неоднорідної теорії пружності взагалі дуже корисна тим, що процедура введення потенціалу дещо інша.

Розглянемо далі задачу про рівновагу порожнистого  $r_0 < r < r_1$  циліндричного стержня скінченної довжини  $0 < z < Z_L$  під дією стискуючих стержень на торцях постійних сил  $P$ .

Ця задача має таку особливість, що для достатньо великих довжин стержня механічні поля в поперечних перетинах стержня є ідентичними і аналіз зводиться до плоскої осесиметричної задачі із залежністю всіх величин тільки від радіуса.

Рівняння рівноваги спрощуються і містять лише коефіцієнт Пуассона, який характеризує зсув у площині ізотропії

$$\Delta_r \sigma_{rr} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \hat{\sigma}_{,rr} = 0; \quad \Delta_r \sigma_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \left[ \frac{1}{r} \hat{\sigma}_{,r} \right] = 0; \quad (45)$$

$$\Delta_r \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \hat{\sigma}_{,zz} = 0.$$

Для розв'язування задачі існує класичний спосіб введення потенціалу [3, 6, 7, 24, 25]

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} F_{,r}; \quad \sigma_{\theta\theta} = F_{,rr}; \quad \sigma_{zz} = \frac{1}{\nu} (C - a(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})). \quad (46)$$

Потенціал  $\varphi(r) = F'(r)$  слід знаходити з рівняння Бельтрамі – Мічелла [3, 6, 7, 24, 25], яке у даному випадку трансформується у звичайне диференціальне неоднорідне рівняння зі змінними (залежними від радіуса) коефіцієнтами і залежною від радіуса правою частиною

$$\varphi_{,rr} + \left( \frac{1}{r} + \frac{B_{12}}{B_{13}} \right) \varphi_{,r} + \left( \frac{B_{12}}{B_{22}r} - \frac{B_{11}}{B_{22}r^2} \right) \varphi = \frac{C}{B_{22}r} \left[ \frac{A_{12}}{A_{33}} - \left( \frac{A_{23}}{A_{33}} r \right)_{,r} \right]. \quad (47)$$

Коефіцієнти вираховуються за формулами

$$\frac{A_{12}}{A_{33}} = \frac{E'(r)}{E(r)}; \quad \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{E'(r)}{E(r)} \nu'(r); \quad \frac{B_{12}}{B_{22}} = -\frac{\nu + \nu'^2}{1 - \nu'^2}; \quad \frac{B_{12}}{B_{13}} = \frac{B_{11}}{B_{22}} = 1. \quad (48)$$

З врахуванням позначень (48) рівняння (47) приймає вигляд

$$\varphi_{,rr} + \left(\frac{1}{r} + 1\right)\varphi_{,r} + \left(\frac{\nu(r) + (\nu'(r))^2}{1 - (\nu'(r))^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\varphi = \frac{C}{r} \left[ \frac{E'(r)}{E(r)} - \left(\frac{E'(r)}{E(r)} \nu'(r) r\right)_{,r} \right]. \quad (49)$$

З рівняння (49) видно, що воно включає лише чотири пружні параметри, а при постійності коефіцієнтів Пуассона розв'язок однорідного рівняння не залежить від змінних пружних параметрів. Однак у загальний розв'язок ці параметри будуть все одно входити з причини залежності правої частини рівняння від відношення модулів розтягу в площині ізотропії і у напрямку осі симетрії  $E'(r)/E(r)$ .

Розв'язок рівняння (49) можна знаходити у вигляді

$$\varphi(r) = K_1\varphi_1(r) + K_2\varphi_2(r) + K_0\varphi_0(r), \quad (50)$$

де  $\varphi_1(r)$ ,  $\varphi_2(r)$  – загальні розв'язки однорідного рівняння (49);  $\varphi_0(r)$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (49). Три довільні постійні  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  визначаються з трьох умов: граничної умови відсутності нормальних напружень на бічній поверхні циліндра

$$\sigma_{rr}(r_0) = 0 \quad (51)$$

і інтегральної умови на торцях циліндра

$$\int_{r_0}^{r_1} \sigma_{zz}(r) r dr = (1/2\pi) P. \quad (52)$$

Розглянемо далі більш простий варіант ізотропних властивостей матеріалу. Тоді рівняння (49) приймає вигляд

$$\varphi_{,rr} + \frac{1+r}{r}\varphi_{,r} + \left(\frac{\nu(r)}{1-\nu(r)} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\varphi = \frac{K_0}{r} \left[ 1 - (\nu(r)r)_{,r} \right]. \quad (53)$$

Якщо припустити, що коефіцієнт Пуассона є постійним, то рівняння (53) з неоднорідного перетворюється в однорідне, оскільки  $K_0/r \left[ 1 - (\nu r)_{,r} \right] = 0$

$$r^2\varphi_{,rr} + (r^2 + r)\varphi_{,r} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} r - 1\right)\varphi = 0. \quad (54)$$

Рівняння (54) відноситься до рівнянь типу класичного рівняння Бесселя і його розв'язок є таким, що при підстановці в (46) тільки напруження  $\sigma_{zz}(r)$  відмінне від нуля. Крім того, з граничних умов випливає рівність  $K_1 = K_2 = 0$ .

Розглянемо далі варіант трансверсальної ізотропії і рівняння (49) у випадку експоненціальної залежності пружних параметрів  $E$ ,  $G$ ,  $E'$ ,  $G'$ ,  $\nu'$  від радіуса

$$E(r) = E_0 e^{-mr}; \quad G(r) = G_0 e^{-mr}; \quad E'(r) = E'_0 e^{-mr}; \quad G'(r) = G'_0 e^{-mr}; \quad \nu'(r) = \nu'_0 e^{-mr}. \quad (55)$$

Прийемо припущення про постійність коефіцієнтів Пуассона, яке теж часто використовується в неоднорідній теорії пружності

$$\nu'(r) = \nu'_0 = \text{const}; \quad \nu(r) = (E_0 - 2G_0)/2G_0 = \text{const}. \quad (56)$$

Оскільки формули для відношення модулів Юнга приймають вигляд

$$E'(r)/E(r) = E'_0/E_0 = \text{const}, \quad (57)$$

то для знаходження потенціалу необхідно розв'язувати лінійне рівняння зі змінними коефіцієнтами, дещо ускладнене у порівнянні з рівнянням для ізотропного випадку (54)

$$r^2 \varphi_{,rr} + r(r+1) \varphi_{,r} + \left( \frac{\nu + (\nu')^2}{1 - (\nu')^2} r - 1 \right) \varphi = 0. \quad (58)$$

Розв'язки рівнянь типу (54) описано в різних довідкових посібниках з диференціальних рівнянь (у тому числі, в [11]). До прикладу, рівняння

$$r^2 \varphi_{,rr} + r(r+1) \varphi_{,r} + (3r-1) \varphi = 0 \quad (59)$$

має загальний розв'язок вигляду

$$\varphi(r) = r(r-3)e^{-r} \left[ C_1 + C_2 \int \frac{e^r dr}{r^3 (r-3)^2} \right]. \quad (60)$$

Напруження знаходяться за формулами

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{1}{r} \varphi(r); \quad \sigma_{\theta\theta}(r) = \varphi_{,r}(r); \quad \sigma_{zz} = \frac{1}{\nu} (C - a(\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\theta\theta}(r))). \quad (61)$$

При відомих напруженнях деформації визначаються за формулами (30), (31) і далі зміщення знаходяться за відомими формулами теорії пружності.

#### Висновки.

Аналіз простої задачі про стиск стержня в умовах універсальної деформації розтягу – стиску свідчить, що при достатньо суттєвому зменшенні значень модулів Ляме від поверхні до центру стержня стискує напруження також суттєво падає, тоді як зміна поперечного перетину стержня є практично постійною у всіх перетинах. Тобто, ця модель не описує зміну перетину зуба при його стиску і описує суттєве падіння стискує напруження в зубі.

Аналіз двох більш складних задач про рівновагу циліндричного тіла з властивостями трансверсальної ізотропії і залежності пружних параметрів від радіуса показав необхідність застосування більш складних моделей і більш складного математичного апарату при початково однаковій постановці. В рамках обох моделей отримано теоретичні представлення потенціалів, через які визначаються всі необхідні механічні поля – напружень, деформацій і зміщень. З отриманих розв'язків випливає, що всі поля суттєво залежать від радіуса.

Таким чином, використання неоднорідної теорії пружності в описі напруженого стану зуба видається перспективним для ряду конкретних задач, оскільки воно відображає реально неоднорідність зуба в радіальному напрямку.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Описано певний первинний досвід в застосуванні неоднорідної теорії пружності до опису механічного стану однокореневого зуба. Розглянуто і прокоментовано декілька простих моделей осесиметричного стану циліндричних ізотропного і трансверсально-ізотропного тіл.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** неоднорідна теорія пружності, залежні від радіуса властивості, найпростіші моделі для циліндричних тіл.

1. Загорский В.А., Макеева И.М., Загорский В.В. Плотность твердых тканей зуба. Часть I // Российский стоматологический журнал. – 2012. – № 2. – С. 29 – 34.
2. Загорский В.А., Макеева И.М., Загорский В.В. Прочностные свойства твердых тканей зубов. Часть II // Российский стоматологический журнал. – 2014. – № 1. – С. 9 – 14.
3. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – Москва: Высшая шк., 1975. – 526 с.
4. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – Москва: Изд-во Моск. у-та, 1976. – 368 с.

5. Birman V., Bird L.W. Modeling and Analysis of FGM and Structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – **60**. – P. 195 – 216.
6. Cattani C., Rushchitsky J.J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructures. – Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007. – 466 p.
7. Hahn H.G. Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie and Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme. – Stuttgart: B.G.Teubner, 1985. – 344 p.
8. Grigorenko A.Ya., Los' V.V., Malanchuk V.A., Tormakhov N.N. Stress State of a Threaded Joint in a Dental Implant–Bone System // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 33-39.
9. Grigorenko A.Ya., Loza I.A., Grigorenko Ya.M. Numerical Analysis of Dynamical Processes in Inhomogeneous Piezoceramic Cylinders (Review) // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 5. – P. 523-591.
10. Gupta N., Gupta S.K., Mueller B.J. Analysis of a functionally graded particulate composite under flexural loading conditions // Material Science and Engineering. – 2008. – **A431**. – P. 439 – 447.
11. Kamke E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. – Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 1977. – 667 p.
12. Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates // Europ. J. Mech. A / Solids. – 2004. – **23**, N 5. – P.853 – 864.
13. Kashtalyan M., Menshykova M. Three-dimensional elastic deformation of a functionally graded coating/substrate system // Int. J. Solids and Struct. – 2007. – **44**, N 16. – P. 5272 – 5288.
14. Kashtalyan M., Menshykova M. Three-dimensional analysis of a functionally graded coating /substrate system of finite thickness // Phil. Trans. of the Royal Society A. – 2008. – **336 (1871)**. – P. 1821 – 1826.
15. Kashtalyan M., Menshykova M. Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core // Composite Structures. – 2009. – **74**, N 2. – P. 326 – 336.
16. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. Revisiting displacement functions in three-dimensional elasticity of inhomogeneous media // Int. J. Solids Struct. – 2009. – **46**, N 19. – P. 3654 – 3662.
17. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. General Hoyle – Youngdahl and Love Solutions in the Linear Inhomogeneous Theory of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 1. – P. 1 – 17.
18. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. General Love Solutions in the Linear Isotropic Inhomogeneous Theory of Radius-Dependent of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 3. – P. 245 – 254.
19. Kayssen W.A., Ilschner B. FGM Research Activities in Europe // MRS Bull. – 1995. – **20**. – P. 22 – 26.
18. Koizumi M. Concept of FGM // Ceramic Trans. – 1993. – **34**. – P. 3 – 10.
20. Koizumi M. FGM activities in Japan // Composites B. – 1997. – **B28**. – P. 1 – 4.
22. Li X.Y., Ding H.J., Chen W.Q. Elasticity solutions for a transversely isotropic FGM circular plate subject to an axisymmetric transverse load  $qr^k$  // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**. – P. 191 – 210.
23. Li X.Y., Ding H.J., Chen W.Q. Axisymmetric elasticity solutions for a uniformly loaded annular plate of transversely isotropic FGM // Acta Mechanica. – 2008. – **196**. – P.139 – 159.
24. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4th ed. – New York: Dover Publications, 1944. – 643 p.
25. Lurie A.I. Theory of Elasticity. – Berlin: Springer, 2000. – 940 p.
26. Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G. FGM: Design, Processing and Applications. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 330 p.
27. Pindera M.J., Arnold S.M., Aboudi J., Hui D. Use of Composites in FGM // Composites Eng. – 1994. – **4**. – P. 1 – 145.
28. Plevako V.P. On the theory of elasticity of inhomogeneous media // J. of Applied Mathematics and Mechanics. – 1971. – **35**, N 5. – P. 806 – 813.
29. Shabana Y.N., Noda N. Numerical evaluation of the thermomechanical effective properties of FGM using homogenization method // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**. – P. 3494 – 3506.
30. Suresh S., Mortensen A. Fundamentals of FGM. – London: Maney, 1998. – 380 p.
31. Yamanouchi M., Koizumi M., Hirai T., Shiota I. (Eds) Proc. of the 1<sup>st</sup> Symposium on FGM Forum and the Society of Non-Traditional Technology, Japan, 1990.

Надійшла 17.12.2019

Затверджена до друку 18.03.2021