Ю.Ю.Абросов, В.А.Максимюк, І.С.Чернишенко

ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua,

Abstract. . The stress-strain state of long cylindrical shells of elliptical cross section is studied. The shell material is a nonlinear-elastic orthotropic organoplastic. To improve the convergence of the variation-difference method, a mixed functional is used, in which the membrane deformation is additionally varied. A decrease in stresses and an increase in deflections and deformations are established, taking into account the physical nonlinearity of the composite. The dependence of the circular stresses in the nonlinear-elastic shell on the properties of the material is revealed in contrast to the linear-elastic shell.

Key words: elliptical cylinder, stress-strain state, membrane locking, nonlinear-elastic composite, variational-difference method.

Вступ.

Циліндричні оболонки неколового поперечного перерізу вивчаються як в сучасній інженерній справі [6], так і теоретичних дослідженнях статики [5, 9, 14,], стійкості [4, 5, 7], динаміки [3, 15, 19] такого вигляду конструкцій. Ряд праць присвячено вивченню оболонок з ізотропних пружнопластичних [16], анізотропних композитних пружних [14] та нелінійно-пружних [17, 18] матеріалів. Розрахунки напружено-деформованого стану (НДС) таких оболонок чисельними сітковими методами ускладнюються через так зване явище мембранного замикання (locking) [13]. Воно проявляється у сповільненій, але стійкій [2] збіжності класичних чисельних методів внаслідок значних згинів за невеликих розтягів. Застосування нелінійно-пружних композитних матеріалів для виготовлення оболонок призводить до необхідності врахування в теорії оболонок нелінійних властивостей композитів [1, 8].

1. Постановка задачі.

В декартовій системі координат (x, y, z) рівняння серединної поверхні замкнутої довгої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з півосями a і b та твірною вздовж осі OZ має вигляд [2]

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Віднесемо цю поверхню до криволінійної системи координат (s, z, γ), в якій координата γ направлена вздовж нормалі до поверхні, а s є довжиною дуги еліпса, що відраховується від точки $(x = 0,\ y = b)$. Осі ортотропії нелінійно-пружного композитного матеріалу [1] оболонки збігаються з лініями головних кривин оболонки. Очевидно, що коефіцієнти першої квадратичної форми в цій системі будуть рівними одиниці $(A_s = A_z = 1)$, а кривина твірної буде нульовою.

Нехай під дією сталого і рівномірного внутрішнього тиску p в ортотропній однорідній пружній тонкій оболонці постійної товщини h виникають малі переміщення в поперечному перерізі, а вздовж осі z переміщення відсутнє. Тоді компоненти НДС залежатимуть тільки від координати s. Очевидно, замкнута оболонка буде набирати близьку до колової форму, що призведе до великих згинів поблизу точок перерізу еліпса площинами симетрії. Для розрахунку НДС за таких умов доцільно скористатися геометрично лінійною теорією тонких оболонок з використанням змішаного функціонала для спрощення реалізації гіпотез Кірхгофа – Лява [2] та уникнення мембранного замикання [11].

2. Основні рівняння.

За допомогою оригінального алгоритму чисельної дискретизації кривої [2] рівняння (1) можна записати в параметричному вигляді

$$x = x(s); \quad y = y(s). \tag{2}$$

Кривина еліпса обчислюватиметься за формулою

$$k_s = x'y'' - x''y'. \tag{3}$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій серединної поверхні і переміщеннями та кутом повороту визначаються формулами [1, 2]

$$\varepsilon_{ss} = u' + kw; \quad \kappa_{ss} = \varphi, \tag{4}$$

де u і w – компоненти вектора переміщень вздовж осей s, γ відповідно. Для гіпотез Кірхгофа – Лява кут φ в (4) задається за допомогою методу множників Лагранжа з умов рівності нулеві деформації поперечного зсуву

$$\varepsilon_{s\gamma} = \varphi + w' - k_s u = 0. \tag{5}$$

Мембранна деформація довільної точки по товщині $(\gamma = \text{const})$ перерізу оболонки виражається формулою

$$e_{ss} = \varepsilon_{ss} + \gamma\kappa_{ss}. \tag{6}$$

Нелінійні фізичні співвідношення в довгій оболонці $(e_{zz} = 0)$ за плоского напруженого стану для простих навантажень наведемо згідно з теорією пластичності анізотропних середовищ [1]:

$$\left(\frac{1}{E_{ss}} + \Psi q_{ss}\right)\sigma_{ss} + \left(-\frac{\nu_{sz}}{E_{zz}} + \Psi q_{sz}\right)\sigma_{zz} = e_{ss};$$

$$\left(-\frac{\nu_{zs}}{E_{zz}} + \Psi q_{zs}\right)\sigma_{ss} + \left(\frac{1}{E_{zz}} + \Psi q_{zz}\right)\sigma_{zz} = 0, \tag{7}$$

де σ_{ss} і σ_{zz} – компоненти колових і поздовжніх напружень; E_{ss}, E_{zz} та ν_{sz}, ν_{zs} – модулі пружності та коефіцієнти поперечної деформації ортотропного матеріалу.

Нелінійні властивості матеріалу в (7) описуються функцією [1]

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{f}} \int_{f_s}^{f} \frac{W_p'}{\sqrt{f}} df,$$

де $W_p(f)$ – функція зміцнення, яка має сенс роботи на нелінійних складових деформацій;

$$f = \frac{1}{2}(q_{ss}\sigma_{ss}^2 + q_{zz}\sigma_{zz}^2 + 2q_{sz}\sigma_{ss}\sigma_{zz}) \tag{8}$$

– квадратична функція напружень; f_s – значення (8), вище якого проявляється нелінійність; q_{ss}, q_{zz}, q_{sz} – компоненти тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей.

Система рівнянь (7) є суттєво нелінійною, розв'язати її відносно напружень можна чисельно за допомогою, наприклад, методу Ньютона. Тоді після чисельного обернення (7) можна подати у вигляді [1]

$$\sigma_{ss} = \sigma_{ss}\left(e_{ss}\right); \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}\left(e_{ss}\right). \tag{9}$$

З огляду на застосування в подальшому методу послідовних наближень (МПН) в напруженнях (9) виділяються, як доданки, нелінійні та лінійні члени

$$\sigma_{ss}^{N} = \sigma_{ss} - \sigma_{ss}^{L}; \quad \sigma_{zz}^{N} = \sigma_{zz} - \sigma_{zz}^{L}; \quad \sigma_{ss}^{L} = \frac{E_{ss}}{1-\nu_{sz}\nu_{zs}} e_{ss}; \quad \sigma_{zz}^{L} = \nu_{sz}\sigma_{ss}^{L}. \tag{10}$$

Відповідно до (10) середні по товщині оболонки внутрішні зусилля T_{ss}, T_{zz} та момент M_{ss} подаються у вигляді суми лінійних та нелінійних доданків [1]

$$T_{ss}\left(\varepsilon_{ss}\right) = T_{ss}^{L} + T_{ss}^{N}; \quad T_{zz}\left(\varepsilon_{ss}\right) = T_{zz}^{L} + T_{zz}^{N}; \quad M_{ss}\left(\kappa_{ss}\right) = M_{ss}^{L} + M_{ss}^{N}. \tag{11}$$

3. Чисельний метод розв'язування задачі.

Метод будується на основі варіаційних принципів з використанням змішаного функціонала [1, 10 – 12]. Виходячи з принципу віртуальної роботи, вважаючи, що згідно з МПН у формі додаткових напружень величини нелінійних складових (11) відомі з попереднього наближення і не варіюються, варіаційне рівняння можна подати у вигляді

$$\delta\Pi = \delta\left(\Pi^{L} + \Pi^{N}\right) = 0,$$

де позначено

$$\begin{aligned}\Pi^{L} = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(T_{ss}^{L}\varepsilon_{ss} + T_{zz}^{L}\varepsilon_{zz} + M_{ss}^{L}\kappa_{ss}\right)d\Omega - \iint_{\Omega} pw\,d\Omega + \\ + \iint_{\Omega} T_{s\gamma}^{f}\varepsilon_{s\gamma}\,d\Omega - \frac{1}{2}\iint_{\Omega} C_{ss}\left(\varepsilon_{ss} - \varepsilon_{ss}^{f}\right)^{2} d\Omega;\end{aligned} \tag{12}$$

$$\Pi^{N} = \iint_{\Omega}\left(T_{ss}^{Nf}\varepsilon_{ss} + T_{zz}^{Nf}\varepsilon_{zz} + M_{ss}^{N}\kappa_{ss}\right)d\Omega. \tag{13}$$

Функціонал $\Pi(u, w, \varphi, T_{s\gamma}^{f}, \varepsilon_{ss}^{f})$ залежить від чотирьох варійованих функцій: двох переміщень, кута повороту, зусилля $T_{s\gamma}^{f}$, яке має фізичний зміст перерізуючої сили, та колової деформації-функції ε_{ss}^{f}. Переваги такої побудови функціонала викладено в [8, 11]. В лінійній частині функціонала (12) перший доданок є енергією пружних деформацій, другий – роботою поверхневої сили, третій реалізує геометричну частину гіпотез Кірхгофа – Лява методом множників ($T_{s\gamma}^{f}$) Лагранжа, четвертий сприяє зменшенню мембранного замикання; коефіцієнт $C_{ss} = \dfrac{E_{ss}}{1-\nu_{sz}\nu_{zs}}$; Ω – область серединної поверхні оболонки. В нелінійній частині функціонала (13) нелінійні складові зусиль на відміну від (11) залежать від деформації-функції ε_{ss}^{f}, а не деформації-формули (4). Слід відмітити використання у (12) і (13) позначень верхнім індексом (^{f}) для зусиль і деформації, що підкреслює відмінність між величиною-формулою й величиною-функцією і має певне методологічне значення.

У такий спосіб лінеаризована задача зводиться до знаходження в кожному наближенні стаціонарних значень функціонала

$$\prod^{LN} = \prod^{L} + \prod^{N} . \qquad (14)$$

З умови стаціонарності функціонала $\delta \prod = 0$ випливають природні статичні крайові умови, а головні геометричні умови [1] у випадку симетрії, наприклад, мають вигляд

$$u = 0; \quad \varphi = 0; \quad T^{f}_{s\gamma} = 0 . \qquad (15)$$

Для знаходження стаціонарних значень функціонала (14) використовується варіаційно-різницевий метод (ВРМ) [1].

4. Числові результати і їх аналіз.

4.1. Ізотропна лінійно пружна оболонка. Раніше був виконаний розрахунок НДС оболонки [2] за методикою, що не передбачала засобів покращення збіжності за наявності мембранного замикання. На цьому прикладі покажемо ефективність запропонованої методики з використанням функціонала (14).

Параметри оболонки такі: $h = 0{,}01$ м; $a = 100\,h$; $b = 50\,h$; $E = 210$ ГПа; $\nu = 0{,}3$; $p = 10$ кПа. Внаслідок симетрії задачі щодо площин $x = 0$ і $y = 0$ розглядається область $s \in [0, s_k]$, де $s_k = 1{,}211$ м – чверть периметра еліпса.

Практичну збіжність результатів розрахунків НДС зі збільшенням кількості вузлів $K = 11 \div 641$ показано в табл. 1, де наведено безрозмірні прогини ($\tilde{w} = w/h$), напруження на зовнішній (σ^{+}), у серединній (σ^{0}) і на внутрішній (σ^{-}) поверхнях оболонки $\tilde{s} = s/s_k = 0$ (коротка піввісь) і $\tilde{s} = 1$ (довга піввісь). Там же для порівняння наведено такі ж дані з праці [2] при $K = 641; 10241$. Видно, що при $K = 641$ максимальні прогини та напруження збігаються з точністю до трьох значущих цифр з результатами [2] при $K = 10241$, а також з аналітичним розв'язком [20], тоді як в [2] така розбіжність сягала до 20%. Вже при $K = 11$ запропонований підхід забезпечує точність до 2% в максимальних напруженнях, що свідчить про ефективність покращення збіжності шляхом додаткового варіювання заздалегідь малої компоненти деформації.

Таблиця 1

K	$\tilde{s}$	$\tilde{w}$	σ^{+}, МПа	σ^{0}, МПа	σ^{-}, МПа
11	0	2,17	85,65	0,6192	– 84,42
	1	– 1,07	– 130,8	1,092	133,0
41	0	2,31	92,16	0,5449	– 91,07
	1	– 1,09	– 125,8	1,015	127,8
161	0	2,39	94,27	0,5116	– 93,25
	1	– 1,12	– 128,5	1,003	130,5
641	0	2,42	94,81	0,5030	– 93,80
	1	– 1,12	– 129,2	1,001	131,2
641	0	2,20	87,88	0,5794	– 86,72
[2]	1	– 1,01	– 109,4	0,6081	110,6
10241	0	2,42	94,96	0,5077	– 93,94
[2]	1	– 1,13	– 129,3	0,9981	131,3

4.2. Ізотропна пружнопластична оболонка. Рівняння (7) і (8) також дозволяють описати пружнопластичне деформування ізотропних матеріалів за таких умов:

$$E_{ss} = E_{zz} = E; \quad \nu_{sz} = \nu_{zs} = \nu; \quad q_{ss} = q_{zz} = 2; \quad q_{sz} = -1; \quad f = \sigma_i^2 ; \quad \Psi = \omega_i / 2E(1 - \omega_i) ,$$

де ω_i – функція пластичності; σ_i – інтенсивність напружень.

Розрахунки виконано для оболонки [16] зі сплаву АМг-6 з такими геометричними й фізико-механічними параметрами: $(a+b)/h = 100$; $a/b = 11/10$; $E = 70$ ГПа; $\nu = 0,3 - 0,5$; $\sigma_n = 140$ МПа; $\varepsilon_n = 0,002$; $p = 0,4$ МПа. На основі діаграми деформування матеріалу $\sigma_i(\varepsilon_i)$, яка наведена в [1], було побудовано функцію Ψ з такими параметрами апроксимації функції:

$$W_p = \begin{cases} 0, & f/f_s \le 1; \\ a\left[\left(f/f_s\right)^n - 1\right], & f/f_s > 1, \end{cases} \tag{16}$$

$a = 0,204$ МПа; $n = 3$; $f_s = 19600$ (МПа)^2.

Порівняння розрахунків в лінійній (ЛЗ) та нелінійній (НЗ) постановках задач про НДС пружнопластичної оболонки даним ВРМ з методом скінченних елементів (МСЕ) [16] наведено в табл. 2, яку в порівнянні з табл. 1 доповнено значеннями деформацій на зовнішній (e_{ss}^{+}) та внутрішній (e_{ss}^{-}) поверхнях оболонки. Результати розрахунків в лінійній постановці задач обома методами (ЛЗ: ВРМ, МСЕ) збігаються з точністю не менше трьох значущих цифр і тому в табл. 2 вони не відокремлені. Різниця в максимальних напруженнях $(\sigma^{-}, \tilde{s} = 1)$ не перевищує 5%. Це при тому, що врахування пластичності зменшує це напруження на 33% порівняно з лінійним розв'язком МСЕ. Цю розбіжність в нелінійній постановці можна віднести до аналітичної апроксимації (16) функції зміцнення $W_p(f)$.

Таблиця 2

Задача, метод	$\tilde{s}$	$\tilde{w}$	$e_{ss}^{+}\cdot 10^2$	$e_{ss}^{-}\cdot 10^2$	σ^{+}, МПа	σ^{-}, МПа
ЛЗ,	0	6,52	0,387	– 0,338	298	– 259
ВРМ, МСЕ	1	– 5,84	– 0,353	0,407	– 271	313
НЗ,	0	10,5	0,776	– 0,661	215	– 207
ВРМ	1	– 9,50	– 0,711	0,854	– 210	219
НЗ,	0	10,2	0,751	– 0,628	207	– 201
МСЕ	1	– 9,23	– 0,680	0,823	– 203	210

4.3. Ортотропна нелінійно-пружна оболонка. Ортотропний матеріал оболонки 8-шаровий органопластик [1], має такі характеристики:

$$E_{ss} = 26,8 \text{ ГПа}; \; E_{zz} = 46,5 \text{ ГПа}; \; \nu_{sz} = 0,166; \; q_{ss} = 4,32; \; q_{zz} = 2; \; q_{sz} = -0,64 \tag{17}$$

з параметрами функції зміцнення (16) $a = 0,333$ МПа; $n = 2,5$; $f_s = 303000$ (МПа)^2. Геометричні параметри оболонки такі: $h = 0,01$ м; $a = 20\,h$; $b = 15\,h$. Як і вище розглядається область $s \in [0, s_k]$, де $s_k = 27,629\,h$ – чверть периметра еліпса. У випадку переорієнтації осей ортотропії матеріалу відносно вісі циліндра характеристики матеріалу теж поміняються:

$$E_{ss} = 46,5 \text{ ГПа}; \; E_{zz} = 26,8 \text{ ГПа}; \; \nu_{sz} = 0,288; \; q_{ss} = 2; \; q_{zz} = 4,32; \; q_{sz} = -0,64. \tag{18}$$

При цьому параметри функції зміцнення (16) залишаться незмінними.

Результати розрахунків НДС оболонки за орієнтації осей ортотропії (18) при навантаженні $p = 3$ МПа наведено в табл. 3. Ітераційний процес в МПН зупинявся, коли відносна зміна максимальних деформацій у двох наступних наближеннях не перевищувала 10^{-3}.

Таблиця 3

Задача	$\tilde{s}$	$\tilde{w}$	$e_{ss}^{+}\cdot 10^{2}$	$e_{ss}^{-}\cdot 10^{2}$	σ^{+}, МПа	σ^{-}, МПа
ЛЗ	0	3,80	1,59	– 1,40	776	– 686
	1	– 2,74	– 1,60	1,84	– 783	903
НЗ	0	3,87	1,63	– 1,43	732	– 667
	1	– 2,80	– 1,66	1,94	– 741	822

Видно, що внутрішній тиск надає перерізу оболонки колоподібну форму. Врахування фізичної нелінійності веде до зменшення напружень та збільшення прогинів і деформацій біля полюсів еліпса. Так, максимальне напруження $(\sigma^{-}, \tilde{s}=1)$ зменшилось майже на 9%.

Відзначимо, що тонким циліндричним оболонкам неколового перерізу притаманні набагато більші прогини, ніж у випадку колового перерізу, за такого ж рівня напруженого стану. Тоді може виникнути ситуація, коли розрахунки НДС в рамках геометрично лінійної теорії оболонок приведуть до завищених хибних прогинів, а фізична нелінійність матеріалу ще не проявиться. З цієї причини вище розглядалась оболонка середньої товщини.

За орієнтації осей ортотропії (17) нелінійні властивості матеріалу, на відміну від орієнтації (18), проявляються вже за навантаження $p = 2$ МПа (табл. 4). Вплив нелінійності має аналогічний характер. Оскільки тут $E_{ss} < E_{zz}$, то навіть, за меншого навантаження тут прогини більші, ніж за орієнтації (18) при $p = 3$ МПа.

Таблиця 4

Задача	$\tilde{s}$	$\tilde{w}$	$e_{ss}^{+}\cdot 10^{2}$	$e_{ss}^{-}\cdot 10^{2}$	σ^{+}, МПа	σ^{-}, МПа
ЛЗ	0	4,40	1,81	– 1,62	517	– 457
	1	– 3,17	– 1,85	2,13	– 522	602
НЗ	0	4,49	1,89	– 1,66	485	– 444
	1	– 3,24	– 1,93	2,26	– 492	544

Порівняємо компоненти напруженого стану для двох орієнтацій осей ортотропії (17) і (18) за однакового рівня навантаження $p = 2$ МПа (ЛЗ, табл. 5). Тут крім колових напружень (σ_{ss}) наведено й осьові (σ_{zz}) на зовнішній ($\tilde{\gamma} = \gamma/h = 0,5$) та внутрішній поверхнях оболонки. Видно, що колові напруження в ЛЗ не залежать від властивостей матеріалу, а осьові за орієнтації (17) зростають і вносять додатковий вклад у квадратичну функцію напружень (8). Тим самим можна пояснити прояв нелінійних властивостей матеріалу за меншого навантаження (табл. 4) в оболонці з орієнтацією осей ортотропії (17), ніж в оболонці з орієнтацією (18) (табл. 3).

Таблиця 5

$\tilde{s}$	$\tilde{\gamma}$	E_{ss} =46,5 ГПа (18)		E_{ss} =26,8 ГПа (17)	
		σ_{ss}, МПа	σ_{zz}, МПа	σ_{ss}, МПа	σ_{zz}, МПа
0	0,5	517	85	517	149
	– 0,5	– 457	– 75	– 457	– 131
1	0,5	– 522	– 86	– 522	– 150
	–0,5	602	99	602	173

Висновок.

Додаткове варіювання у змішаному функціоналі заздалегідь малої мембранної деформації значно покращує збіжності чисельного методу за наявності мембранного замикання. Врахування фізичної нелінійності веде до зменшення напружень та збільшення прогинів і деформацій біля полюсів еліпса циліндричної оболонки. Можна очікувати, що в деформуванні тонких довгих циліндричних оболонок неколового перерізу геометрична нелінійність проявиться за нижчих рівнів навантаження, ніж фізична. Колові напруження в лінійно-пружній оболонці на відміну від нелінійно-пружної не залежать від властивостей матеріалу.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Р Е З Ю М Е . Досліджено напружено-деформований стан довгих циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Матеріал оболонки – нелінійно-пружний ортотропний органопластик. Для покращення збіжності варіаційно-різницевого методу застосовується змішаний функціонал, в якому додатково варіюється мембранна деформація. Встановлено зменшення напружень та збільшення прогинів і деформацій за врахування фізичної нелінійності композиту. Виявлено залежність колових напружень в нелінійно-пружній оболонці від властивостей матеріалу на відміну від лінійно-пружної оболонки.

К Л Ю Ч О В І С Л О В А : еліптичний циліндр, напружено-деформований стан, мембранне замикання, нелінійно-пружний композит, варіаційно-різницевий метод.

1. *Механика композитов* (под общей ред. Гузя А.Н.): в 12-и томах. Т. 7. *Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др.* Концентрация напряжений. – К.: «А.С.К.», 1998. – 387с.

2. *Abrosov Yu.Yu., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Influence of Cross-Sectional Ellipticity on the Deformation of a Long Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 529 – 534.

3. *Akgün G., Kurtaran H.* Large displacement transient analysis of FGM super-elliptic shells using GDQ method // Thin-Walled Struct. –**141**. – 2019. – P. 133 – 152.

4. *Andrianov I.I., Diskovsky A.A*. Analytical Buckling Analysis of Cylindrical Shells with Elliptic Cross Section Subjected to External Pressure. In: *Altenbach H., Chróścielewski J., Eremeyev V., Wiśniewski K.* (Eds.) Recent Developments in the Theory of Shells. Series “Advanced Structured Materials”, vol. **110**. – Cham: Springer, 2019. – P. 33 – 41.

5. *Boiko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V.* Studies of Nonlinear Deformation and Stability of Noncircular Cylindrical Shells in Transverse Bending // Mechanics of Solids. – 2012. – **47**, N 2. – P. 205 – 211.

6. *Boulle A., Dubé M., Gosselin F.P.* Parametric study of an elliptical fuselage made of a sandwich composite structure // Mech. Res. Comm. – 2015. – **69.** – P. 129 – 135.

7. *Coman C.D.* Oval cylindrical shells under asymmetric bending: a singular-perturbation solution // Z. Angew. Math. Phys. – 2018. – **69**. – Article number: 120.

8. *Guz A.N., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Numerical Stress-Strain Analysis of Shells Including the Nonlinear and Shear Properties of Composites // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 10. – P. 1220 – 1228.

9. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A.* Comparing scalar and vector forms of the finite element method by example of an elliptic cylinder // Math. Models Comput. Simul. – **8**, N 4. – 2016. – P. 462 – 470.

10. *Lutskaya I.V., Maksimyuk V.A, Chernyshenko I.S.* Modeling the Deformation of Orthotropic Toroidal Shells with Elliptical Cross-Section Based on Mixed Functionals // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 6. – P. 660 – 665.

11. *Maksimyuk V.A.* Solution of Physically Nonlinear Problems of the Theory of Orthotropic Shells Using Mixed Functionals // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 10. – P. 1349 – 1354.

12. *Maksimyuk V.A.* Study of the Nonlinearly Elastic State of an Orthotropic Cylindrical Shell with a Hole, Using Mixed Functionals // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 12. – P. 1602 – 1606.

13. *Maksimyuk V.A.* Locking Phenomenon in Computational Methods of the Shell Theory // Int. Appl. Mech. – 2020. – **36**, N 3. – P. 347 – 350.

14. *Meyers C.A., Hyer M.W.* Response of elliptical composite cylinders to internal pressure loading // Mechanics of Composite Materials and Struct. – 1997. – **4**, N 4. – P. 317 – 343.
15. *Pavliuk A.V.* Dynamics of Three-layer Cylindrical Shells Elliptical Cross-Section With a Longitudinal-Transverse Discrete Ribbed Filler // Physics and Chemistry of Solid State. – 2017. – **18**, N 2. – P. 243 – 248.
16. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Pigol' O.V.* Elastoplastic State of an Elliptical Cylindrical Shell with a Circular Hole // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 647 – 654.
17. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V.* Stress–Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 559 – 567.
18. *Storozhuk E.A., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Nonlinear Elastic State of a Composite Cylindrical Shell with a Rectangular Hole // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 504 – 514.
19. *Taraghi Osguei A., Ahmadian M.T., Asghar M., Pugno N.M.* Free vibration analysis of cylindrical panels with spiral cross section // Int. J. of Mech. Sci. – **133**. – 2017. – P. 376 – 386.
20. *Timoshenko S.* Strength of Materials. Part II. Advanced Theory and Problems. – 2nd ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.

Надійшла 28.02.2020 Затверджена до друку 18.03.2021