С.Ю.Бабич[1], Н.О.Ярецька[2]

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНИХ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

[1]*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН Украины,*
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ-57, Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua;
[2]*Хмельницький національний університет,*
вул. Інститутська, 11, 29016, Хмельницький, Україна;
e-mail: massacran2@ukr.net

Abstract. The problem on a contact interaction without allowance for the friction of the elastic annular cylindrical stamp and the half-space with the initial (residual) stresses. It is solved for the case of unequal roots of the characteristic equation. The research is carried out for the general case of the theory of large initial (finite) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having the arbitrary structure. A numerical analysis is presented in the form of graphs for the case of Treloar's potential.

Key words: : linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problem, annular stamp, half-space.

Вступ.

Підвищення надійності та довговічності інженерних споруд і машин є однією із найбільш актуальних задач сучасного будівництва і машинобудування. Успішному її розв'язку, у значній мірі, сприяють наукові дослідження у межах механіки твердого деформованого тіла (особливо при вивченні проблеми передачі навантаження у конструкціях та деталях машин). Поява нових матеріалів, необхідність підвищення характеристик з експлуатації споруд та машин, зменшення їх ваги, збільшення термінів експлуатації, зниження вартості та досягнення економічної сумісності – все це потребує нових методів розрахунку.

Проблематика задач, що стосується контакту пружних, в'язко пружних і пластичних тіл без початкових напружень, у даний час вивчена з ряду питань. Усі вони детально висвітлені у багатьох працях монографічного та навчального характеру [5], а також відображені у багатьох публікаціях періодичних наукових видань.

Кількість публікацій з механіки контактної взаємодії безперервно збільшується, що пояснюється актуальністю проблем, які розглядаються в інженерній практиці. Але сучасні запити інженерної практики поставили перед дослідниками ряд задач, що потребують використання більш ускладнених моделей суцільних середовищ (відмінних від класичних) зі складними фізичними та механічними властивостями. Ці моделі мають враховувати при контактній взаємодії, наприклад, такі фактори: тертя, тепловиділення, поверхневі властивості матеріалу, жорсткість та зносостійкість поверхні, що у свою чергу, пов'язано з мікромеханікою фрикційної взаємодії.

Одним із важливих факторів контактної взаємодії (нарівні з іншими) є врахування початкових (залишкових) напружень. Незважаючи на досягнення у розвитку контактних задач, питання врахування початкових напружень при контактній взаємодії все ще залишається недостатньо дослідженим. Як відомо, практично в усіх елементах конструкцій присутні початкові напруження. Останні викликані різного роду причинами, наприклад технологічними операціями, виробничими процесами (при виготовленні цілого ряду матеріалів) або складанням конструкцій. У земній корі початкові напруження виникають внаслідок дії геостатичних та геодинамічних сил, у композитних матеріалах – в результаті технологічних процесів при їх створенні, а також початкові напруження присутні й у кровоносних судинах живих організмів. Початкові напруження необхідно враховувати при розв'язуванні задач про деформацію ґрунтів (особливо мерзлих). Крім того, у пружно-пластичних тілах також можуть існувати внутрішні залишкові напруження після зняття навантаження. Іноді доречно навмисно створювати початкові напруження (залишкові та технологічні) для компенсації тих напружень, які виникають у елементах конструкцій у процесі роботи, та підвищують їх характеристики міцності.

Особливе зацікавлення у зв'язку із впровадженням у виробництво нових штучних матеріалів, що можуть витримувати великі початкові деформації, викликає дослідження контактних задач для попередньо напружених тіл.

Таким чином, механіка матеріалів та елементів конструкцій, геофізика, сейсмологія, механіка гірських порід, механіка композитів, біомеханіка, неруйнівні методи визначення напружень та ряд інших – далеко неповний перелік наукових напрямків фундаментального та прикладного характеру, в яких виникли проблеми, що пов'язані з необхідністю дослідження впливу початкових (залишкових) напружень або деформацій. На основі цього, слід зазначити важливість необхідності дослідження впливу початкових напружень на напружено-деформований стан на межі контакту.

Врахування початкових напружень при розрахунку відповідальних елементів конструкції, машин та споруджень дозволить при їх створенні більш ефективно враховувати міцнісні ресурси матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності та суттєво знижувати їх матеріаломісткість, зберігаючи необхідні фундаментальні характеристики в цілому. Досить часто з метою збільшення міцності конструкції виникає необхідність підсилення її деяких несучих елементів пружними кріпленнями (стрингерами). Результати досліджень у цьому напрямі при наявності в конструкції початкових напружень виконано у [13]. Для даної статті характерним та загальним є те, що по перше, всі розглянуті тіла – пружні, по друге, ці основи (тіла) попередньо напружені.

Необхідно відзначити, що до теперішнього часу для дослідження вищевказаних задач склалися два підходи. Перший підхід пов'язаний із дослідженням тіл з конкретною формою пружного потенціалу. Мабуть, першою працею у цьому напрямку стала стаття [20], у якій розглядається задача для колової тріщини у випадку пружного нестисливого тіла з початковими напруженнями для потенціалу Трелоара (тіло неогуківського типу). Дослідження, що пов'язані з вказаним підходом вітчизняних і зарубіжних вчених (ближнього і далекого зарубіжжя), розглянуто у працях Александрова В.М., Арутюняна Н.Х. [1] та їх учнів: Брудного С.Р., Порошина В.С., Соболя В.Б., Філіпової Л.М. [11], Калинчука В.В., Полякової І.В., Ананьєвої І.В., Воротинцевої І.В., Сметаніна Б.І., Чебакова М.І. та інших, а також у працях Dhaliwal R.S., Rokne J.G., Singh B.M. [14], Rajit S.

Другий підхід, який розвивався паралельно із першим, та належить академіку Гузю О.М. [6 – 10], пов'язано з дослідженням задач для пружних тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу. Задачі розв'язано у загальному вигляді для стисливих та нестисливих матеріалів для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій окремо для рівних та нерівних коренів характеристичного (визначального) рівняння [9]. Усі наведені у цій статті результати отримано в межах другого підходу, який на погляд авторів має низку переваг у порівнянні з першим.

Так, до недавнього часу одна і та ж задача (контактна або задача для тріщини) для попередньо напружених тіл розглядалась одними авторами, наприклад, для потенціалу Трелоара, а іншими авторами для потенціалу Муні і т.д., тобто для конкретної форми пружного потенціалу. У даній статті (як і в низці інших) дослідження проведено в єдиній загальній формі для стисливих та нестисливих попередньо напружених тіл при довільній структурі пружного потенціалу. І лише на завершальному етапі досліджень при отриманні чисельних результатів використано конкретні пружні потенціали.

До теперішнього часу всі дослідження контактних задач для жорстких та пружних штампів у межах другого підходу отримано у працях академіка НАН України Гузя О.М. та його учнів: Рудницького В.Б., Григоренка П.П., Рамського А.О., Глухова Ю.П., Діхтярука М.М., Примаченка О.В., Матняка С.В., зокрема і авторів даної статті. Дослідження з контактних задач перерахованих вище авторів (українських вчених) відображено у багатьох працях монографічного та навчального характеру, а також увійшли до численних публікацій, зокрема і в оглядові статті періодичних вітчизняних та закордонних видань. Серед них слід відзначити роботи [6 – 10, 12 – 13, 15 – 19, 22 – 24].

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності досліджено осесиметричну контактну задачу про тиск попередньо напруженого пружного кільцевого штампа з плоскою основою на півпростір з початковими напруженнями без врахування сил тертя для нерівних коренів характеристичного (визначального) рівняння [9]. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих та нестисливих тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу, тобто у межах другого підходу. Вважаємо, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторі є однорідними та рівними. Величини, що відповідають пружному штампу, запишемо з верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до попередньо напруженого півпростору – з верхнім індексом (2). Подібну контактну задачу у класичному випадку, тобто без початкових напружень розглянуто у [5].

§1. Постановка задачі та основні співвідношення.

Нехай скінченний пружний кільцевий штамп висотою H з початковими напруженнями, геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) і направлена всередину півпростору (рис. 1), тисне на півпростір з силою P, після виникнення там початкового деформованого стану. Величини R_1, R_2 – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси штампа. Вважатимемо, що зовнішнє навантаження прикладене лише до вільного торця пружного штампа, під дією якого усі точки торця штампа переміщаються вздовж осі симетрії y_3 на одну й ту ж величину ε. Також вважатимемо, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження – неперервні. Величини $\lambda_i\left(i=1,2,3\right)$ – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11}, S_0^{22} – компоненти симетричного тензора початкових напружень.

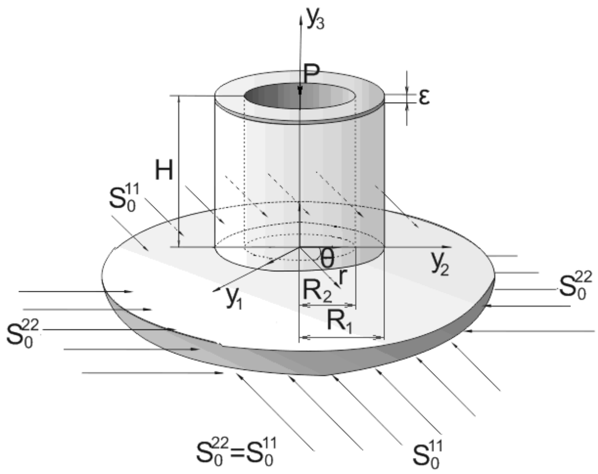

Рис. 1.

Припустимо, що початкові стани півпростору та штампа – однорідні, й для них виконуються співвідношення [10, 17]

$$y_m = x_m + U_m^0;\ U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1} y_i \ \ (i, m = \overline{1, 3}).$$

Тоді основне рівняння у переміщеннях [10, 17] для стисливих тіл має вигляд

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0; \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta}\, \partial^2 \big/ \partial y_i \partial y_\beta \quad (i, m, \alpha, \beta\ = \overline{1, 3}), \tag{1.1}$$

а для нестисливих тіл виконується умова нестисливості:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m}\, \partial p' \big/ \partial y_\alpha = 0;\ L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta}\, \partial^2 \big/ \partial y_i \partial y_\beta\,; \tag{1.2}$$

$$q'_{ij}\, \partial U_j \big/ \partial y_i = 0;\ q'_{ij} = \lambda_i q_{ij} \ \ (i,\ j, m, \alpha, \beta\ (\overline{1, 3})\,.$$

Вирази для визначення складових тензора напружень для стисливих та нестисливих тіл запишемо у вигляді

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta}; \quad Q'_{ij} = \kappa_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p; \quad \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta};\ \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}.$$

При однорідних початкових напруженнях вважаємо, що має місце $S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0;$ $S_0^{33} = 0;\ \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Враховуючи ці умови, розв'язок рівнянь (1.1), (1.2) представимо через функцію χ, яка задовольняє рівнянню

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2\, \partial^2 \big/ \partial\, y_3^2)(\Delta_1 + \xi_3'^2\, \partial^2 \big/ \partial\, y_3^2)\chi = 0\,, \tag{1.3}$$

де $\Delta_1 = \partial^2 \big/ \partial r^2 + r^{-1}\, \partial \big/ \partial r$.

Як зазначалося вище, у даній статті обмежимося випадком нерівних коренів $(\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2)$ характеристичного рівняння, яке відповідає рівнянню (1.3).

У системі колових циліндричних координат $(r,\ \theta,\ z_i)$, де $z_i = \nu_i^{-1} y_3$, $\nu_i = \sqrt{n_i}$ $(i = 1,\ 2)$, $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

$$U_3^{(1)} = -\varepsilon;\ Q_{3r}^{(1)} = 0 \ \ (R_1 < r < R_2)\,;\ \ z_i = H\nu_i^{-1} \ (i = 1,\ 2)\,; \tag{1.4}$$

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)};\ \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)};\ \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \ \ (R_1 < r < R_2); \quad z_i = 0 \quad (i = 1,\ 2); \tag{1.5}$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0;\ \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \ \ (0 < r < R_1;\ R_2 < r < \infty)\,; \quad z_i = 0 \quad (i = 1,\ 2); \tag{1.6}$$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0;\ \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \ \ (0 \le z_i \le H\nu_i^{-1})\,; \quad r = R_1; \quad r = R_2. \tag{1.7}$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торця та рівнодійною навантаження Р має вигляд

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{33}^{(2)}(0,\ r)dr\,. \tag{1.8}$$

§2. Метод розв'язку.

Для визначення напружено-деформованого стану у пружному кільцевому штампі з початковими напруженнями використовуємо лінеаризовані рівняння [10, с. 78]. Із цих рівнянь випливають вирази для компонентів вектора переміщення та тензора напружень для стисливих та нестисливих тіл. Тоді загальний розв'язок $\chi = \chi_1 + \chi_2$ для випадку нерівних коренів визначального рівняння [10, формули (2.19)] приймемо у вигляді

$$\chi_1 = A_0(r^2 - 2z_1^2) + C_0 z_1(3r^2 - 2z_1^2) +$$

$$+\left\{\left[A_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + A_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r)\right] C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + \left[T_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)\right] \tilde{S}_2(\alpha_k z_1)\right\} M_k \text{ ;}$$

$$\chi_2 = A_0(r^2 - 2z_2^2) + C_0 z_2(3r^2 - 2z_2^2) +$$

$$+\left\{\left[B_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_2 r) + B_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_2 r)\right] C_k \sin(\gamma_k v_2 z_2) + \left[T_k^{(1)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(2)} Y_0(\alpha_k r)\right] \tilde{S}_3(\alpha_k z_2)\right\} M_k \text{ ;}$$

$$\Big(\tilde{S}_2(x) = \tilde{E}_k sh(x) + \tilde{F}_k ch(x); \;\; \tilde{S}_3(x) = \tilde{N}_k sh(x) + ch(x) \text{ ;}$$

$$T_k^{(1)} = -Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})(J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}))^{-1} T_k^{(2)}; \quad A_k^{(1)} = K_1(\gamma_k v_1 R_1)(I_1(\gamma_k v_1 R_1))^{-1} A_k^{(2)} \text{ ;}$$

$$B_k^{(1)} = K_1(\gamma_k v_2 R_1)(I_1(\gamma_k v_2 R_1))^{-1} B_k^{(2)} \text{ ; } \quad A_0 = (3C_0 H(v_1)^{-1} - \varepsilon n_1 n_2 (4(m_1 n_2 + m_2 n_1))^{-1}) \text{ ;}$$

$$\tilde{E}_k = (1+m_2) n_1 ((1+m_1) n_2)^{-1} \operatorname{cth}(\alpha_k H v_1^{-1}) \text{ ; } \quad \tilde{N}_k = -\operatorname{cth}(\alpha_k H v_2^{-1}) \text{ ;}$$

$$\tilde{F}_k = -(1+m_2) n_1 ((1+m_1) n_2)^{-1} \text{; } \quad \tilde{S}_4(x) = \tilde{E}_k ch(x) + \tilde{F}_k sh(x)\Big),$$

де α_k, γ_k – власні значення задачі (1.4) – (1.7), $M_k = \tilde{M}_k T_k^{(2)}$, $A_k^{(2)}, B_k^{(2)}, T_k^{(2)}, C_0, C_k$, $\tilde{M}_k = \text{const}$, $M_k -$ невідомі величини.

Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому кільцевому штампі для стисливих (нестисливих) тіл та нерівних коренів, із врахуванням (1.4) – (1.7), представимо у вигляді

$$U_r^{(1)} = -6C_0 r\theta_+ - \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\gamma_k^2\Big[v_1(K_1(v_1\gamma_k R_1)(I_1(v_1\gamma_k R_1))^{-1} I_1(v_1\gamma_k r) - K_1(v_1\gamma_k r))\tilde{A}_k \cos(\gamma_k v_1 z_1) +$$

$$+ v_2(K_1(v_2\gamma_k R_1)(I_1(v_2\gamma_k R_1))^{-1} I_1(v_2\gamma_k r) - K_1(v_2\gamma_k r))\tilde{B}_k \cos(\gamma_k v_2 z_2)\Big] - \alpha_k^2 R_2^{-1}\Big(Y_1(\alpha_k r R_2^{-1}) -$$

$$- Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}) J_1(\alpha_k r R_2^{-1})(J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}))^{-1}\Big)\Big(v_1^{-1}\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_2^{-1}\tilde{S}_5(\alpha_k z_2)\Big)\Big\} M_k \text{ ;}$$

$$U_3^{(1)} = 12C_0(m_1 z_1 n_1^{-1} + m_2 z_2 n_2^{-1}) - 4A_0\theta_8 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{m_1\gamma_k^2(K_1(v_1\gamma_k R_1)(I_1(v_1\gamma_k R_1))^{-1} I_1(v_1\gamma_k r) -$$

$$- K_1(v_1\gamma_k r))\tilde{A}_k \cos(\gamma_k v_1 z_1) - \alpha_k^2 R_2^{-1}(Y_1(\alpha_k r R_2^{-1}) - Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}) J_0(\alpha_k r R_2^{-1})(J_0(\alpha_k R_1 R_2^{-1}))^{-1}) \times$$

$$\times\Big[m_1 n_1^{-1}\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + m_2 n_2^{-1}\tilde{S}_3(\alpha_k z_2)\Big]\Big\} M_k \text{ ;} \tag{2.1}$$

$$Q_{33}^{(1)} = C_{44}\Big\langle 12(1+m_1) l_1\left[v_1^{-1} + s v_2^{-1}\right] C_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\gamma_k^3\Big((1+m_1) l_1 v_1^2 \tilde{A}_k \sin(\gamma_k v_1 z_1)\big[K_0(\gamma_k v_1 r) + K_1(\gamma_k v_1 R_1) \times$$

$$\times (I_1(\gamma_k v_1 R_1))^{-1} I_0(\gamma_k v_1 r)\Big] + (1+m_2) l_2 v_2^2 \tilde{B}_k \cos(\gamma_k v_1 z_1) \times$$

$$\times\left[K_0(\gamma_k v_2 r)+K_1(\gamma_k v_2 R_1)(I_1(\gamma_k v_2 R_1))^{-1} I_0(\gamma_k v_2 r)\right]\Big)-$$

$$-\alpha_k^3 R_2^{-1}\left(Y_1(\alpha_k r R_2^{-1})-Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})J_0(\alpha_k r R_2^{-1})(J_0(\alpha_k R_1 R_2^{-1}))^{-1}\right)\Big((1+m_1)l_1 v_1^{-1}\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)+$$

$$+(1+m_2)l_2 v_2^{-1}\tilde{S}_5(\alpha_k z_1)\Big)\Big\} M_k\Big\rangle;$$

$$Q_{3r}^{(1)}=C_{44}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\gamma_k^3\Big[(1+m_1)\tilde{A}_k v_1 \sin(\gamma_k v_1 z_1)\Big(K_1(\gamma_k v_1 R_1)(I_1(\gamma_k v_1 R_1))^{-1} I_1(\gamma_k v_1 r)-K_1(\gamma_k v_1 r)\Big)+$$

$$+(1+m_2)v_2\tilde{B}_k \sin(\gamma_k v_2 z_2)\Big(K_1(\gamma_k v_2 R_1)(I_1(\gamma_k v_2 R_1))^{-1} I_1(\gamma_k v_2 r)-K_1(\gamma_k v_2 r)\Big)\Big]+$$

$$+\alpha_k^3 R_2^{-1}\left(Y_1(\alpha_k r R_2^{-1})-Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})J_1(\alpha_k r R_2^{-1})(J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}))^{-1}\right)\times$$

$$\times\Big[(1+m_1)n_1^{-1}\tilde{S}_2(\alpha_k z_1)+(1+m_2)n_2^{-1}\tilde{S}_3(\alpha_k z_2)\Big]\Big\} M_k$$

$$\Big(\tilde{S}_5(\alpha_k z_2)=\tilde{N}_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_2)+\operatorname{sh}(\alpha_k z_2);\quad \tilde{A}_k=A_k^{(2)}C_k;\quad \tilde{B}_k=B_k^{(2)}C_k;$$

$$\theta_8=m_1 n_1^{-1}+m_2 n_2^{-1};\quad \theta_+=v_2^{-1}+2v_1^{-1}\Big),$$

де $J_v(x)$, $I_v(x)$ – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу; $K_v(x)$ – функція Макдональда; $Y_v(x)$ – функція Неймана, відповідно, значення $C_{44}, l_1, l_2, m_1, m_2, s$ визначаються з [9].

Напружено-деформований стан у попередньо напруженому півпросторі для нерівних коренів, з врахуванням (1.4) – (1.7) та $z_1=0$, представимо у вигляді [10, 23, 24]

$$Q_{33}^{(2)}=\frac{\omega_3}{R_2-R_1}\int_0^{\infty}F(\eta)J_0(\eta r)\,d\eta;\quad U_3^{(2)}=-\frac{1}{\omega_2}\int_0^{\infty}\frac{F(\eta)}{\eta}J_0(\eta r)\,d\eta;$$
$$U_r^{(2)}=\omega_1\int_0^{\infty}\frac{F(\eta)}{\eta}J_1(\eta r)\,d\eta, \tag{2.2}$$

де

$$\omega_3=c_{44}l_1(1+m_1)(s-s_0);\quad \omega_2=v_1(m_1(s_3-s_2))^{-1};\quad \omega_1=s_0-1;\ s=s_0 l_2 l_1^{-1};$$

$s_2=m_2 v_1(m_1 v_2)^{-1}$; $s_3=(1+m_2)v_1((1+m_1)v_2)^{-1}$; $F(\eta)$ – невідома функція.

Використовуючи розв'язок для штампа (2.1) та задовольняючи другій умові (1.4), другій умові (1.7), знаходимо власні значення задачі (1.4) – (1.7) для $n_1 \neq n_2$:

$$\gamma_k=\frac{\pi k}{H};\quad \alpha_k=\frac{\mu_k R_2}{R_1}\qquad \left(J_1(\mu_k)Y_1(\mu_k R_2 R_1^{-1})-Y_1(\mu_k)J_1(\mu_k R_2 R_1^{-1})=0\right).$$

Із граничних умов (1.7) маємо $C_0=C_k=0$. Також, задовольнивши першу умову (1.5), визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (2.2) з потрійних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^{\infty}F(\eta)J_0(\eta r)d\eta=0\quad (R_2<r<\infty);\quad \int_0^{\infty}\frac{F(\eta)}{\eta}J_0(\eta r)d\eta=f(r)\quad (R_1<r<R_2);$$
$$\int_0^{\infty}F(\eta)J_0(\eta r)d\eta=0\quad (0<r<R_1), \tag{2.3}$$

де $f(r) = \frac{\omega_2}{R_2}\left(\varepsilon + t_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left(\frac{Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}{J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})} J_0(\alpha_k R_2^{-1} r) - Y_0(\alpha_k R_2^{-1} r)\right) M_k\right)$; $t_1 = \frac{m_1 - m_2}{n_2(1+m_1)}$.

Інтегральні рівняння (2.3) зведемо до одного, як у [3], використовуючи розривний інтеграл [21]:

$$\int_0^{\infty} \eta J_n(0,5\eta(R_2 - R_1)) J_n(0,5\eta(R_2 + R_1)) J_0(\eta r) d\eta =$$
$$= \begin{cases} 0, \quad r^2 < R_1^2, \ r^2 > R_2^2; \\ 4P_{n-0,5}^{0,5}(\alpha)(\sqrt{2\pi}(R_1^2 - R_2^2)\sqrt[4]{1-\alpha^2})^{-1}, \ R_1^2 < r^2 > R_2^2, \end{cases} \tag{2.4}$$

де $\alpha = 2(R_2^2 - 2r^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2)^{-1}$, $P_{n-0,5}^{0,5}(\alpha)$ – приєднана функція Лежандра першого роду [4].

Функцію $F(\eta)$ будемо шукати у вигляді [3]

$$F(\eta) = R_2 \sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} J_{2n}\left(0,5\eta(R_2 - R_1)\right) J_{2n}\left(0,5\eta(R_2 + R_1)\right), \tag{2.5}$$

де W_{2n} – невідомі константи.

Підставимо (2.5) у (2.3), враховуючи (2.4), отримаємо інтегральне рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} \int_0^{\infty} J_{2n}(0.5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0,5\eta(R_2 + R_1)) J_0(\eta r) d\eta = f(r). \tag{2.6}$$

Для розв'язку (2.6) використовуємо наступний розклад [2]:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\gamma-\mu-\nu} J_\mu(az) J_\nu(bz) = \frac{a^\mu b^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma + 2m) J_{\gamma+2m}(z) \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\gamma + m + n)\, {}_2F_1(-n, -n+\mu, \nu+1; b^2 a^{-2})}{n!(m-n)!\,\Gamma(m+\mu+1)},$$

де ${}_2F_1(-n, -n+\mu, \nu+1; b^2 a^{-2})$ – гіпергеометрична функція; $\Gamma(z)$ – гамма-функція [4].

Враховуючи значення інтеграла [4]:

$$\int_0^{\infty} J_\mu(az) J_\nu(bz)\, dz =$$
$$= \frac{a^{-\nu-1} b^\nu \Gamma(0,5(\mu+\nu+1))}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(0,5(\mu-\nu+1))} {}_2F_1(0,5(\nu+\mu+1),\ 0,5(\nu-\mu+1),\ \nu+1;\ b^2 a^{-2}). \tag{2.7}$$

Після використання (2.7) в (2.6), помножимо обидві частини (2.6) на

$$\frac{T_{2n}(0,5\alpha)}{\sqrt{R_2^2 - r^2}\sqrt{r^2 - R_1^2}} r dr, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

де $T_{2n}(z)$ – поліном Чебишева першого роду [4].

Проінтегруємо його по r, враховуючи значення інтеграла

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{T_{2n}(0,5\alpha) T_{2k}(0,5\alpha)}{\sqrt{R_2^2 - r^2}\sqrt{r^2 - R_1^2}} r dr = \begin{cases} \pi/2, \quad n = k = 0, \\ \pi/4, \quad n = k > 0, \\ 0, \quad n \neq k. \end{cases}$$

Задовольнивши другу граничну умову (1.5), маємо

$$\int_0^{\infty} F(\eta) \int_{R_1}^{R_2} rJ_0(\mu_k r) J_0(\eta r) dr d\eta = \frac{C_{44}(R_2 - R_1)(1 + m_2)}{\omega_3 v_2} \alpha_k^2 t_1 \left[\frac{Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}{J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})} \tilde{O}_k^{(1)} - \tilde{O}_k^{(2)} \right] M_k \tag{2.8}$$

$$\left(\tilde{O}_1 = \frac{R_2}{\alpha_k} \left[R_1 J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}) - R_2 J_1(\alpha_k) \right];\ \tilde{O}_2 = \frac{R_2}{\alpha_k} \left[R_1 Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1}) - R_2 Y_1(\alpha_k) \right] \right).$$

Підставимо (2.5) у (2.8) і одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{2n} \int_0^{\infty} J_{2n}(0,5\eta(R_2 - R_1)) J_{2n}(0,5\eta(R_2 + R_1)) \int_{R_1}^{R_2} rJ_0(\mu_k r) J_0(\eta r)\, dr d\eta =$$

$$= \frac{C_{44}(R_2 - R_1)(1 + m_2)}{\omega_3 v_2} \alpha_k^2 t_1 \left[\frac{Y_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})}{J_1(\alpha_k R_1 R_2^{-1})} \tilde{O}_k^{(1)} - \tilde{O}_k^{(2)} \right] M_k. \tag{2.9}$$

Для визначення сталих M_i, W_{2i} (i = 0, 1, 2, …), які входять до (2.1) – (2.3), отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що складається із (2.9) та (2.6). Дану систему розв’яжемо методом редукції, враховуючи, що $W_0 = \omega_2 \varepsilon \pi (R_2 - R_1)(8\omega_3 R_2)^{-1}$.

Використавши умову рівноваги (1.8), встановимо зв’язок між осіданням та рівнодіючою навантаження P у вигляді $P = 2\omega_2\omega_3\varepsilon(\pi(R_2 - R_1))^{-1}$.

Визначивши невідомі сталі M_i, W_{2i} (i = 0, 1, 2, …) із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, обчислимо переміщення та напруження як у пружному штампі, так і у пружному півпросторі за формулами (2.1) – (2.2). У наслідок цього, розв’язок представимо у вигляді рядів через нескінченну систему констант, які визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Також відзначимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штампа H.

§3. Числові результати.

В роботі проведено числовий розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом редукції для потенціалу Трелоара при наступних значеннях параметрів: $R_1 = 1 \cdot 10^{-2}$ м, $R_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $\varepsilon = 10^{-4}$, $E = 8 \cdot 10^{-5}$ МПа, $\lambda_1 = 0,7;\ 0,8;\ 0,9;\ 1;\ 1,1;\ 1,2;\ 1,3$, де $R_1 \le r \le R_2$. Алгоритм розв’язку реалізовано у вигляді програми у пакеті Maple 15.

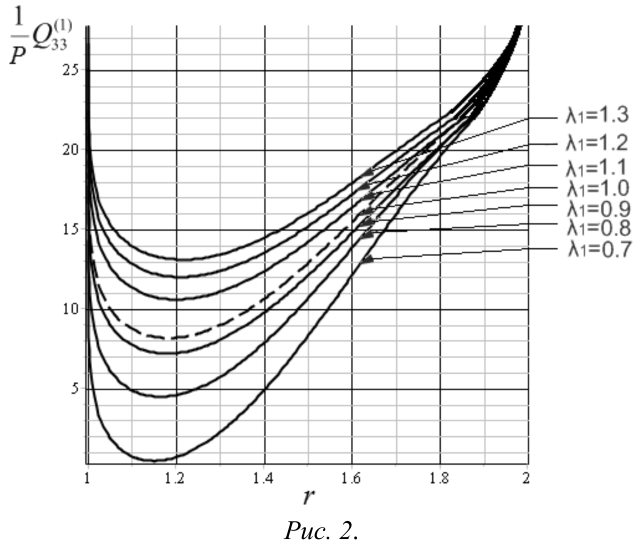

Рис. 2.

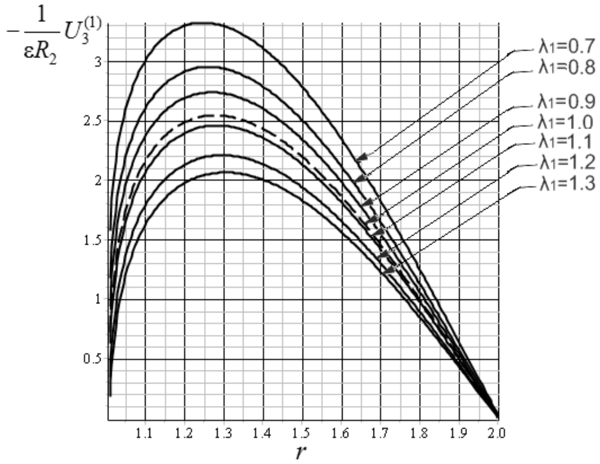

Рис. 3.

На рис. 2, 3 представлені розподіли нормального контактного напруження $\dfrac{1}{P}Q_{33}^{(1)}$ та переміщення $-\dfrac{1}{\varepsilon R_2}U_3^{(1)}$ під кільцевим штампом на межі контакту у безрозмірних координатах. Пунктирна крива відповідає півпростору без початкових напружень ($\lambda_1 = 1$), а суцільна – з початковими напруженнями.

При відсутності початкових напружень ($\lambda_1 = 1$) графік розподілу контактних напружень відповідає відомим раніше розв’язкам контактної задачі про тиск кільцевого штампа на півпростір [5].

Висновок.

На основі числового аналізу можна стверджувати, що при сталому зовнішньому навантаженні початкові напруження суттєво впливають на основні контактні характеристики (особливо для нестисливих тіл). Крім того, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного півпростору, у який втискається пружний кільцевий штамп з початковими напруженнями, полягає у тому, що:

1) початкові напруження у півпросторі призводять при стиску ($\lambda_1 < 1$) до зменшення напружень, а у випадку розтягу ($\lambda_1 > 1$) – до їх збільшення;

2) у випадку переміщень (рис. 3) – навпаки. При стиску ($\lambda_1 < 1$) початкові напруження у півпросторі призводять до збільшення переміщень по абсолютній величині, а у випадку розтягу ($\lambda_1 > 1$) – до їх зменшення.

Таким чином, отримані результати із врахуванням попередньо напруженого стану у випадку контактної взаємодії пружного штампа та пружного півпростору можуть бути використані для регулювання контактних напружень та переміщень при розрахунках конструкцій на міцність.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Статтю присвячено дослідженню задачі контактної взаємодії при тиску пружного циліндричного кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових (кінцевих) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій в рамках лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Чисельний аналіз представлений у вигляді графіків для потенціалу Трелоара.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір.

1. *Александров В.М., Арутюнян Н.Х.* Контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 3. – С. 9 – 16.
2. *Бейтмен П*., *Эрдейи А*. Высшие трансцендентные функции: в 2-х частях. Ч. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 295 с.
3. *Босаков С. В.* Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство // Наука и техника. – 2018. – **17**, № 6. – С. 458 – 464.
4. *Градштейн И.С*., *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – Москва: Физматлит, 1963. – 1100 с.
5. *Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. – Львов: Вища шк., 1981. – 136 с.
6. *Гузь А.Н.* О контактных задачах для упругих сжимаемых тел с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 6. – С. 48 – 52.
7. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия: Saarbrücken LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
8. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчук: Press – Line, 2007. – 795 с.
9. *Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б.* Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. – Київ: Вища шк. – 1995. – 304 с.
10. *Гузь А.Н., Рудницкий В.Б.* Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницький: ПП Мельник, 2006. – 710 с.
11. *Филиппова Л.М*. Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, № 6. – С. 1080 – 1084.
12. *Babich. S.Yu., Dikhtyaruk N.N.* Load Transfer from an Infinite Inhomogeneous Stringer to a Prestressed Elastic Strip Clamped at One Edge // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 6. – P. 708 – 716.
13. *Babich. S.Yu., Dikhtyaruk N.N., Degtyar S.V.* Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55,** N 6. – P. 629 – 635.
14. *Dhaliwal R. S., Singh B. M., Rokne J. G.* Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed Neo-Hooken elastic layer // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18**, N 1. – P. 169 – 179.
15. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 343 – 415.
16. *Guz A.N., Babich S. Yu., Rudnitsky V.B*. Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses (Part I) // Problems of Tribology. – 2002. – N 2. – P. 34 – 51.
17. *Guz A.N*., *Babich S.Yu., Rudnitskiy V.B.* Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51,** N 5. – P. 343 – 371.
18. *Guz A.N., Bagno A.M.* Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 585 – 595.
19. *Guz A.N., Bagno A.M.* Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 1 – 12.
20. *Kurashige M.* Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid // ZAMM. – 1969. – **49**, N 8. – P. 671 – 678.
21. *MacDonald H.M.* Note on the Evaluation of the Certain Integral Containing Bessel’s Functions // Proc. London Math. Soc. – 1909. – **S2–7**, N 1. – P. 142 – 149.
22. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 40 – 53.
23. *Yaretskaya N.A.* Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 378 – 388.
24. *Yaretskaya N.A.* Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 539 – 543.

Надійшла 28.12.2019 Затверджена до друку 18.03.2021