

В.С. Кирилюк, О.І. Левчук

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОГО ЕЛЕКТРОПРУЖНОГО ПРОСТОРУ З ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНИМ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. П. Нестерова, 3, 03057; e-mail: kirilyuk_v@ukr.net*

Abstract. The problem on the electric and stress state in an orthotropic electroelastic space, which contains an arbitrary oriented ellipsoidal inclusion, is considered under uniform force and electric loads. The solution of the problem is obtained using generalized Eshelby's method of the equivalent inclusion for the case of a piezoelectric anisotropic space. The approach approbation for the case of the spheroidal cavity in the electroelastic transversally isotropic material, when the exact solution of the problem is known, confirms its effectiveness. The numerical researches are carried out and stress distribution along of the surface of the triaxial ellipsoidal cavity is studied for different orientations under tension.

Key words: orthotropic piezoelectric material, three-axial ellipsoidal inclusion, arbitrary orientation, generalized method of equivalent inclusion, stress distribution.

Вступ.

Використання п'єзоелектричних (електропружних) матеріалів при створенні перетворювачів енергії чи елементів вимірювальних приладів (датчиків) стимулює вивчення і аналіз напруженого стану в електропружних тілах поблизу різних концентраторів напружень, що підтверджується збільшенням кількості наукових публікацій в області механіки зв'язаних полів.

Дослідженню напружень в п'єзоелектричних тілах присвячені роботи [1 – 23] та інші. Для випадку трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу зі сфероїдальною (еліпсоїд обертання) порожниною чи включенням задача значно спрощується при спеціальній орієнтації концентратора напружень. При співпадінні осі обертання сфероїдальної порожнини чи включення з віссю симетрії трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу в ряді випадків вдається отримати точний розв'язок задачі [6, 14, 19, 20]. В згаданих роботах при знаходженні розв'язку задачі використовується загальне представлення розв'язків системи зв'язаних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропного тіла [19, 21] через гармонійні функції чи використовується узагальнення методу Ешелбі [3, 8] для п'єзоелектричного матеріалу, процедура використання якого для сфероїдального включення при такій орієнтації концентратора напружень суттєво спрощується.

В даній роботі досліджено тривимірну задачу електропружності для ортотропного електропружного матеріалу з довільно орієнтованим тривісним еліпсоїдальним включенням, яке має властивості, відмінні від властивостей основного матеріалу. Для отримання розв'язку задачі використано підхід, оснований на узагальненні методу еквівалентного включення Ешелбі на випадок анізотропного електропружного матеріалу. Інтеграли по поверхні включення, що отримані при розв'язанні задачі, обчислюються на основі квадратурних формул Гауса. Показано, що в частинних випадках (для сфероїдального включення в електропружному трансверсально-ізотропному матеріалі) отримані результати співпадають з даними інших авторів. Досліджено розподіл напружень вздовж поверхні тривісної еліпсоїдальної порожнини в ортотропному п'єзоелектричному матеріалі при розтязі.

1. Основні рівняння і постановка задачі.

Розглянемо ортотропний електропружний простір, який містить довільним чином орієнтоване тривісне еліпсоїдальне включення (неоднорідність) з напівосями a_1, a_2, a_3 , яке має п'єзоелектричні властивості, відмінні від властивостей матриці (основного матеріалу). Припускаємо, що електропружний простір перебуває під дією однорідних силових і електричних полів. Наявність в матеріалі включення з іншими електромеханічними властивостями призводить до появи концентрації силових і електричних полів поблизу включення.

Система рівнянь статички електропружності має наступний вигляд:

рівняння рівноваги (за відсутності об'ємних сил)

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

рівняння вимушеної електростатики

$$D_{i,i} = 0; \quad E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

рівняння стану

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} + e_{nij} \Psi_{,n}; \quad D_i = e_{imn} \varepsilon_{mn} - k_{in} \Psi_{,n}, \quad (3)$$

де σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , D_i , E_i , Ψ – компоненти напружень, деформацій, переміщень, електричних переміщень (індукції), електричного поля і електричний потенціал, відповідно.

У виразах (1) – (3) використано позначення наступних тензорів: C_{ijmn} – пружних модулів; e_{imn} – п'єзомодулів; k_{ij} – діелектричних проникностей. Перший з наведених тензорів вимірюється при постійному значенні електричного поля, два інших – при постійній деформації. Для випадку ортотропного електропружного матеріалу його пружні властивості описуються дев'ятьма незалежними сталими $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$; п'єзомодулі – п'ятьма незалежними сталими $e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{31}, e_{33}$; діелектричні проникності – трьома незалежними сталими k_{11}, k_{22}, k_{33} .

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; \quad C_{2222} = c_{22}; \quad C_{3333} = c_{33}; \quad C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; \quad C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; \quad C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; \quad C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}; \\ e_{113} &= e_{131} = e_{15}; \quad e_{223} = e_{232} = e_{24}; \quad e_{311} = e_{31}; \quad e_{322} = e_{32}; \quad e_{333} = e_{33}; \\ k_{11}; \quad k_{22}; \quad k_{33}. \end{aligned} \quad (4)$$

Всі інші компоненти цих трьох тензорів, що не входять у вирази (4), рівні нулеві. При вивченні задачі, що розглядається, зручно використовувати дві системи координат, одна з яких пов'язана з властивостями ортотропного електропружного матеріалу (її осі направлені вздовж головних осей ортотропії матеріалу), а інша – нова система координат, осі якої направлені вздовж півосей еліпсоїдального включення. Припустимо, що нову систему координат $Ox^1y^1z^1$ отримано з системи $Oxyz$ поворотом навколо осі Ox на кут α . Тоді тензори пружних модулів, п'єзомодулів і діелектричних сталих C_{ijkl}^α , e_{ijk}^α , k_{ij}^α в новій системі координат отримаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних порядків $C_{ijkl}^\alpha = C_{mnpq} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq}$, $e_{ijk}^\alpha = e_{mnp} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp}$, $k_{ij}^\alpha = k_{mn} \alpha_{im} \alpha_{jn}$, де α_{ij} – матриця перетворення виду

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Довільну орієнтацію еліпсоїдальної порожнини можемо отримати, проводячи послідовно обертання на кути α, β, γ навколо осей старої системи координат Ox, Oy, Oz , відповідно. Матрицю перетворень T_{ij} знаходимо наступним чином:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Приведена матриця є результатом послідовного перемноження трьох матриць, що відображають праві обертання навколо кожної з осей координат, які отримано аналогічно виразу (5)

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді нові тензори пружних модулів, п'езомодулів і діелектричних постійних $C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$, $e_{ijk}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$, $k_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ отримаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних порядків

$$C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = C_{mnpk} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}; \quad e_{ijk}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = e_{mnp} T_{im} T_{jn} T_{kp}; \quad k_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = k_{mn} T_{im} T_{jn}.$$

Зауважимо, що тут і далі в тексті використаємо звичайний тензорний запис виразів, тобто будемо мати на увазі, що по індексам, які повторюються, проводиться сумування. Відмітимо також, що, принципово нічого не змінюючи в схемі розв'язку задачі, замість перетворення T_{ij} , пов'язаного з обертанням навколо осей координат Ox, Oy, Oz , можна було б ввести інше перетворення, наприклад, за допомогою кутів Ейлера.

В подальшому для опису напруженого і електричного станів в п'езоелектричному матеріалі з включенням використаємо уніфіковані позначення [8], на основі яких компоненти переміщень і електричний потенціал запишемо у наступному вигляді:

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi, & M = 4, \end{cases} \quad (6)$$

компоненти пружних деформацій і напруженості електричного поля

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi_n, & M = 4, \end{cases} \quad (7)$$

компоненти напружень і електричних переміщень (електричної індукції)

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3; \\ D_i, & J = 4. \end{cases} \quad (8)$$

Також для електропружних модулів маємо

$$E_{IJMn}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{cases} C_{ijmn}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, & J, M = 1, 2, 3; \\ e_{nij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, & J = 1, 2, 3; M = 4; \\ e_{imn}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, & J = 4; M = 1, 2, 3; \\ -k_{in}^{(\alpha,\beta,\gamma)}, & J, M = 4. \end{cases} \quad (9)$$

За допомогою наведених позначень рівняння стану (3) запишемо у вигляді

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn}^{(\alpha,\beta,\gamma)} Z_{Mn}. \quad (10)$$

Введені позначення (6) – (10) будуть використані в подальшому для запису рівнянь еквівалентності.

2. Метод розв'язування.

Напружений і електричний стан в ортотропному п'єзоелектричному матеріалі, що містить еліпсоїдальне включення, представимо на основі суперпозиції основного стану і збуреного, викликаного наявністю еліпсоїдального включення. Для знаходження збуреного стану скористаємось схемою методу еквівалентного включення, узагальненою на випадок електропружності [3, 8], згідно якої рівняння еквівалентності в області включення (неоднорідності) набувають вигляду:

$$E_{iJKl}^{1(\alpha,\beta,\gamma)} (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl}) = E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl} - Z_{Kl}^*) \quad (\bar{x} \in \Omega), \quad (11)$$

де $E_{iJKl}^{1(\alpha,\beta,\gamma)}$, $E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ – електропружні модулі неоднорідності (включення) і матриці відповідно (для випадку порожнини $E_{iJKl}^{1(\alpha,\beta,\gamma)}$ слід спрямувати до нуля); Z_{Mn}^* – значення «вільних» деформацій і напруженості електричного поля, які визначаються з умов еквівалентності включення. Значення Z_{Kl}^0 отримуємо з напружень і електричної індукції (електричних переміщень), що задані в електропружному матеріалі, за допомогою співвідношень $\Sigma_{iJ}^0 = E_{iJKl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} Z_{Kl}^0$. Аналогічно пружному випадку маємо

$$Z_{Mn} = S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)} Z_{Ab}^*, \quad (12)$$

де $S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ – п'єзоелектричний аналог тензора Ешелбі, який залежить від геометричної форми включення і електропружних властивостей матеріалу. Скориставшись Фур'є-образом функції Гріна для нескінченного електропружного простору, представимо його у вигляді

$$S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{E_{iAB}^{(\alpha,\beta,\gamma)}}{4\pi} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{mJin}(\bar{z}) + I_{nJin}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & m = M = 1, 2, 3; \\ \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{4Jin}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & M = 4, \end{cases} \quad (13)$$

де $z_i = \eta_i / a_i$; $\eta_1 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \cos \theta$; $\eta_2 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \sin \theta$. Крім того, маємо $I_{mJin} = z_i z_n K_{MJ}^{-1}(\bar{z})$, де K_{MJ}^{-1} – матриця, яка обернена до матриці: $K_{MJ} = z_i z_n E_{iMjn}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$.

Зі співвідношень (11) – (13) для визначення невідомих значень Z_{Kl}^* приходимо до скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої залежать від подвійних інтегралів виду (13), що не мають будь-яких особливостей в області інтегрування.

Для знаходження напруженого стану в ортотропному електропружному матеріалі з тривісним еліпсоїдальним включенням спочатку потрібно обчислити аналог тензора Ешелбі $S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, а потім визначити з рівнянь еквівалентності (11) значення Z_{Kl}^* . В да-

ній статті обчислення компонентів $S_{MnAb}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ проводилось на основі квадратурних формул Гауса. Після знаходження значень Z_{Kl}^* визначався електричний і напружений стан в області включення. Для пошуку напружень і параметрів електричного поля в точках матриці, що прилягають до еліпсоїдальної границі включення, використовувались наступні формули стрибка напружень і електричної індукції при переході через границю включення [8]:

$$[\Sigma_{ij}] = \Sigma_{ij}^{out} - \Sigma_{ij}^{in} = E_{ijk}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \{ -E_{pQm}^{(\alpha,\beta,\gamma)} Z_{Mn}^* n_p n_l K_{QK}^{-1}(\vec{n}) + Z_{Kl}^* \}, \quad (14)$$

де у виразах (14) n_i – компоненти зовнішньої нормалі до поверхні включення.

3. Аналіз результатів числових досліджень.

Спочатку проведемо тестування підходу, що використовується, на частинному випадку задачі, для спеціальним чином орієнтованої сфероїдальної порожнини в трансверсально-ізотропному електропружному матеріалі. При цьому припускаємо, що вісь обертання сфероїда співпадає з віссю симетрії трансверсально-ізотропного матеріалу. При такій орієнтації осесиметричної порожнини в п'єзоелектричному просторі в [20] отримано точний розв'язок задачі. Згідно [20] розглянемо основний електричний і напружений стани в трансверсально-ізотропному електропружному матеріалі в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \\ \Psi^{(0)} &= 0; \quad D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = 0; \quad D_z^{(0)} = d_{31} \sigma_x^0, \end{aligned} \quad (15)$$

де d_{31} – п'єзоелектрична стала матеріалу. В якості електропружного матеріалу візьмемо п'єзокерамічні матеріали РХЕ-5 і ЦТС-19 [1]. В результаті проведених обчислень для стиснутих сфероїдальних порожнин отримуємо збіг результатів досліджень з даними роботи [20], в якій для цього частинного випадку знайдено точний розв'язок. Так, для співвідношень напівосей сфероїда $c/a = 0,5$ в п'єзокерамічному матеріалі ЦТС – 19 при одноосному розтязі і електричному впливові згідно (15) концентрація напружень σ_x/σ_x^0 на поверхні порожнини досягає значень 1,418 (1,42) в вершині на осі Oy і 1,887 (1,89) в вершині на осі Oz . В наведених значеннях у круглих дужках вказано дані роботи [20]. Для матеріалу РХЕ-5 при тих самих геометричних параметрах порожнини і вихідному стані (15) в вершині порожнини на осі Oy отримуємо значення σ_x/σ_x^0 , рівне 1,293 (1,29), відповідно. Отже, тестування використаного підходу на частинному випадку задачі – випадку трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного простору зі стиснутою сфероїдальною порожниною, що має точний розв'язок, підтверджує його ефективність.

Дослідимо напружений стан у середовищі з тривісною еліпсоїдальною порожниною при одноосному розтязі вздовж осі Oz (при нульових значеннях компонентів електричної індукції)

$$\sigma_z = \sigma_z^0; \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = D_z^{(0)} = 0.$$

Як матеріал матриці розглянемо ортотропний електропружний матеріал $Ba_2NaNb_5O_{15}$, властивості якого (всього 17 незалежних електропружних параметрів) наведено в [2], а також п'єзокерамічний матеріал $BaTiO_3$ [8], який є трансверсально-ізотропним за електропружними властивостями (всього 10 незалежних електропружних сталей). Спочатку розглянемо випадок спеціальної орієнтації порожнини (піввісь тривісної еліпсоїдальної порожнини a_3 направлена вздовж однієї з головних осей ортотропії матеріалу Oz). На рис. 1 показано розподіл напружень $\sigma_{zz}/\sigma_{zz}^0$ вздовж поверхні еліпсоїдальної порожнини в перерізі XZ (від вершини еліпсоїду на осі Ox до його вершини на осі Oz) для матеріалу $Ba_2NaNb_5O_{15}$.

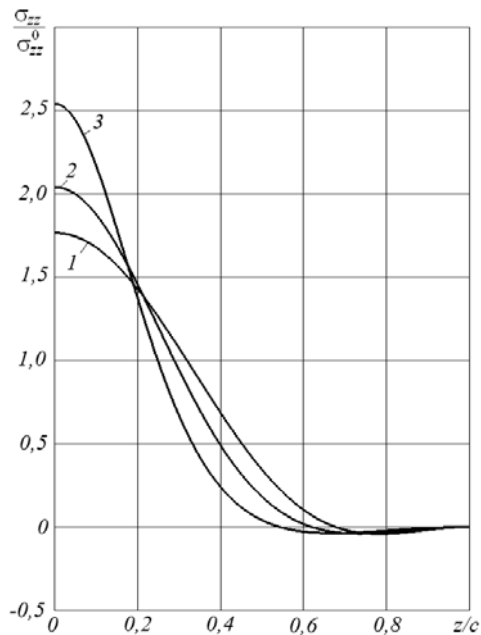


Рис. 1

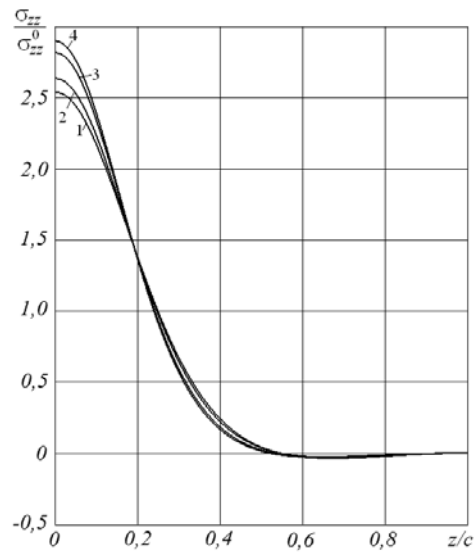


Рис. 2

Лініям 1, 2, 3 на рис. 1 відповідає відношення півосей еліпсоїду $a_2/a_1 = 0,7$, а відношення a_3/a_1 змінювалося і набувало наступних значень: $a_3/a_1 = 0,9; 0,7; 0,5$. Видно, що при зменшенні відношення a_3/a_1 значення концентрації напружень $\sigma_{zz}/\sigma_{zz}^0$ збільшується. На рис. 2 наведено зміну напружень $\sigma_{zz}/\sigma_{zz}^0$ вздовж поверхні порожнини $a_1 = 1; a_2 = 0,7; a_3 = 0,5$ в перерізі XZ при різних орієнтаціях еліпсоїдальної порожнини в ортотропному електропружному матеріалі $Ba_2NaNb_5O_{15}$. Криві 1, 2, 3, 4 відповідають кутам повороту $\alpha = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$.

У розглянутих випадках максимальне значення концентрації напружень має місце при $\alpha = \pi/2$, а мінімальне – при $\alpha = 0$. Зміна орієнтації порожнини призвела до збільшення максимальних значень напружень (для випадків, що розглядаються) приблизно на 14,2 % в матеріалі $Ba_2NaNb_5O_{15}$.

Порівняємо вплив орієнтації еліпсоїдальної порожнини для двох різних п'єзоелектричних матеріалів (ортотропного електропружного $Ba_2NaNb_5O_{15}$ і трансверально-ізотропного п'єзоелектричного $BaTiO_3$). Розглянемо основний напружений стан у вигляді одноосного розтягу вздовж осі Oz . Результати числових досліджень відображено на рис. 3 (в тому ж перерізі XZ).

При розрахунках відношення півосей приймали значення $a_2/a_1 = 0,7$ і $a_3/a_1 = 0,5$. Лінії 1, 2 відповідають ортотроп-

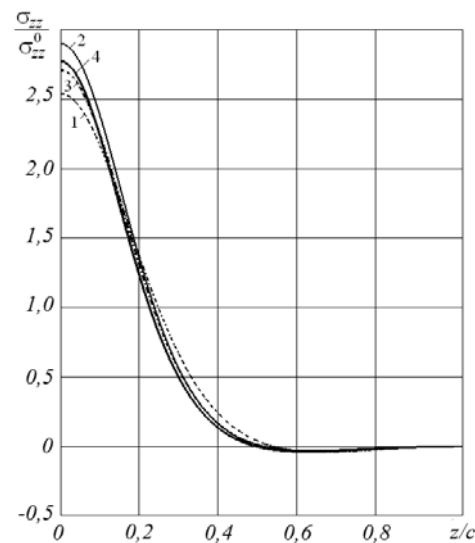


Рис. 3

ному електропружному матеріалу $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$, а лінії 3, 4 – трансверсально-ізотропному матеріалу BaTiO_3 . Штрихові лінії на рис. 3 відповідають випадку $\alpha = 0$ (крива 1 для матеріалу $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ і крива 3 для матеріалу BaTiO_3), а суцільні лінії – випадку $\alpha = \pi/2$ (крива 2 для матеріалу $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ і крива 4 для матеріалу BaTiO_3). Видно, що вплив орієнтації порожнини на напружений стан в матеріалі $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ є більш суттєвим, ніж у матеріалі BaTiO_3 .

Висновок.

Розглянуто задачу про електричний і напружений стан в ортотропному електропружному просторі, що містить довільно орієнтоване еліпсоїдальне включення, при однорідних силових і електричних навантаженнях. Розв'язок задачі отримано за допомогою узагальненого на випадок п'єзоелектричного простору методу еквівалентного включення Ешелбі. Проведено числові розрахунки для випадку еліпсоїдальної порожнини в ортотропному електропружному матеріалі при розтязі. Досліджено вплив геометричних параметрів порожнини, її орієнтації і електропружних властивостей матеріалу на розподіл напружень.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про електричний і напружений стан у ортотропному електропружному просторі, що містить довільно орієнтоване еліпсоїдальне включення, при однорідних силових і електричних навантаженнях. Розв'язок задачі отримано за допомогою узагальненого на випадок п'єзоелектричного анізотропного простору методу еквівалентного включення Ешелбі. Апробація підходу для випадку сфероїдальної порожнини у електропружному трансверсально-ізотропному матеріалі, коли відомо точний розв'язок задачі, підтверджує його ефективність. Проведено числові дослідження та вивчено розподіл напружень у матеріалі вздовж поверхні тривісної еліпсоїдальної порожнини для різних її орієнтацій при розтязі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ортотропний п'єзоелектричний матеріал, тривісне еліпсоїдальне включення, довільна орієнтація, узагальнений метод еквівалентного включення, розподіл напружень.

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-и томах. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка. – 2008. 270 с.
3. Benveniste Y. The determination of the elastic and electric fields in a piezoelectric inhomogeneity // J. Appl. Phys. – 1992. – **72**, N 3. – P. 1086 – 1095.
4. Chen W.Q., Lim C.W. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // Int. J. Fract. – 2005. – **131**, N 3. – P. 231 – 246.
5. Chen W.Q., Lim C.W., Ding H.J. Point temperature solution for penny-shaped crack in an infinite transversely isotropic thermo-piezo-elastic medium // Engin. Anal. Boundary Elements. – 2005. – **29**, N 6. – P. 524 – 532.
6. Chiang C. R., Weng G.J. The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material // Int. J. Fract. 2005. – **134**, N 3-4. – P. 319 – 337.
7. Dai L., Guo W., Wang X. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**, N 6. – P. 1818 – 1831.
8. Dunn M.L., Taya M. Electroelastic field concentrations in and around inhomogeneities in piezoelectric solids // J. Appl. Mech. – 1994. – **61**, N 3. – P. 474 – 475.
9. Hodes A.Y., Loboda V.V. A contact zone approach for an arc crack at the interface between two electrostrictive materials // Int. J. Solids Struct. – 2017. – **128**, N 1. – P. 262 – 271.

10. *Karlash V.L.* Revisiting the Modeling of the Vibrations of High-Power Piezoceramic Resonators Using an Equivalent Circuit // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 2. – P. 176 – 185.
11. *Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V.* Critical Electric Load on a Hinged Thermoviscoelastic Rectangular Plate with Piezoelectric Sensors and Actuators // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 6. – P. 596 – 600.
12. *Khoroshun L.P.* Two-Continuum Mechanics of Dielectrics as the Basis of the Theory of Piezoelectricity and Electrostriction // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – P. 143 – 154.
13. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoceramic Body with a Plane Crack opened by a Rigid Inclusion // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 7. – P. 757 – 768.
14. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Electrostressed State of a Piezoceramic Body with a Paraboloidal Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 9. – P. 1011 – 1020.
15. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – P. 305 – 312.
16. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Body with a Triaxial Ellipsoidal Inclusion Subject to Tension // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 3. – P. 305 – 310.
17. *Mol'chenko L.V., Loos I.I.* Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Isotropic Shells of Revolution Subject to Joule Heating // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 1. – P. 68 – 78.
18. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the General Solution of Statics Equations of the Electroelasticity of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body in Terms of Harmonic Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 7. – P. 623 – 628.
19. *Podil'chuk Yu.N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 2. – P. 132 – 170.
20. *Podil'chuk Yu.N., Myasoedova I.G.* Stress State of a Transversely Isotropic Piezoceramic Body with Spheroidal Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 11. – P. 1269 – 1280.
21. *Wang Z.K., Zheng B.L.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, N 1. – P. 105 – 115.
22. *Zhang T.Y., Gao C.F.* Fracture behaviors of piezoelectric materials // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2004. – **41**, N 1. – 3. – P. 339 – 379.
23. *Zhou Y., Chen W.Q., Lu C.F.* Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections // *Composite Struct.* – 2010. – **92**, N 4. – P. 1009 – 1018.

Надійшла 21.06.2019

Затверджена до друку 15.12.2020