

І. Д. Пелешко<sup>1</sup>, В. В. Юрченко<sup>2</sup>

**ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТАЛЕВИХ СТЕРЖНЕВИХ  
КОНСТРУКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ МОДИФІКОВАНОГО  
МЕТОДУ ПРОЕКЦІЇ ГРАДІЄНТА**

<sup>1</sup>Національний університет «Львівська політехніка»,  
вул. Ст. Бандери 12, 79013, Львів, Україна; e-mail: ipeleshko@hotmail.com

<sup>2</sup>Київський національний університет будівництва та архітектури,  
просп. Повітрофлотський 31, 03680, Київ, Україна; e-mail: vitalina@scadsoft.com

**Abstract.** The parametric optimization problems are considered for the rod constructions and formulated in terms of the nonlinear programming. The method of the objective function of gradient projection into the active constraints surface with simultaneous correction of the constraints violations is used. The equivalent Householder transforms of the resolving equations of the method is proposed. They increase the numerical efficiency of the algorithm which is developed based on the used method. Besides that, the equivalent Givens transforms of the resolving equations are proposed. They ensure acceleration of the iterative searching process in the specified cases described by the paper due to decreasing the volume of calculations. The comparison of the optimization analysis of rod structures confirms the validity of the optimum solutions which are obtained using the proposed modification of the gradient projection method. An efficiency of the proposed improvement of the gradient projection method is also confirmed by the number of iterations and absolute value of the maximum violation in the constraints.

**Key words:** parametric optimization, rod structures, non-linear programming, gradient projection method, finite element method.

**Вступ.**

Прикладні задачі оптимального проектування стержневих конструкцій у деяких випадках формують як задачі параметричної оптимізації, тобто як задачі пошуку таких невідомих параметрів конструкції, які забезпечують екстремальне значення обраного критерію оптимальності у просторі пошуку, що визначається системою обмежень [8]. У цьому випадку оптимізація конструкції здійснюється за допомогою варіювання параметрів конструктивної форми при заданих та незмінних топології стержневої системи, типах поперечних перерізів її елементів, умовах спряження стержнів у вузлах та умовах спряження стержневої системи, а також схемі та величині розрахункових навантажень.

У роботі [12] сформульовані задачі параметричної оптимізації для тонкостінних стержневих систем та розглянуті методи їх розв'язування. Пошук оптимального проектного розв'язку реалізується шляхом варіювання параметрів конструктивної форми, які забезпечують необхідну несучу здатність стержневих елементів конструкції та мінімальне значення вартості її виготовлення.

У роботі [2] описано розробку алгоритму параметричної оптимізації металевих ферм. Параметрична оптимізація реалізується з врахуванням обмежень міцності та загальної стійкості усіх стержневих елементів, а також обмежень жорсткості ферми. Функція

мети представлена залежно від вартості виготовлення конструкцій, що розглядаються, з врахуванням трудомісткості влаштування вузлів ферми та вартості матеріалу.

У роботі [22] розроблено ітераційний алгоритм параметричної оптимізації металевих плоских стержневих систем. Задача оптимізації формулювалась як задача мінімізації ваги конструкції з врахуванням обмежень міцності та переміщень, а також обмежень загальної стійкості. Як змінні проектування розглядалися розміри поперечних перерізів елементів ферми і координати її вузлів. Статичний аналіз конструкції для визначення переміщень вузлів ферми та внутрішніх зусиль в її елементах виконувався за допомогою методу скінченних елементів.

Математична модель задачі параметричної оптимізації конструкцій об'єднує функцію мети, набір змінних проектування, а також обмеження, які у загальному випадку відображають нелінійні залежності між ними [16]. У випадку, якщо функція мети та обмеження математичної моделі є неперервно диференційованими, а область пошуку є гладкою, тоді такі задачі параметричної оптимізації успішно розв'язують за допомогою градієнтних методів [15]. Методи проекції градієнта оперують лише першими похідними або градієнтами функції мети та обмежень і базуються на ітераційній побудові такої послідовності наближень змінних проектування, яка забезпечує збіжність до оптимального розв'язку (оптимальних значень параметрів конструкції) [26].

Окрім того, у рамках числових алгоритмів, які розроблено на основі градієнтних методів, може використовуватись аналіз чутливості [23]. Так, у роботі [21] сформульовано задачу параметричної оптимізації пружних просторових рамних конструкцій з врахуванням обмежень за міцністю та кратними частотами власних коливань. Як змінні проектування розглядалися розміри поперечних перерізів стержневих елементів, а також координати вузлів конструкції, що розглядається. Аналіз чутливості кратних частот коливань виконувався з використанням апарату аналітичного диференціювання по відношенню до змінних проектування. Оптимальне проектне рішення конструкції отримано шляхом розв'язку послідовності задач квадратичного програмування.

Не зважаючи на те, що опубліковано багато наукових праць, які присвячено оптимальному проектуванню, розробка програмного забезпечення для проектування та оптимізації будівельних конструкцій залишається актуальною задачею. У зв'язку з цим основною метою дослідження є розробка математичного забезпечення та числового алгоритму, призначеного для розв'язку задач параметричної оптимізації будівельних конструкцій при орієнтації на програмну реалізацію в системі автоматизованого проектування.

З проведеного вище огляду наукових робіт випливає, що одним із ефективних методів для розв'язку задач параметричної оптимізації будівельних конструкцій є метод проекції градієнта, який і розглядається у статті як предмет дослідження. Висуваються такі задачі дослідження: запропонувати удосконалення методу проекції градієнта, що забезпечує підвищення обчислювальної ефективності алгоритму, що розроблено на його основі, а також прискорення ітераційного пошукового процесу внаслідок зменшення обсягу обчислень.

### **§1. Постановка задачі параметричної оптимізації для стержневих конструкцій.**

Розглянемо задачу параметричної оптимізації стержневої конструкції, яка може бути сформульована таким чином: знайти оптимальні значення параметрів геометричної схеми конструкції, розмірів поперечних перерізів її елементів, а також зусиль попереднього напруження, що вводяться у зайві в'язі стержневої системи, які забезпечують екстремальне значення заданого критерію оптимальності, і за яких конструкція задовольняє усім вимогам норм за необхідною несучою здатністю та жорсткістю. Припускається, що топологія стержневої системи, типи поперечних перерізів її елементів, типи спряжень стержнів у вузлах, умови спряження стержневої системи, а також схема і величина зовнішніх навантажень є заданими та незмінними.

Сформульована задача параметричної оптимізації може бути представлена в термінах задачі нелінійного програмування – знайти невідомі значення параметрів конструкції  $\vec{X} = \{X_t\}^T$ ,  $t = \overline{1, N_X}$ , які забезпечують найменше значення заданого критерію оптимальності:

$$f^* = f(\bar{X}^*) = \min_{\bar{X} \in \mathfrak{S}_N} f(\bar{X}) \quad (1.1)$$

у допустимій області простору пошуку  $\mathfrak{S}$ , що визначається такою системою обмежень:

$$\psi(\bar{X}) = \{\psi_\kappa(\bar{X}) = 0 \mid \kappa = \overline{1, N_{EC}}\}; \quad (1.2)$$

$$\varphi(\bar{X}) = \{\varphi_\eta(\bar{X}) \leq 0 \mid \eta = \overline{N_{EC} + 1, N_{IC}}\}, \quad (1.3)$$

де  $\bar{X}$  – вектор змінних проектування (невдомих параметрів конструкції);  $N_X$  – кількість змінних проектування;  $f$ ,  $\psi_\kappa$ ,  $\varphi_\eta$  – неперервні функції векторного аргументу;  $\bar{X}^*$  – оптимальний розв’язок або оптимальна точка (вектор оптимальних значень параметрів конструкції);  $f^*$  – оптимальне значення функції мети;  $N_{EC}$  – кількість обмежень-рівностей  $\psi_\kappa(\bar{X})$ , які визначають гіперплощини допустимих розв’язків;  $N_{IC}$  – кількість обмежень-нерівностей  $\varphi_\eta(\bar{X})$ , які описують допустиму область в просторі пошуку  $\mathfrak{S}$ .

Як компоненти вектору *змінних проектування* можуть розглядатись невідомі параметри геометричної схеми стержневої конструкції  $\bar{X}_G = \{X_{G,\chi}\}^T$ ,  $\chi = \overline{1, N_{X,G}}$ , невідомі розміри поперечних перерізів її несучих елементів  $\bar{X}_{CS} = \{X_{CS,\alpha}\}^T$ ,  $\alpha = \overline{1, N_{X,CS}}$ , а також невідомі зусилля попереднього напруження  $\bar{X}_{PS} = \{X_{PS,\beta}\}^T$ ,  $\beta = \overline{1, N_{X,PS}}$ , що вводяться у задані зайві в’язі стержневої системи, де  $N_{X,G}$  – загальна кількість невідомих параметрів геометричної схеми стержневої системи;  $N_{X,CS}$  – загальна кількість невідомих розмірів поперечних перерізів;  $N_{X,PS}$  – загальна кількість невідомих зусиль попереднього напруження;  $N_{X,G} + N_{X,CS} + N_{X,PS} = N_X$ .

Як *функція мети* (1.1) може розглядатись деякий заданий техніко-економічний показник якості (маса матеріалу, вартість матеріалу, вартість виготовлення та зведення тощо), беручи до уваги можливість формулювання його аналітичного виразу, який описує функціональну залежність від змінних проектування  $\bar{X}$ .

До *системи обмежень* (1.2) – (1.3) необхідно залучити обмеження несучої здатності (обмеження-нерівності за міцністю та стійкістю), сформульовані для усіх розрахункових перерізів усіх несучих елементів конструкції, що підлягає дії усіх розрахункових комбінацій навантажень першої групи граничних станів. Окрім того, до системи обмежень (1.2) – (1.3) також необхідно включити обмеження переміщень (обмеження-нерівності за жорсткістю), які сформульовано для заданих вузлів стержневої системи, що підлягає дії усіх розрахункових комбінацій другої групи граничних станів. Додаткові вимоги, які описують конструктивні, технологічні та експлуатаційні особливості досліджуваної будівельної конструкції, також можуть бути розглянуті в складі системи обмежень (1.2) – (1.3).

Розрахункові внутрішні зусилля, які діють у перерізах несучих елементів конструкції, що використовуються в обмеженнях-нерівностях за міцністю та стійкістю системи обмежень (1.2) – (1.3), розглядаються як *змінні стану* залежно від змінних проектування  $\bar{X}$  і можуть обчислюватись з використанням такої системи лінійних рівнянь методу скінченних елементів [11]:

$$\mathbf{K}(\bar{X}_{CS}) \times \bar{z}_{ULS,k} = \bar{p}_{ULS,k}(\bar{X}_{PS}) \quad k = \overline{1, N_{LC}}, \quad (1.4)$$

де  $\mathbf{K}(\bar{X}_{CS})$  – матриця жорсткості скінченно-елементної моделі стержневої конструкції, яка повинна формуватись залежно від невідомих (змінних) розмірів поперечних перерізів тримальних елементів конструкції  $\bar{X}_{CS}$ ;  $\bar{p}_{ULS,k}(\bar{X}_{PS})$  – вектор-стовпець

вузлових навантажень для  $k$ -ї розрахункової комбінації навантажень першої групи граничних станів, який повинен формуватись залежно від невідомих (змінних) зусиль попереднього напруження  $\vec{X}_{PS}$ ;  $\vec{z}_{ULS,k}$  – результуючий вектор-стовпець вузлових переміщень для  $k$ -ї розрахункової комбінації навантажень першої групи граничних станів,  $\vec{z}_{ULS,k} = \mathbf{Z}_{FEM,k}^{ULS}(\vec{X}_{PS}, \vec{X}_{CS})$ ;  $N_{LC}$  – кількість розрахункових комбінацій навантажень першої групи граничних станів. Таким чином, розрахункові зусилля (поздовжня сила, згинальні моменти і поперечні сили) можуть бути обчислені залежно від результуючого вектору-стовпця вузлових переміщень  $\vec{z}_{ULS,k}$  для кожного  $i$ -го розрахункового перерізу  $j$ -го стержневого скінченного елементу конструкції, що підлягає дії  $k$ -ї комбінації навантажень першої групи граничних станів.

Розрахункові горизонтальні та вертикальні переміщення вузлів стержневої конструкції, що використовуються в обмеженнях жорсткості системи обмежень (1.2) – (1.3), також розглядаються як *змінні стану* залежно від змінних проектування  $\vec{X}$  і можуть обчислюватись з використанням такої системи лінійних рівнянь методу скінчених елементів [11]:

$$\mathbf{K}(\vec{X}_{CS}) \times \vec{z}_{SLS,k} = \vec{p}_{SLS,k}(\vec{X}_{PS}) \quad k = \overline{1, N_{LC}}, \quad (1.5)$$

де  $\vec{p}_{SLS,k}(\vec{X}_{PS})$  – вектор-стовпець вузлових навантажень для  $k$ -ї розрахункової комбінації навантажень другої групи граничних станів, який повинен формуватись залежно від невідомих (змінних) зусиль попереднього напруження  $\vec{X}_{PS}$ ;  $\vec{z}_{SLS,k}$  – результуючий вектор-стовпець вузлових переміщень для  $k$ -ї розрахункової комбінації навантажень другої групи граничних станів,  $\vec{z}_{SLS,k} = \mathbf{Z}_{FEM,k}^{SLS}(\vec{X}_{PS}, \vec{X}_{CS})$ . Таким чином, розрахункові горизонтальні та вертикальні переміщення вузлів можуть бути обчислені залежно від результуючого вектору-стовпця вузлових переміщень  $\vec{z}_{SLS,k}$  для кожного  $m$ -го вузла скінченно-елементної моделі стержневої системи, що підлягає дії  $k$ -ї розрахункової комбінації навантажень другої групи граничних станів.

## §2. Модифікований метод проекції градієнта для розв'язку задач параметричної оптимізації.

Задача параметричної оптимізації, яку сформульовано в термінах задачі нелінійного програмування (1.1) – (1.3), може бути розв'язана з використанням методу проекції градієнта. *Метод проекції градієнта функції мети на поверхню активних обмежень при одночасній ліквідації нев'язок в порушених обмеженнях* забезпечує ефективний пошук розв'язку задач нелінійного програмування, що виникають при оптимальному проектуванні будівельних конструкцій [1, 13].

Метод проекції градієнта оперує лише першими похідними або градієнтами функції мети (1.1) та обмежень (1.2) – (1.3) математичної моделі. Даний метод базується на ітераційній побудові такої послідовності (2.1) наближень змінних проектування, яка забезпечує збіжність до оптимального розв'язку (оптимальних значень параметрів конструкції):

$$\vec{X}_{t+1} = \vec{X}_t + \Delta \vec{X}_t, \quad (2.1)$$

де  $\vec{X}_t = \{X_t\}^T$ ,  $t = \overline{1, N_X}$  – поточне наближення до оптимального розв'язку  $\vec{X}^*$ , останнє задовольняє обмеження-рівності (1.2) та обмеження-нерівності (1.3) і характеризується екстремальним значенням цільової функції (1.1);  $\Delta \vec{X}_t = \{\Delta X_t\}^T$  – вектор приросту для поточних значень змінних проектування  $\vec{X}_t$  (рис. 1);  $t$  – індекс ітерації. Початкова точка ітераційного процесу пошуку  $\vec{X}_{t=0}$  може прийматись як інженерна оцінка допустимого проектного рішення конструкції.

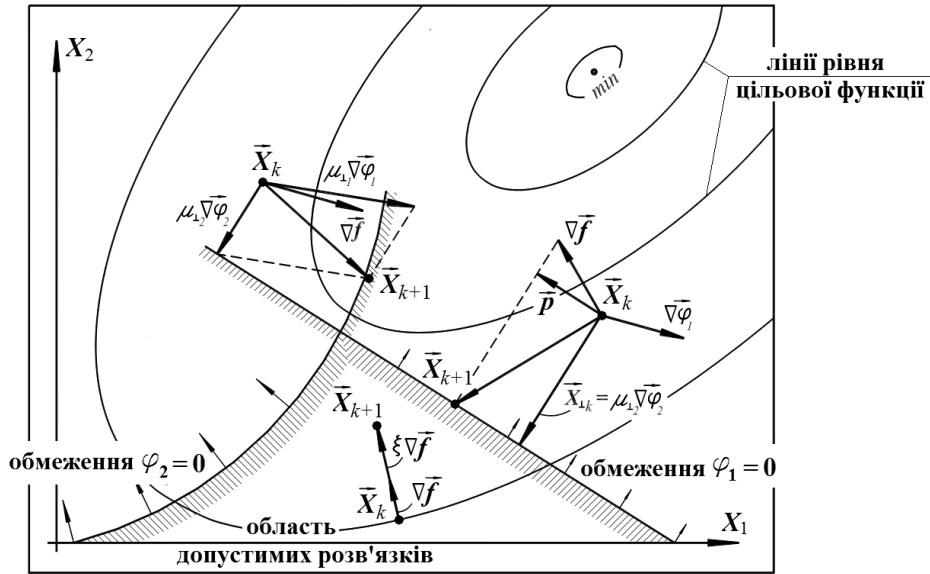


Рис. 1

На кожній ітерації слід враховувати лише активні обмеження системи обмежень (1.2) – (1.3). Множина номерів активних обмежень  $A$  для поточного наближення  $\bar{X}_t$  (поточного проектного рішення конструкції) до оптимального розв'язку визначається як:

$$A = \kappa \cup \eta; \quad \kappa = \left\{ \kappa \mid \left| \psi_{\kappa}(\bar{X}_t) \right| \geq -\varepsilon \right\}; \quad \eta = \left\{ N_{EC} + \eta \mid \varphi_{\eta}(\bar{X}_t) \geq -\varepsilon \right\},$$

де  $\varepsilon$  – мале додатне число, яке вводиться тут для зменшення осциляцій при русі вздовж поверхні активного обмеження.

Вектор приросту  $\Delta \bar{X}_t$  для поточних значень змінних проектування  $\bar{X}_t$  визначається з використанням такого рівняння:

$$\Delta \bar{X}_t = \Delta \bar{X}_t^{\perp} + \Delta \bar{X}_t^{\parallel}, \quad (2.2)$$

де  $\Delta \bar{X}_t^{\perp}$  – вектор, який обчислюється з умови ліквідації нев'язок у порушених обмеженнях;  $\Delta \bar{X}_t^{\parallel}$  – вектор, який визначається з умови покращення значення функції мети. Вектори  $\Delta \bar{X}_t^{\parallel}$  і  $\Delta \bar{X}_t^{\perp}$  спрямовано відповідно паралельно і перпендикулярно до підпростору, базисом якого є вектори градієнтів лінійно-незалежних обмежень, а саме:

$$\left( \Delta \bar{X}_t^{\perp} \right)^T \Delta \bar{X}_t^{\parallel} = 0. \quad (2.3)$$

Значення нев'язок у порушених обмеженнях, які обчислено для поточних значень змінних проектування  $\bar{X}_t$ , представляються вектором нев'язок як:

$$V = \left( \psi_{\kappa}(\bar{X}) \forall \kappa \in \kappa; \varphi_{\eta}(\bar{X}) \forall \eta \in \eta \right).$$

Введемо до розгляду множину  $L$ ,  $L \subseteq A$  таких номерів обмежень, для яких градієнти, які обчислено для поточного наближення  $\bar{X}_t$  до оптимального розв'язку, є лінійно-незалежними.

Вектор  $\Delta \bar{X}_t^{\perp}$  визначається з використанням такого рівняння:

$$\Delta \bar{X}_{\perp}^t = [\nabla \varphi] \bar{\mu}_{\perp}, \quad (2.4)$$

де  $[\nabla \varphi]$  – матриця, яка складається з елементів виду  $\frac{\partial \psi_{\kappa}}{\partial X_t}$  і  $\frac{\partial \varphi_{\eta}}{\partial X_t}$ , де  $t = \overline{1, N_X}$ ,  $\kappa \in L$ ,  $\eta \in L$ ;  $\bar{\mu}_{\perp}$  – вектор-стовпець, який визначає приріст змінних проектування з умови ліквідації нев'язок у порушених обмеженнях і обчислюється як описано нижче.

Для ліквідації нев'язок  $V$  у порушених обмеженнях вектор  $\Delta \bar{X}_{\perp}^t$  у першому наближенні має задовольняти теорему Тейлора [10] для гладкої (неперервно диференційованої) функції багатьох змінних в околі точки  $\bar{X}_t$  для кожного обмеження з множини  $L$ , а саме:

$$-V = [\nabla \varphi]^T \Delta \bar{X}_{\perp}^t. \quad (2.5)$$

Підстановкою (2.4) в (2.5) отримаємо систему рівнянь для обчислення вектор-стовпця  $\bar{\mu}_{\perp}$ :

$$[\nabla \varphi]^T [\nabla \varphi] \bar{\mu}_{\perp} = -V. \quad (2.6)$$

Вектор  $\Delta \bar{X}_{\parallel}^t$  обчислюється з використанням такого рівняння:

$$\Delta \bar{X}_{\parallel}^t = \xi \times \bar{p}_{\nabla f} = \xi (\nabla \bar{f} - [\nabla \varphi] \bar{\mu}_{\parallel}), \quad (2.7)$$

де  $\nabla \bar{f}$  – вектор градієнта функції мети у поточній точці  $\bar{X}_t$  (для поточного наближення змінних проектування);  $\bar{p}_{\nabla f}$  – проекція вектору градієнта функції мети на поверхню активних обмежень у даній точці  $\bar{X}_t$ ;  $\bar{\mu}_{\parallel}$  – вектор-стовпець, який визначає приріст змінних проектування з умови покращення значення функції мети. Вектор-стовпець  $\bar{\mu}_{\parallel}$  може обчислюватись наближено методом найменших квадратів з використанням такого рівняння:

$$[\nabla \varphi] \bar{\mu}_{\parallel} \approx \nabla \bar{f}, \quad (2.8)$$

або з рівняння, яке наведено нижче:

$$[\nabla \varphi]^T [\nabla \varphi] \bar{\mu}_{\parallel} = [\nabla \varphi]^T \nabla \bar{f}, \quad (2.9)$$

де  $\xi$  – параметр кроку, який обчислюється з умови досягнення бажаного приросту функції мети  $\Delta f$  при русі в напрямку антиградієнту функції мети. Приріст  $\Delta f$  приймається в розмірі 5...25% від поточного значення цільової функції  $f(\bar{X}_t)$ :

$$\Delta f = \xi (\nabla \bar{f})^T \nabla \bar{f}; \quad \xi = \frac{\Delta f}{(\nabla \bar{f})^T \nabla \bar{f}}, \quad (2.10)$$

де для випадку мінімізації (1.1) значення приросту  $\Delta f$  і параметру кроку  $\xi$  мають від'ємні значення. Параметр кроку  $\xi$  може також обчислюватись з використанням залежності, наведеної нижче:

$$\xi = \frac{\Delta f}{(\bar{p}_{\nabla f})^T \nabla \bar{f}}, \quad (2.11)$$

яка впливає з умови досягнення бажаного приросту функції мети  $\Delta f$  при русі в напрямку проекції антиградієнта функції мети на поверхню активних обмежень. У роботах [10, 18] зазначається, що параметр кроку  $\xi$  може обиратись на базі числових експериментів, які повинні у такому випадку реалізовуватись для кожного типу конс-

трукції індивідуально.

З використанням (2.4) і (2.7) рівняння (2.2) перепишемо у такому вигляді:

$$\Delta \vec{X}_t = [\nabla \varphi] \vec{\mu}_\perp + \xi (\nabla \vec{f} - [\nabla \varphi] \vec{\mu}_\parallel), \quad (2.12)$$

або

$$\Delta \vec{X}_t = \xi \nabla \vec{f} + [\nabla \varphi] (\vec{\mu}_\perp - \xi \vec{\mu}_\parallel), \quad (2.13)$$

де вектори-стовпці  $\vec{\mu}_\perp$  і  $\vec{\mu}_\parallel$  обчислюються з використанням (2.6) і (2.8) або (2.9).

Як бачимо, в процесі формування матриці градієнтів активних обмежень  $[\nabla \varphi]$ , що використовується в (2.6) і (2.8), або (2.9), необхідно відбирати лінійно-незалежні обмеження системи (1.2) – (1.3). Відбір лінійно-незалежних обмежень пропонується здійснювати шляхом еквівалентних перетворень розв'язувальних рівнянь методу з використанням невивроженої матриці перетворень  $\mathbf{H}$ , для якої піддіагональні елементи в матриці  $\mathbf{H}[\nabla \varphi]$  є нульовими. Крім того,

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I}; \quad (2.14)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t \times \dots \times \mathbf{H}_i \times \dots \times \mathbf{H}_2 \times \mathbf{H}_1, \quad (2.15)$$

де  $\mathbf{I}$  – одинична матриця;  $t$  – кількість лінійно-незалежних градієнтів активних обмежень;  $\mathbf{H}_i$  – матриця перетворень така, що  $\mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i = \mathbf{I}$ , а в матриці  $\mathbf{H}_i \times \mathbf{H}_{i-1} \times \dots \times \mathbf{H}_2 \times \mathbf{H}_1 \times [\nabla \varphi]$  піддіагональні елементи є нульовими для стовпців з номерами  $\overline{1, i}$ . Таким умовам задовольняє ортогональна матриця елементарного відбиття (перетворення Хаусхолдера) [9, 24].

Розглянемо у подальшому алгоритм формування множини  $\mathbf{L}$  і побудови матриці  $\mathbf{H}[\nabla \varphi]$ .

1. На початку приймаємо, що  $i = 0$ ,  $\mathbf{L} = \emptyset$  і  $[\nabla \Phi]_0 = [\nabla \varphi]$ , де  $[\nabla \varphi]$  – матриця, яка складається зі стовпців-градієнтів усіх активних обмежень. Усі стовпці матриці  $[\nabla \Phi]_0$  позначаємо як «невикористані» (або лінійно-незалежні).

2.  $i = i + 1$ .

3. Серед усіх невикористаних стовпців матриці  $[\nabla \Phi]_{i-1}$ , що відповідають обмеженням-рівностям (1.2), обираємо один  $j$ -й стовпець, що характеризується екстремальним значенням деякого заданого критерію (наприклад, як такий критерій можна розглядати максимум  $\ell_j^2 = \sum_{k=i}^{N_x} g_{kj}^2$ , де  $g_{kj}$  – компоненти  $j$ -го стовпця матриці  $[\nabla \Phi]_{i-1}$ ).

Одночасно усі  $k$ -і стовпці матриці  $[\nabla \Phi]_{i-1}$ , для яких виконується нерівність –  $\ell_k^2 \leq \varepsilon_1$ , мають позначатися як «використані», тут  $\varepsilon_1$  – мале додатне число. У випадку, коли обмеження-рівності (1.2) відсутні, або ж усі вони позначені як «використані», відбір  $j$ -го стовпця необхідно виконувати серед усіх «невикористаних» стовпців матриці  $[\nabla \Phi]_{i-1}$ , які відповідають обмеженням-нерівностям (1.3). Якщо  $\ell_j^2 \leq \varepsilon_1$ , тоді формування множини  $\mathbf{L}$  і матриці  $\mathbf{H}[\nabla \varphi]$  завершено.  $\mathbf{H}[\nabla \varphi] = [\nabla \varphi]_{i-1}$ . У випадку, коли  $\ell_j^2 \leq \varepsilon_1$  і  $i = 1$  (тобто  $\mathbf{L} = \emptyset$ ), тоді в системі обмежень (1.2) – (1.3) існує протиріччя. В іншому випадку необхідно здійснити перехід до наступного кроку.

4. Номер  $k$ -го обмеження, що відповідає  $j$ -му стовпцю, необхідно залучити до множини  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{L} + \{k\}$ .

5. Обчислюємо  $[\nabla\Phi]_i = H_i[\nabla\Phi]_{i-1}$ . Множення доцільно виконувати лише для «невикористаних» стовпців. Необхідно зазначити, що при використанні перетворень Хаусхолдера цю операцію можна здійснити без явного формування матриці  $H_i$  [24]. У той же час, матриця  $[\nabla\Phi]_i$  може бути розміщена на місці матриці  $[\nabla\Phi]_{i-1}$  без виділення додаткової пам'яті.

6. Якщо  $i=1$ , тоді  $[\nabla\Phi]_i = \bar{q}_j$ , де  $\bar{q}_j$  –  $j$ -й вектор-стовпець матриці  $[\nabla\Phi]_i$ . При  $i > 1$  матриця  $[\nabla\Phi]_i$  формується розширенням матриці  $[\nabla\Phi]_{i-1}$  за допомогою вектора-стовпця  $\bar{q}_j$ . Позначаємо  $j$ -й стовпець матриці  $[\nabla\Phi]_i$  як «використаний» і здійснюємо перехід до кроку 2.

З використанням перетворень Хаусхолдера, які висвітлено вище, здійснюється покрокове формування трикутної структури ненульових елементів матриці  $H[\nabla\varphi]$ . При цьому рівняння (2.6) і (2.8) можна переписати у вигляді:

$$([\nabla\varphi]^T H^T)(H[\nabla\varphi])\bar{\mu}_\perp = -V; \quad (2.16)$$

$$H[\nabla\varphi]\bar{\mu}_\parallel \approx H\nabla f. \quad (2.17)$$

Тепер для обчислення вектор-стовпців  $\bar{\mu}_\perp$  і  $\bar{\mu}_\parallel$  достатньо в рівняннях (2.16) і (2.17) здійснити прямі та зворотні підстановки, які вимагають невеликого обсягу обчислень.

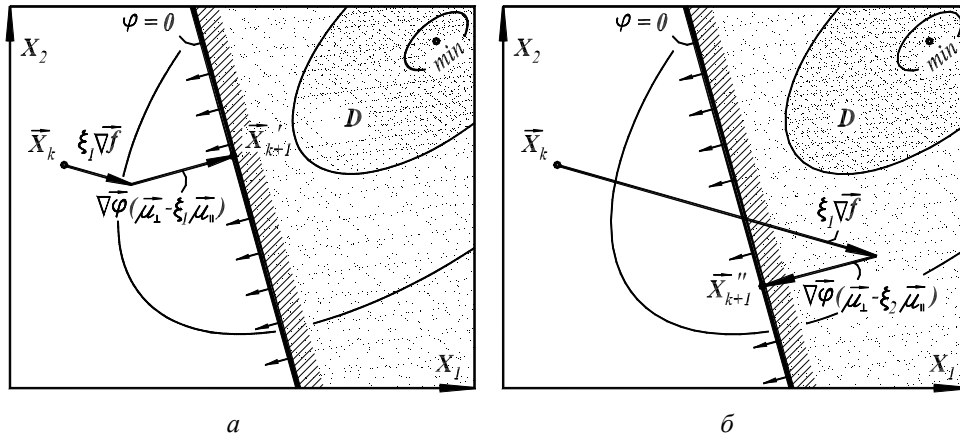


Рис. 2

Для пришвидшення збіжності ітераційного алгоритму мінімізації, наведеного вище, зі складу матриці  $H[\nabla\varphi]$  необхідно вилучити  $h$ -і стовпці [14], які відповідають тим обмеженням-нерівностям (1.3), для яких задовольняється така нерівність:

$$\mu_{\perp h} - \xi \times \mu_{\parallel h} > 0. \quad (2.18)$$

Дійсно, при  $\mu_{\perp h} - \xi_2 \mu_{\parallel h} > 0$  відбувається крок на поверхню активних обмежень із області  $\mathfrak{Z}$  допустимих рішень з одночасним погіршенням значення цільової функції (рис. 2, б). У той же час, для випадку, коли:

$$\mu_{\perp h} - \xi_1 \mu_{\parallel h} < 0, \quad (2.19)$$



здійснюється як покращення значення функції мети, так і крок на поверхню активних обмежень із області недопустимих рішень (рис. 2, а).

При виключенні з матриці  $\mathbf{H}[\nabla\varphi]$   $h$ -х стовпців, що відповідають тим обмеженням-нерівностям, для яких виконується умова (2.18), отримуємо матрицю  $(\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red}$  з порушеною (нетрикутною) структурою ненульових елементів. Множина  $\mathbf{L}$  номерів лінійно-незалежних активних обмежень трансформується у множину  $\mathbf{L}_{red}$ , а вектор нев'язок порушених обмежень  $\mathbf{V}$  перетворюється на вектор  $\mathbf{V}_{red}$  відповідно.

Для відновлення трикутної структури матриці  $(\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red}$  з нульовими піддіагональними елементами можуть використовуватись перетворення Гівенса (повороти Гівенса) [3, 24]. Перетворення Гівенса для матриці  $(\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red}$  полягають у побудові такої квадратної матриці  $\mathbf{G}_{wz}$ , для якої відповідний  $wz$ -й елемент матриці  $\mathbf{G}_{wz}(\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red}$  перетворюється на нуль (рис. 3) [17]. Оскільки за визначенням  $c^2 + s^2 = 1$ , звідси випливає, що:

$$(\mathbf{G}_{wz})^T \mathbf{G}_{wz} = \mathbf{I}. \quad (2.20)$$

Очевидним способом обчислення  $c$  і  $s$  для  $d$ -го ненульового піддіагонального елемента і  $a$ -го діагонального елемента є:

$$c = \frac{a}{r}; \quad s = \frac{d}{r}, \quad (2.21)$$

де

$$r = \sqrt{a^2 + d^2}. \quad (2.22)$$

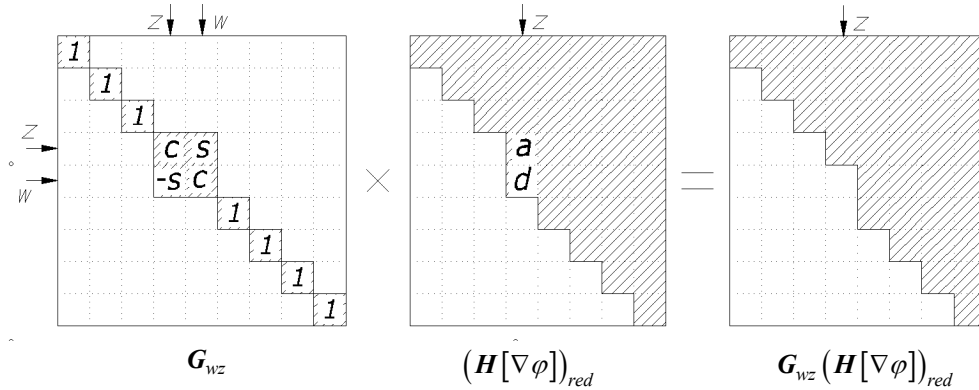


Рис. 3

Матриця Гівенса  $\mathbf{G}$  може бути обчислена аналогічно до матриці  $\mathbf{H}$  з використанням такого рівняння:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_\gamma \times \dots \times \mathbf{G}_i \times \dots \times \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1, \quad (2.23)$$

де  $\gamma$  – кількість перетворень Гівенса. Тобто, перетворення Гівенса необхідно виконувати декілька разів (при різних значеннях  $z$  і  $w$ ), доки матриця  $\mathbf{G}_{wz}(\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red}$  не набуде усіх нульових піддіагональних елементів (для прикладу, який наведено на рис. 3,  $\gamma = 5$ ).

З урахуванням перетворень Гівенса рівняння (2.16) і (2.17) для обчислення векторів-стовпців  $(\vec{\mu}_\perp)_{red}$  і  $(\vec{\mu}_\parallel)_{red}$  перепишемо у такому вигляді:

$$\left([\nabla\varphi]^T \mathbf{H}^T\right)_{red} \mathbf{G}^T \mathbf{G} (\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red} (\bar{\mu}_\perp)_{red} = -\mathbf{V}_{red}; \quad (2.24)$$

$$\mathbf{G} (\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red} (\bar{\mu}_\parallel)_{red} \approx \mathbf{G} \mathbf{H} \nabla \bar{f}, \quad (2.25)$$

а розв'язувальні рівняння методу проекції градієнта (2.12) і (2.13) – так, як це показано нижче:

$$\Delta \bar{X}_t = (\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red} (\bar{\mu}_\perp)_{red} + \xi \left( \nabla \bar{f} - (\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red} (\bar{\mu}_\parallel)_{red} \right), \quad (2.26)$$

або

$$\Delta \bar{X}_t = \xi \nabla \bar{f} + (\mathbf{H}[\nabla\varphi])_{red} \left( (\bar{\mu}_\perp)_{red} - \xi (\bar{\mu}_\parallel)_{red} \right). \quad (2.27)$$

Таким чином, запропоноване удосконалення методу проекції градієнта функції мети на поверхню активних обмежень з одночасною ліквідацією нев'язок у порушених обмеженнях полягає у застосуванні еквівалентних перетворень розв'язувальних рівнянь методу за допомогою перетворень Хаусхолдера. Еквівалентні перетворення з використанням матриці  $\mathbf{H}$ , які представлено рівняннями (2.24) і (2.25) для розв'язувальних рівнянь методу проекції градієнта (2.6) і (2.8), підвищують обчислювальну ефективність алгоритму, розробленого на основі описаного методу.

Окрім того, запропоноване удосконалення методу проекції градієнта полягає у застосуванні еквівалентних перетворень розв'язувальних рівнянь методу за допомогою поворотів Гівенса. Еквівалентні перетворення з використанням матриці  $\mathbf{G}$ , які представлено рівняннями (2.24) і (2.25), забезпечують пришвидшення збіжності ітераційного пошукового процесу (2.1) внаслідок зменшення обсягу обчислень для випадку, коли враховується нерівність (2.18).

Зазначимо, що в рамках запропонованих еквівалентних перетворень довжини векторів градієнтів цільової функції (1.1), а також обмежень (1.2) – (1.3) не змінюються, що забезпечує надійність оптимізаційного алгоритму.

При використанні ітераційної процедури пошуку оптимальної точки (2.1), яка описана вище, важливим питанням є визначення критеріїв зупинки. Беручи до уваги геометричну суть методу найшвидшого спуску, припускаємо, що в допустимій точці  $\bar{X}_t$  компонента вектора приросту змінних проектування  $\Delta \bar{X}_\parallel^t$  при наближенні до оптимального розв'язку задачі нелінійного програмування (1.1) – (1.3) повинна прямувати до нуля:

$$\|\Delta \bar{X}_\parallel^t\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_X} (\Delta X_{\parallel,i}^t)^2} < \varepsilon_1, \quad (2.28)$$

де  $\varepsilon_1$  – мале додатне число.

З врахуванням (2.28) сформулюємо такі критерії зупинки в ітераційній пошуковій процедурі (2.1) [25].

*Критерій зупинки 1:* коли градієнт цільової функції у поточній точці  $\bar{X}_t$  (за поточних значень змінних проектування) набуває близьке до нуля значення, що вказує на екстремальний характер поточного наближення, при цьому порушені обмеження відсутні:

$$\Sigma = \emptyset, \quad -\varepsilon \geq \nabla \bar{f} \geq +\varepsilon, \quad (2.29)$$

де  $\Sigma$  – множина номерів порушених обмежень,  $\Sigma = \{s \mid |\psi_s(\bar{X}_t)| > \varepsilon; \varphi_s(\bar{X}_t) > \varepsilon\}$ .

*Критерій зупинки 2:* коли проекція градієнта цільової функції у поточній точці  $\bar{X}_t$  на поверхню активних обмежень набуває близьке до нуля значення, градієнт цільової функції є перпендикулярним до поверхні активних обмежень, що свідчить про неможливість подальшого покращення значення функції мети, при цьому порушені обмеження відсутні:

$$\Sigma = \emptyset; \quad -\varepsilon \geq \bar{p} \geq +\varepsilon. \quad (2.30)$$

*Критерій зупинки 3:* коли у поточному наближенні  $\bar{X}_t$  до оптимального розв'язку кількість активних обмежень  $t$  дорівнює кількості змінних проектування  $N_X$  і усім активним обмеженням притаманний характер  $\varepsilon$ -активного, тобто не порушеного і для якого виконується нерівність (2.12):

$$\Sigma = \emptyset; t = N_X; \mu_{\perp f} - \xi \times \mu_{\parallel f} < 0, \forall f \in L. \quad (2.31)$$

Наведений критерій зупинки ітераційного пошукового процесу (2.1) відповідає випадку розташування поточного наближення  $\bar{X}_t = (X_t^t)^T$ ,  $t = \overline{1, N_X}$  у точці перетину обмежень (т. зв., вершині), коли не потрібно ліквідувати нев'язки в обмеженнях і неможливо покращити значення функції мети.

*Критерій зупинки 4:* коли значення цільової функції на двох послідовних ітераціях практично однакові за відсутності порушених обмежень:

$$\Sigma = \emptyset; f(\bar{X}_{t-1}) \approx f(\bar{X}_t). \quad (2.32)$$

### §3. Числові приклади.

Для оцінки ефективності нових методів та алгоритмів необхідно, як правило, виконати їх порівняння з альтернативними методами і алгоритмами, що висвітлені у літературі та використовують різноманітні числові методи оптимізації. Критерії для реалізації такого порівняння описані, зокрема, в роботах [10, 4]. Багато з цих критеріїв, такі як робастність, обсяг обчислень функцій, вимоги до оперативної пам'яті, кількість ітерацій тощо не можуть бути використані через відсутність відповідної інформації у технічній літературі. Тому оцінка ефективності удосконаленого методу проекції градієнта функції мети на поверхню активних обмежень з одночасною ліквідацією нев'язок в порушених обмеженнях, наведеного вище, буде базуватись на порівнянні результатів оптимізаційних розрахунків, отриманих з використанням запропонованої модифікації методу проекції градієнта, з результатами, представленими в літературі, які широко використовуються для верифікації та тестування нових методів. Вихідні дані та математичні моделі розглянутих нижче задач параметричної оптимізації стержневих конструкцій приймалися аналогічними до тих, що описані в літературі.

**3.1. Параметрична оптимізація 10-ти елементної консольної ферми.** Задача параметричної оптимізації 10-тиелементної консольної ферми (рис. 4) широко викорис-

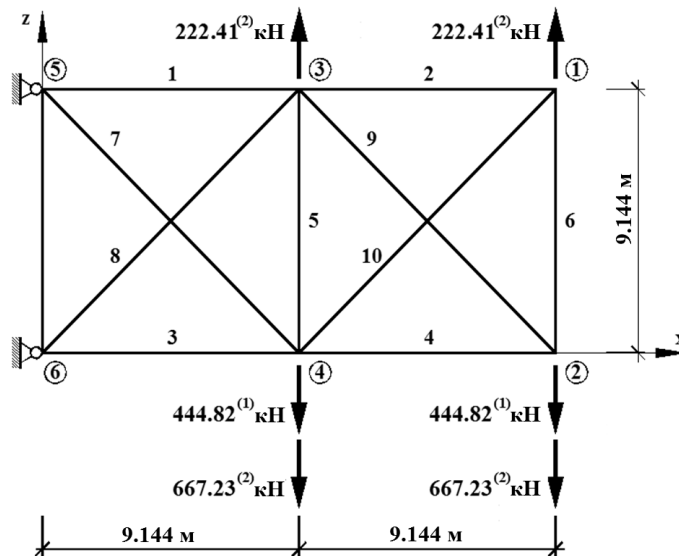


Рис. 4

товувалась в літературі [10, 7, 21, 22] для порівняння різноманітних методів оптимізації. Ферма, що розглядається, підлягає дії двох випадків навантаження (рис. 4). Вихідні дані для оптимізації ферми: об'ємна вага матеріалу ферми  $\rho g = 125,254 \text{ кН/м}^3$ ; модуль пружності  $E = 68970,78 \text{ МПа}$ ; безвимірний коефіцієнт, що використовується для обчислення моментів інерції перерізів для кожного елемента ферми  $\beta = 1,0$  ( $I_i = \beta b_i^2$ ); нижня межа значення площі поперечного перерізу для всіх елементів ферми  $A_{\min} = 0,64516 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ; значення допустимих напружень для всіх елементів ферми  $\sigma_{\max} = 172,46 \text{ МПа}$ . Як початкове наближення для змінних площ поперечних перерізів усіх стержнів ферми, що розглядається, приймалось стартове значення  $A_0 = 6,4516 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

**3.1.1. Оптимізація параметрів перерізів елементів ферми.** Як змінні проектування розглядалися змінні площі поперечних перерізів для кожного елемента ферми  $\vec{X} = (A_i)^T$ ,  $i = \overline{1, 10}$ . Задача параметричної оптимізації формулювалась як задача пошуку оптимальних значень площ поперечних перерізів для кожного елемента ферми  $\vec{b} = (b_i)^T$ ,  $i = \overline{1, 10}$ , які забезпечують мінімум ваги ферми за наявності обмежень на нижню межу для значень змінних площ поперечних перерізів стержнів ферми, обмежень на напруження в усіх стержнях ферми, представлені залежно від поздовжніх зусиль, що діють у них, а також обмежень лінійних переміщень усіх вузлів ферми. Граничне вертикальне  $z_{\max}$  і горизонтальне  $x_{\max}$  переміщення для кожного вузла ферми приймалися як  $x_{\max} = z_{\max} = 0,0508 \text{ м}$ . Вимірність задачі оптимізації складала 10 змінних проектування і 36 обмежень.

Таблиця 1

Номер стержня, $i$	Початкове значення змінної проектування	Оптимальна площа поперечного перерізу для $i$ -го елемента ферми, $\times 10^{-4} \text{ м}^2$			
		Випадок навантаження 1		Випадок навантаження 2	
		Робота [10]	Дана робота	Робота [10]	Дана робота
1	6,4516	193,7479996	197,0312484	152,0255024	151,8842240
2	6,4516	0,645160000	0,645160000	0,645160000	0,645160000
3	6,4516	150,1545384	149,6078266	163,0770932	163,1232003
4	6,4516	98,61915760	98,22918330	92,5352988	92,75779895
5	6,4516	0,645160000	0,645160000	0,645160000	0,645160000
6	6,4516	3,590315400	3,559530885	12,70836168	12,70787948
7	6,4516	48,18248428	48,02706763	80,0062916	79,87214746
8	6,4516	136,7610168	135,7825567	82,9030600	82,79629923
9	6,4516	139,4706888	138,9183389	130,870706	131,1797334
10	6,4516	0,645160000	0,645160000	0,645160000	0,645160000
<b>Вага ферми, кН</b>	<b>1,8666727</b>	<b>22,51500912</b>	<b>22,51356469</b>	<b>20,80022802</b>	<b>20,80595725</b>
Кількість активних обмежень		4	5	4	6
Номери активних обмежень		–	2, 5, 10, 13, 31	–	2, 5, 10, 17, 31, 32
Модуль максимальної нев'язки в порушених обмеженнях		$0,27 \cdot 10^{-4}$	$ \delta\psi_{13}  = 2,041 \times 10^{-13}$	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$ \delta\psi_{17}  = 2,824 \times 10^{-12}$

Для 10-ти елементної консольної ферми, що розглядається, були отримані оптимальні розв'язки з оптимальною вагою  $G^* = 22,514$  кН і  $G^* = 20,806$  кН відповідно для першого та другого випадків навантаження (табл. 1). При цьому як початкове наближення розглядалось початкове проектне рішення ферми з вагою  $G^0 = 1,867$  кН.

В оптимальній точці активними були 6 обмежень, а саме обмеження на мінімальну площу для 2-го, 5-го і 10-го стержневого елемента ферми, обмеження на напруження для 7-го елемента ферми, а також обмеження на переміщення вздовж вертикальної осі для 1-го і 2-го вузлів ферми.

Таблиця 2

Джерело	Випадок навантаження 1		Випадок навантаження 2	
	Тільки обмеження на напруження	Усі обмеження	Тільки обмеження на напруження	Усі обмеження
Дана робота	7,086663425	22,51356469	7,404064841	20,8059573
Робота [10]	7,086783276	22,51500912	7,408610546	20,8003614
Робота [22]	7,087005686	22,58284417	7,404251310	20,8039200
Робота [21]	7,086783276	22,58199901	7,404162346	20,8038755
Робота [7]	7,2149804	22,59685600	–	22,5065575

Порівняння результатів оптимізаційних розрахунків для 10-ти елементної ферми, отриманих у статті [10] і в даній роботі, наведено в табл. 1. У табл. 2 представлено порівняння результатів оптимізаційних розрахунків для ферми, отриманих з використанням запропонованої модифікації градієнтного методу, з результатами, представленими в літературі [7, 10, 21, 22]. Для обох випадків навантаження ітераційний процес пошуку оптимальної точки припинявся внаслідок того, що приріст змінних проектування на двох послідовних ітераціях був менший від 0,0001 за відсутності порушених обмежень.

**3.1.2. Оптимізація параметрів геометричної схеми ферми.** Задача параметричної оптимізації формулювалась як задача пошуку оптимальних значень координат усіх незакріплених вузлів ферми, які забезпечують мінімум ваги ферми при обмеженнях на нормальні напруження в усіх стержнях ферми, представлених залежно від поздовжніх зусиль, що діють у них. Як змінні проектування розглядались невідомі координати усіх незакріплених вузлів ферми  $\bar{X} = (x_i, z_i)^T$ ,  $i = \bar{1}, 4$ . Площі поперечних перерізів усіх стержнів ферми приймалися постійними і рівними  $129,032 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Висувались також додаткові обмеження на верхню та нижню межу для значень координат незакріплених вузлів ферми:

$$-1 - \frac{x_i}{x_i^{start} - \Delta_{max}} \leq 0; \quad \frac{x_i}{x_i^{start} + \Delta_{max}} - 1 \leq 0; \quad -1 - \frac{z_i}{z_i^{start} - \Delta_{max}} \leq 0; \quad \frac{z_i}{z_i^{start} + \Delta_{max}} - 1 \leq 0,$$

де  $x_i^{start}$  і  $z_i^{start}$  – відповідна координата  $i$ -го незакріпленого вузла ферми для початкового її проектного рішення (рис. 4);  $\Delta_{max}$  – допустима варіація координат вузлів ферми. Розглядались дві оптимізаційні задачі з допустимими варіаціями координат  $\Delta_{max} = 4,0$  м і  $\Delta_{max} = 8,0$  м відповідно. Вимірність задачі параметричної оптимізації складала 8 змінних проектування і 26 обмежень.

Оптимальні значення координат незакріплених вузлів ферми для 10-ти елементної консольної ферми, що розглядається, представлено на рис. 5. В оптимальній точці активними були додаткові обмеження на верхню та нижню межу для значень координат усіх незакріплених вузлів ферми. Оптимальна вага ферми складала 22,21 кН (для допустимої варіації координат вузлів  $\Delta_{max} = 4,0$  м) і 15,77 кН (для допустимої варіації координат вузлів  $\Delta_{max} = 8,0$  м).

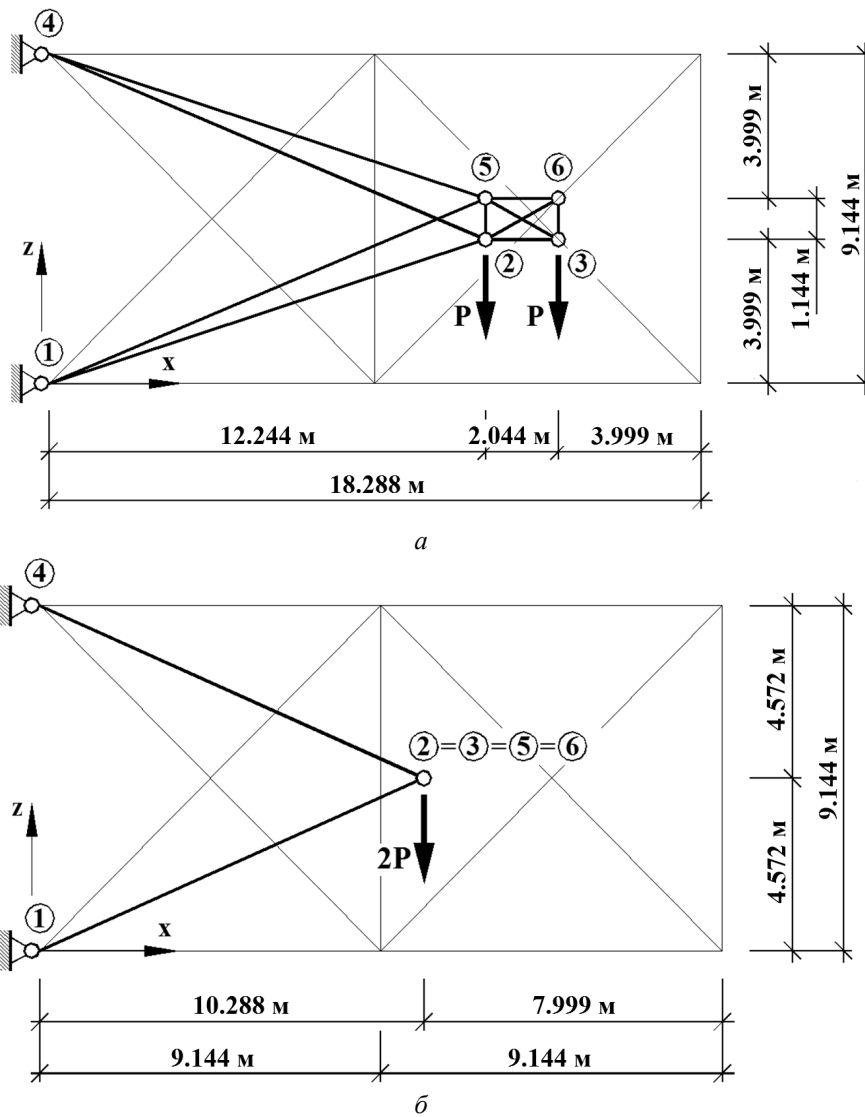


Рис. 5

Задачі параметричної оптимізації 10-тиелементної ферми були також розглянуті в роботах [5, 6], де отримані їх оптимальні рішення, що характеризуються оптимальною вагою в розмірі 23,85 кН і 15,95 кН, відповідно.

**3.2. Оптимізація параметрів геометричної схеми і перерізів 19-ти елементної консольної ферми.** На рис. 6 представлена 19-ти елементна консольна ферма, що проектується на дію вертикального вузлового навантаження  $P=10$  кН. Вихідні дані для оптимізації ферми такі: об'ємна вага матеріалу ферми  $\gamma_g=98,1$  кН/м<sup>3</sup>; модуль пружності  $E=200016,1$  МПа; нижня і верхня межа для значень площ поперечних перерізів елементів ферми – відсутні; значення допустимих нормальних напружень для усіх елементів ферми  $s_{\max}=300$  МПа; граничне вертикальне переміщення для 11-го вузла ферми  $d_{\max}=0,050$  м.

Задача оптимізації параметрів геометричної схеми ферми і параметрів поперечних перерізів її елементів формулювалась як пошук оптимальних значень вертикальних

координат для усіх вузлів нижнього поясу ферми, а також оптимального значення площі поперечних перерізів для усіх стержневих елементів ферми. Як змінні проектування розглядалися невідома площа поперечного перерізу  $A$ , а також невідомі вертикальні координати вузлів  $z_i$  нижнього поясу,  $\vec{X} = (A, z_i)^T$ ,  $i = \overline{7,11}$ . Як функція мети приймався мінімум маси ферми. Система обмежень включала перевірки нормальних

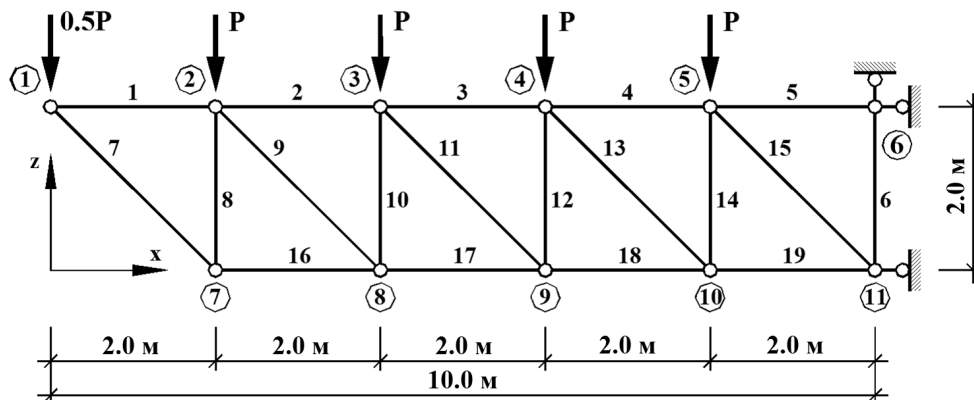


Рис. 6

напружень, які для всіх елементів ферми представлялись залежно від поздовжніх зусиль в стержнях і допустимого значення нормальних напружень  $\sigma_{\max}$ . Для усіх вузлів нижнього поясу ферми формулювались такі додаткові обмеження:

$$-1 - \frac{z_i}{z_i^{\text{start}} - \delta_{\max}} \leq 0; \quad \frac{z_i}{z_i^{\text{start}} + H - \varepsilon} - 1 \leq 0; \quad \forall i = \overline{7,11},$$

де  $H$  – висота панелі ферми,  $H = 2$  м;  $\varepsilon$  – мале додатне число,  $\varepsilon = 10^{-7}$ . Вимірність розглянутої задачі параметричної оптимізації склала 6 змінних проектування та 29 обмежень.

На рис. 7, а представлено оптимальні значення вертикальних координат вузлів нижнього поясу ферми. Оптимальна площа поперечних перерізів для усіх стержнів ферми отримана рівною  $4,0626 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ . Оптимальна вага розглянутої ферми склала 1369,81 Н. Для оптимального проектного рішення ферми характерно 6 активних обмежень, а саме обмеження на значення нормальних напружень для 5-го, 6-го, 17-го, 18-го і 19-го елементів ферми, а також додаткове обмеження на вертикальне переміщення 11-го вузла ферми. Задача параметричної оптимізації 19-ти елементної ферми розглядалась також у працях [5, 6], де було отримане оптимальне рішення ферми, яке характеризувалось оптимальною вагою в розмірі 1843,74 Н.

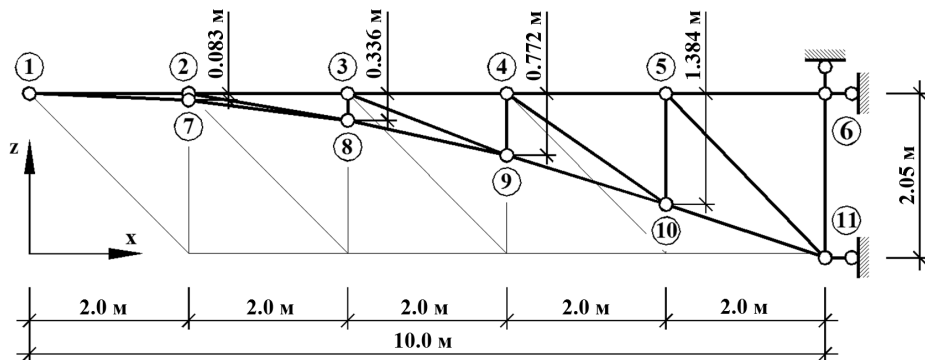
Задача оптимізації параметрів геометричної схеми ферми та параметрів поперечних перерізів її елементів формулювалась також як задача пошуку оптимальних значень горизонтальних і вертикальних координат усіх вузлів нижнього поясу ферми, а також оптимального значення площі поперечних перерізів для усіх стержневих елементів ферми. Як змінні проектування розглядалися невідома площа  $A$  поперечних перерізів елементів ферми, а також невідомі горизонтальні  $x_i$  та вертикальні  $z_i$  координати вузлів нижнього поясу ферми,  $\vec{X} = (A, x_i, z_i)^T$ ,  $i = \overline{7,11}$ . Як функція мети розглядався мінімум ваги ферми. Система обмежень включала обмеження на значення нормальних напружень, сформульовані для усіх стержнів ферми і представлені залежно від поздовжніх зусиль, що діють в елементах ферми, і допустимого значення нормальних напружень  $\sigma_{\max}$ . Для усіх вузлів нижнього поясу ферми формулювались такі додаткові обмеження:

$$-1 - \frac{x_i}{x_i^{start} - L + \varepsilon} \leq 0; \quad \frac{z_i}{z_i^{start} + L - \varepsilon} - 1 \leq 0; \quad \forall i = 7 \dots 10;$$

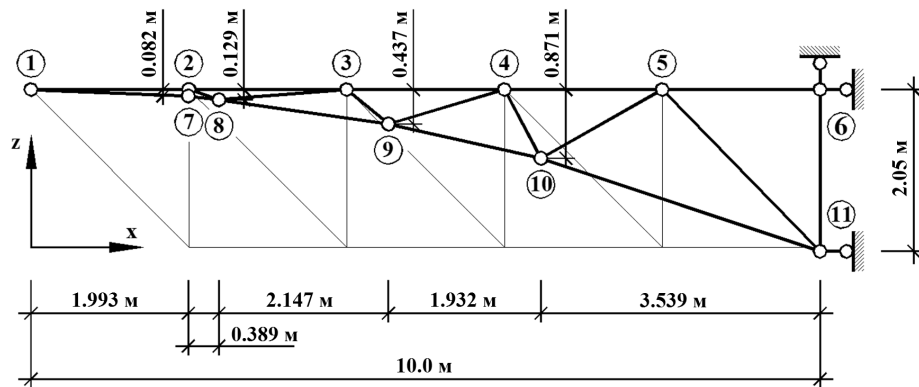
$$-1 - \frac{z_i}{z_i^{start} - \delta_{max}} \leq 0; \quad \frac{z_i}{z_i^{start} + H - \varepsilon} - 1 \leq 0; \quad \forall i = 7 \dots 11,$$

де  $L$  – довжина панелі ферми,  $L=2$  м. Вимірність розглянутої задачі параметричної оптимізації складала 10 змінних проектувань та 37 обмежень.

На рис. 7, б представлено оптимальні значення горизонтальних і вертикальних координат вузлів нижнього поясу ферми. Оптимальна площа поперечних перерізів для усіх стержнів ферми складала  $4,0626 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ . Оптимальна вага розглянутої ферми складала 1286,19 Н. Для оптимального проектного рішення ферми характерно 8 активних обмежень, а саме обмеження на значення нормальних напружень для 2-го, 3-го, 4-го,



a



б

Рис. 7

5-го, 7-го, 16-го і 19-го елементів ферми, а також додаткове обмеження на переміщення 11-го вузла ферми. Задача параметричної оптимізації 19-ти елементної ферми розглядалась також у роботах [5, 6], де отримано оптимальне проектне рішення ферми, що характеризувалось оптимальною вагою в розмірі 1754,44 Н.

### Висновки.

Розглянуто задачі параметричної оптимізації стержневих конструкцій, які сформульовано у вигляді задач нелінійного програмування. Для їх розв'язку використано метод проєкції градієнта функції мети на поверхню активних обмежень з одночасною ліквідацією нев'язок в порушених обмеженнях.



Запропоновані еквівалентні перетворення Хаусхолдера для розв'язувальних рівнянь методу, які підвищують обчислювальну ефективність алгоритму, розробленого на основі методу оптимізації, що розглядається. Також запропоновано еквівалентні перетворення Гівенса для розв'язувальних рівнянь методу, що розглядається, які забезпечують в описаних у даній статті випадках пришвидшення ітераційного пошукового процесу внаслідок зменшення обсягу обчислень. При цьому довжини векторів градієнтів цільової функції та обмежень залишаються незмінними, що підвищує надійність оптимізаційного алгоритму.

Наведене у статті порівняння результатів оптимізаційних розрахунків підтвердило достовірність оптимальних розв'язків, які отримано з використанням запропонованої модифікації методу проекції градієнта. Ефективність запропонованого удосконалення методу оптимізації, що розглядається, також підтверджується отриманими абсолютними значеннями максимальних нев'язок в обмеженнях за невеликої кількості ітерацій.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто задачу параметричної оптимізації стержневих конструкцій, які формуються в термінах задачі нелінійного програмування. Використовується метод проекції градієнта функції мети на поверхню активних обмежень з одночасною ліквідацією нев'язок в порушених обмеженнях. Запропоновано еквівалентні перетворення Хаусхолдера для розв'язувальних рівнянь методу оптимізації. Вони забезпечують обчислювальну ефективність алгоритму, розробленого на основі градієнтного методу. Окрім того, запропоновано еквівалентні перетворення Гівенса для розв'язувальних рівнянь методу, що розглядається, які забезпечують в описаних у статті випадках пришвидшення ітераційного процесу пошуку оптимального розв'язку внаслідок зменшення обсягу обчислень. Порівняння результатів оптимізаційних розрахунків стержневих систем підтверджує достовірність оптимальних розв'язків, які отримано при використанні запропонованої модифікації градієнтного методу. Ефективність запропонованого удосконалення методу оптимізації також підтверджується отриманими абсолютними значеннями максимальних нев'язок в обмеженнях за невеликої кількості ітерацій.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** параметрична оптимізація, стержневі конструкції, нелінійне програмування, метод проекції градієнта, метод скінченних елементів.

1. Гуляев В.И., Баженов В.А., Кошкин В.Л. Методы оптимизации в строительной механике. – Киев: УМКВО, 1989. – 192 с.
2. Alekseytsev A.V. Evolutionary optimization of steel trusses with the nodal joints of rods // Magazine of Civil Engineering. – 2013. – **40**, N 5. – P. 28 – 37. (rus).
3. Bindel D., Demmel J., Kahan W., Marques O. On computing Givens rotations reliably and efficiently // ACM Transactions on Mathematical Software. – 2002. – **28**, N 2. – P. 206 – 238.
4. Crowder N.P., Denbo R.S., Mulvey J.M. Reporting computational experiments in mathematical programming // Mathematical Programming. – 1978. – **15**. – P. 316 – 329.
5. Czarnecki S. Optimal structural design using a genetic algorithm // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – 1999. – VII. – P. 201 – 210.
6. Czarnecki S. Multithreaded genetic program in truss shape optimization // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – 2000. – VIII. – P. 556 – 560.
7. Dobbs M.W., Nelson R.B. Application of optimality criteria to automated structural design // AIAA J. – 1976. – **14**, N 10. – P. 1436 – 1443.
8. Filatov G.V. Mass Optimization of a Compressed Cylindrical Shell with Limited Life // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 3 – P. 331 – 335.
9. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. – Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1996. – 694 p.
10. Haug E.J., Arora J.S. Applied Optimal Design: Mechanical and Structural Systems. – New York: John Wiley & Sons, 1979. – 520 p.
11. Huebner K.H., Dewhirst D.L., Smith D.E., Byrom T.G. The Finite Element Method for Engineers. – New York: John Wiley & Sons, 2001. – 744 p.
12. Kibkalo A., Lebedeva M., Volkov M. Methods of parametric optimization of thin-walled structures and parameters which influence on it // MATEC Web of Conferences. – 2016. – N 53. – No. 01051.

13. *Koshkin V.L., Serpak I.O.* Optimal design of flexible rod structural members // *Strength of Materials*. – 1993. – 25. – P 834 – 840.
14. *Peleshko I., Yurchenko V.* An improved gradient-based method to solve parametric optimisation problems of the bar structures // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-Technical Collected Articles*. – Kyiv: KNUBA, 2020. – **104**. – P. 265 – 288.
15. *Perelmuter A.V., Yurchenko V.V.* Parametric optimization of steel shell towers of high-power wind turbines // *Procedia Engineering*. – 2013. – N 57. – P. 895 – 905.
16. *Permyakov V.O., Yurchenko V.V., Peleshko I.D.* An optimum structural computer-aided design using hybrid genetic algorithm // *Proc. of the Int. Conf. "Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures"*. – London: Taylor & Francis, 2006. – P. 819 – 826.
17. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Givens Method. Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing, 3<sup>rd</sup> ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 1235 p.
18. *Reklaitis G.V., Ravindran A., Ragsdell K.M.* Engineering Optimization. Methods and Applications. – New York: John Wiley & Sons, 2006. – 688 p.
19. *Rizzi P.* The optimization of structures with complex constraints via a general optimality criteria method. Ph. D. thesis. Stanford University. – Palo Alto, CA, 1976. – 171 p.
20. *Schmit L.A., Miura H.A.* New structural analysis. Synthesis capability. ACCESS 1 // *AIAA J.* – 1976. – **14**, N 5. – P. 661 – 671.
21. *Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A.* Optimal design of 3D frame structures taking into account the stress and multiple natural frequency constraints // *Magazine of Civil Engineering*. – 2016. – **61**, N 1. – P. 74 – 81.
22. *Serpik I.N., Alekseytsev A.V., Balabin P.Yu., Kurchenko N.S.* Flat rod systems: optimization with overall stability control // *Magazine of Civil Engineering*. – 2017. – **76**, N 8. – P. 181 – 192.
23. *Kuci E., Henrotte F., Duysinx P., Geuzaine C.* Design sensitivity analysis for shape optimization based on the Lie derivative // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2017. – **317**. – P. 702 – 722.
24. *Wilkinson J.H., Reinsch C.* Handbook for Automatic Computation. Volume II: Linear Algebra. – Berlin: Springer-Verlag, 1971. – 441 p.
25. *Yurchenko V., Peleshko I.* Improved gradient projection method for parametric optimisation of bar structures // *Magazine of Civil Engineering*. – 2020. – **98**, N 6. – Article No. 9812.
26. *Yurchenko V.V., Peleshko I.D.* Searching for optimal pre-stressing of steel bar structures based on sensitivity analysis // *Archives of Civil Engineering*. – 2020. – **66**, N 3. – P. 525 – 540.

Надійшла 16.03.2020

Затверджена до друку 18.03.2021