

К. Г. Хорошев¹, Ю. А. Глушенко²

**ЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ СТАН П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО ПІВПРОСТОРУ
З ОТВОРАМИ ТА ТРІЩИНАМИ ПІД ДІЄЮ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ**

¹Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
пр. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: khoroshev.kostiantyn@lil.kpi.ua

²Національний транспортний університет,

вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна; e-mail: yulia.glush@gmail.com

Abstract. The two-dimensional problem of electroelasticity for a piezoelectric half-space with cylindrical holes and plane cracks under the action of the far electric field is considered. The far field is perpendicular to the plane surface of the half-space which is covered with a thin electrode. There is no mechanical load. A solution to the problem is based on Lekhnitskii's generalized complex potentials of electroelasticity. The boundary conditions are satisfied analytically on the plane surface by use of the Cauchy type integral method and numerically on the surface of holes and cracks by the least-squares method. Some results of the numerical study are given for the half-space with one circular cavity, two plane cracks, circular cavity and two cracks.

Key words: electroelasticity, piezoelectric half-space, holes, cracks, electric potential difference, stress intensity factor.

Вступ.

В останні роки задачі дослідження електропружного стану п'єзоелектричних елементів в механізмах датчиків і перетворювачів при впливі механічних і електричних навантажень набувають все більшої актуальності та практичного інтересу. На особливу увагу заслуговують задачі з отворами та тріщинами у зв'язку з необхідністю попередження руйнування елементів пристроїв.

Численні дослідження на основі класичної теорії п'єзоелектричних тіл відображені в монографіях [3, 8, 10, 11]. У роботах [4, 5] розглянуто двовимірні (плоскі) задачі електропружності для скінченних і нескінченних тіл (пластин) з отворами і тріщинами під впливом механічного навантаження на контурах отворів або дистанційного електромеханічного навантаження, а в статтях [22, 23] представлено розв'язки для дії різниці електричних потенціалів. Випадок дії точкової сили і точкового заряду в п'єзоелектричній півплощині розглянуто в [33], а контактні навантаження в п'єзоелектричному півпросторі – в [13]. Задачу електропружності для п'єзокерамічної півплощини з тонкими колінеарними поверхневими електродами розв'язано в [27], а поверхнєве електромеханічне навантаження в п'єзоелектричній півплощині досліджено в [29]. П'єзоелектрична півплощина, що ослаблена тріщиною з прямолінійною границею, вільною від навантаження, розглядається в [18, 34]. Електропружний стан нескінченних п'єзоелектричних тіл з отвором, включенням або тріщиною розглянуто в [12, 25, 26, 28]. Деякі аспекти руйнування п'єзоелектричного матеріалу описані в [8, 14, 15, 31]. Дослідження динамічних задач для п'єзоелектричних тіл виконано в роботах [1, 9, 16, 17, 30]. Розв'язання деяких задач термоелектропружності та електромагнітопружності представлено в статтях [19 – 21, 32].

В роботі [6] представлено узагальнені комплексні потенціали плоскої задачі електропружності, які точно задовольняють граничні умови на прямолінійній границі півплощини, що ослаблена множинними отворами та тріщинами. Подальші дослідження плоских і двовимірних задач електропружності для багатозв'язних півплощин і півпросторів під дією механічного навантаження відображені в монографії [4]. В роботі [24] дано розв'язок плоскої задачі електропружності для п'єзоелектричного півпростору з однією тріщиною при дії віддаленого електричного поля, яке направлене перпендикулярно плоскій границі півпростору.

У даній роботі розглядається електропружний стан п'єзоелектричного півпростору з поздовжніми еліптичними порожнинами та плоскими тріщинами. Як зовнішній вплив розглядається віддалене електричне поле, що направлене перпендикулярно плоскій поверхні, яка повністю покрита тонким електродом.

§1. Постановка задачі.

Розглянемо анізотропний п'єзоелектричний нижній півпростір з циліндричними порожнинами та плоскими тріщинами. Вважатимемо, що твірні порожнин паралельні одна одній і плоскій границі півпростору, а тріщиною є нескінченний сильно сплюснутий еліптичний циліндр. Поверхні отворів і тріщин не підкріплені і вільні від електромеханічного навантаження. Плоска границя покрита суцільним тонким електродом, на ній задано значення електричного потенціалу, вона не підкріплена і ненавантажена. На нескінченності півпростір знаходиться під дією електричного поля $E_y^\infty = -\varepsilon$.

Оберемо прямокутну систему координат $Oxyz$, спрямувавши вісь Oz за напрямком твірних порожнин. В поперечному перерізі півпростору площиною Oxy маємо нижню багатозв'язну площину S з прямолінійною границею L_0 і еліптичними отворами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) з півосями a_l і b_l . При цьому за тріщину приймемо отвір еліптичної форми з більшою піввіссю a_l та меншою піввіссю b_l , що наближується до нуля (рис. 1). Приймається, що під дією розглядуваного навантаження півпростір знаходиться в двовимірному електропружному стані, який залежить тільки від координат x , y і не змінюється вздовж напрямку Oz .

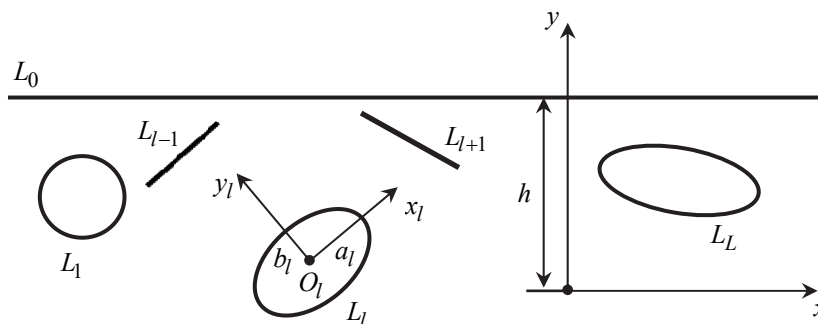


Рис. 1

Розв'язання задачі про визначення двовимірного електропружного стану розглядуваного півпростору зводиться до інтегрування системи рівнянь, що складається з рівнянь рівноваги [4]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (1.1)$$

вимушеної електростатики

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \quad (1.2)$$

співвідношень електропружного стану

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy} + b_{11}D_x + b_{21}D_y; \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy} + b_{12}D_x + b_{22}D_y; \\ \gamma_{yz} &= a_{14}\sigma_x + a_{24}\sigma_y + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy} + b_{14}D_x + b_{24}D_y; \\ \gamma_{xz} &= a_{15}\sigma_x + a_{25}\sigma_y + a_{45}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy} + b_{15}D_x + b_{25}D_y; \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{46}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy} + b_{16}D_x + b_{26}D_y; \\ E_x &= -b_{11}\sigma_x - b_{12}\sigma_y - b_{14}\tau_{yz} - b_{15}\tau_{xz} - b_{16}\tau_{xy} + c_{11}D_x + c_{12}D_y; \\ E_y &= -b_{21}\sigma_x - b_{22}\sigma_y - b_{24}\tau_{yz} - b_{25}\tau_{xz} - b_{26}\tau_{xy} + c_{12}D_x + c_{22}D_y; \end{aligned} \quad (1.3)$$

співвідношень сумісності деформацій Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 0. \quad (1.4)$$

Тут $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ і $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ – компоненти тензорів напружень та деформацій; D_x, D_y, D_z и E_x, E_y, E_z – компоненти векторів індукції та напруженості електричного поля; a_{ij}, b_{mj}, c_{nm} – приведені сталі, для яких відомо [4]

$$\begin{aligned} a_{ij} &= s_{ij}^D - \left[s_{i3}^D (s_{j3}^D \beta_{33}^\sigma + g_{3j} g_{33}) - g_{3i} (s_{33}^D g_{3j} - s_{j3}^D g_{33}) \right] / \Delta; \\ b_{mj} &= g_{mj} + \left[s_{j3}^D (\beta_{m3}^\sigma g_{33} - \beta_{33}^\sigma g_{m3}) - g_{3j} (s_{33}^D \beta_{m3}^\sigma + g_{m3} g_{33}) \right] / \Delta; \\ c_{nm} &= \beta_{nm}^\sigma - \left[g_{n3} (\beta_{m3}^\sigma g_{33} - g_{m3} \beta_{33}^\sigma) + \beta_{n3}^\sigma (s_{33}^D \beta_{m3}^\sigma + g_{m3} g_{33}) \right] / \Delta; \end{aligned}$$

$\Delta = s_{33}^D \beta_{33}^\sigma + g_{33}^2$; s_{ij}^D – коефіцієнти деформації, виміряні при сталій електричній індукції; β_{nm}^σ – коефіцієнти діелектричної проникності, виміряні при сталих напруженнях; g_{ni} – п'єзоелектричні модулі.

Компоненти тензора деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ і вектора напруженості електричного поля E_x, E_y, E_z пов'язані з проекціями переміщень u, v, w і електричним потенціалом φ співвідношеннями [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Систему диференціальних рівнянь (1.1) – (1.5) необхідно інтегрувати при граничних умовах на плоскій границі

$$\sigma_y \Big|_{y=h} = \tau_{xy} \Big|_{y=h} = \tau_{yz} \Big|_{y=h} = 0; \quad \varphi \Big|_{y=h} = V \quad (1.6)$$

і на поверхнях отворів та тріщин.

При цьому на нескінченості мусять задовольнятися умови

$$\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{yz}^\infty = \tau_{xz}^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0; \quad D_x^\infty = 0; \quad E_y^\infty = -\varepsilon. \quad (1.7)$$

§2. Загальні співвідношення для комплексних потенціалів.

Визначення електропружного стану розглядуваного півпростору зводиться до знаходження похідних комплексних потенціалів $\Phi'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$), за допомогою яких основні характеристики електропружного стану, як-от напруження, компоненти векторів індукції і напруженості електричного поля, переміщення та електричний потенціал, можуть бути знайдені за формулами [5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k); \quad (2.1)$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (2.2)$$

$$(u, v, w, \varphi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, s_k^0, r_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, w_0, \varphi_0), \quad (2.3)$$

де

$$z_k = x + \mu_k y; \quad (2.4)$$

μ_k ($k = \overline{1, 4}$) – корні характеристичного рівняння

$$l_{4a}(\mu)l_{2a}(\mu)l_{2c}(\mu) + 2l_{3a}(\mu)l_{3b}(\mu)l_{2b}(\mu) - l_{3b}^2(\mu)l_{2a}(\mu) - l_{2b}^2(\mu)l_{4a}(\mu) - l_{3a}^2(\mu)l_{2c}(\mu) = 0;$$

$$l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22};$$

$$l_{3a}(\mu) = a_{15}\mu^3 - (a_{14} + a_{56})\mu^2 + (a_{25} + a_{46})\mu - a_{24};$$

$$l_{3b}(\mu) = b_{11}\mu^3 - (b_{21} + b_{16})\mu^2 + (b_{12} + b_{26})\mu - b_{22};$$

$$l_{2a}(\mu) = a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44}; \quad l_{2b}(\mu) = b_{15}\mu^2 - (b_{14} + b_{25})\mu + b_{24};$$

$$l_{2c}(\mu) = -c_{11}\mu^2 + 2c_{12}\mu - c_{22};$$

$$\lambda_{1j} = \mu_j^2; \quad \lambda_{2j} = 1; \quad \lambda_{4j} = -\lambda_j; \quad \lambda_{5j} = \lambda_j \mu_j; \quad \lambda_{6j} = -\mu_j;$$

$$\lambda_{7j} = \nu_j \mu_j; \quad \lambda_{8j} = -\nu_j \quad (j = 1, 2, 3); \quad \lambda_{14} = \lambda_4 \mu_4^2; \quad \lambda_{24} = \lambda_4;$$

$$\lambda_{44} = -1; \quad \lambda_{54} = \mu_4; \quad \lambda_{64} = -\lambda_4 \mu_4; \quad \lambda_{74} = \lambda_4 \nu_4 \mu_4; \quad \lambda_{84} = -\lambda_4 \nu_4;$$

$$p_j = a_{11}\mu_j^2 - a_{16}\mu_j + a_{12} + (a_{15}\mu_j - a_{14})\lambda_j + (b_{11}\mu_j - b_{21})v_j;$$

$$q_j = a_{12}\mu_j - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_j} + \left(a_{25} - \frac{a_{24}}{\mu_j}\right)\lambda_j + \left(b_{12} - \frac{b_{22}}{\mu_j}\right)v_j;$$

$$s_j^0 = a_{14}\mu_j - a_{46} + \frac{a_{24}}{\mu_j} + \left(a_{45} - \frac{a_{44}}{\mu_j}\right)\lambda_j + \left(b_{14} - \frac{b_{24}}{\mu_j}\right)v_j;$$

$$r_j^0 = b_{11}\mu_j^2 - b_{16}\mu_j + b_{12} + (b_{15}\mu_j - b_{14})\lambda_j - (c_{11}\mu_j - c_{12})v_j \quad (j=1, 2, 3);$$

$$p_4 = (a_{11}\mu_4^2 - a_{16}\mu_4 + a_{12})\lambda_4 + a_{15}\mu_4 - a_{14} + (b_{11}\mu_4 - b_{21})\lambda_4 v_4;$$

$$q_4 = \left(a_{12}\mu_4 - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_4}\right)\lambda_4 + a_{25} - \frac{a_{24}}{\mu_4} + \left(b_{12} - \frac{b_{22}}{\mu_4}\right)\lambda_4 v_4;$$

$$s_4^0 = \left(a_{14}\mu_4 - a_{46} + \frac{a_{24}}{\mu_4}\right)\lambda_4 + a_{45} - \frac{a_{44}}{\mu_4} + \left(b_{14} - \frac{b_{24}}{\mu_4}\right)\lambda_4 v_4;$$

$$r_4^0 = (b_{11}\mu_4^2 - b_{16}\mu_4 + b_{12})\lambda_4 + b_{15}\mu_4 - b_{14} - (c_{11}\mu_4 - c_{12})\lambda_4 v_4;$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$, w_0 – жорсткі переміщення тіла в площині Oxy , як цілого; φ_0 – нульовий рівень потенціалу електричного поля.

Функції $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$), які аналітичні в багатозв'язних нижніх півплощинах S_k , отриманих з півплощини афінними перетвореннями (2.4), визначаються з граничних умов на контурах отворів L_l та прямолінійній границі L_0 . При цьому в областях S_k їм відповідають контури отворів L_{kl} та прямолінійна границя L_{k0} .

При відсутності навантаження на поверхнях тріщин для механічних і електричних граничних умов на контурах L_l в диференціальній формі маємо [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki}^1 \delta_{kl} \Phi_k'(t_{kl}) = 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (2.5)$$

Тут $t_{kl} \in L_{kl}$; $g_{k1}^1 = \lambda_{6k}$; $g_{k2}^1 = \lambda_{2k}$; $g_{k3}^1 = \lambda_{8k}$; $g_{k4}^1 = \lambda_{4k}$; $\delta_{kl} = \partial x / \partial s + \mu_k \partial y / \partial s$; s – дугова координата контуру L_l .

Беручи до уваги вирази (1.6), за аналогією запишемо механічні граничні умови на прямолінійній границі L_0

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki}^0 \Phi_k'(t_{k0}) = 0 \quad (i = 1, 2, 4), \quad (2.6)$$

де $t_{k0} = x + \mu_k d \in L_{k0}$; $g_{k1}^0 = \lambda_{6k}$; $g_{k2}^0 = \lambda_{2k}$; $g_{k4}^0 = \lambda_{4k}$. Приймавши $\varphi_0 = V$, з співвідношень (2.3) отримуємо електричні граничні умови в інтегральній формі

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 r_k^0 \Phi_k(t_{k0}) = 0. \quad (2.7)$$

Якщо матеріал півпростору має паралельну поперечному перерізу площину симетрії, то півпростір знаходиться в плоскому електропружному стані [6]. В цьому випадку $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ і $w = \text{const}$ у всіх точках півпростору. Всі інші основні характеристики електропружного стану можуть визначатися за формулами (2.1) – (2.3), в яких потрібно прирівняти нулю $\Phi_4(z_4)$, λ_j , а також всі величини з індексом $k = 4$. При цьому μ_k ($k = \overline{1, 3}$) – корні рівняння $l_{4a}(\mu) l_{2c}(\mu) - l_{3b}^2(\mu) = 0$. Комплексні потенціали $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) визначаються з граничних умов (2.5) – (2.7), де підсумовування проводиться за k від 1 до 3.

§3. Вигляд комплексних потенціалів для багатозв'язної півплощини.

Комплексні потенціали $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$), які аналітичні в багатозв'язних нижніх півплощинах S_k , оберемо у вигляді

$$\Phi_k(z_k) = c_{k0} + \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k) + \Phi_{k1}(z_k) \quad (k = \overline{1, 4}). \quad (3.1)$$

Тут c_{k0} – невідомі сталі; Γ_k – сталі, що визначаються з умов на нескінченності (1.7)

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \mu_k r_k^0, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \varepsilon, 0). \quad (3.2)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ і $\Phi_{k1}(z_k)$ – функції, які голоморфні в суцільних нижніх півплощинах S_k і поза всіма контурами тріщин, відповідно, причому в нескінченно віддаленій точці обидві функції приймають нульове значення.

Підставивши функції (3.1) в електричні граничні умови (2.7) на пряmolінійній границі L_0 , маємо

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 r_k^0 c_{k0} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 r_k^0 \Gamma_k x + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 r_k^0 \Gamma_k \mu_k d + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\Phi_{k0}(t_{k0}) + \Phi_{k1}(t_{k0})] = 0.$$

Зі співвідношень (3.2) знаходимо $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 r_k^0 \Gamma_k \mu_k d = \varepsilon d$ і $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 r_k^0 \Gamma_k = 0$. Приймавши $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 r_k^0 c_{k0} = -\varepsilon d$, після диференціювання за x запишемо

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{k3}^0 [\Phi'_{k0}(t_{k0}) + \Phi'_{k1}(t_{k0})] = 0,$$

де $g_{k3}^0 = r_k^0$. Аналогічного виду уточнені умови можна отримати, підставивши похідні комплексних потенціалів (3.1) в механічні граничні умови (2.6). Об'єднавши їх, для граничних умов на пряmolінійній границі маємо

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki}^0 [\Phi'_{k0}(t_{k0}) + \Phi'_{k1}(t_{k0})] = 0 \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (3.3)$$

Застосовуючи метод інтегралів типу Коші [6] для точного задоволення граничним умовам (3.3) на пряmolінійній границі L_0 , знайдемо вигляд голоморфних в нижніх суцільних півплощинах S_k функцій $\Phi'_{k0}(z_k)$. Для цього перетворимо вирази (3.3), розв'язавши їх відносно $[\Phi'_{k0}(t_{k0}) + \Phi'_{k1}(t_{k0})]$,

$$\begin{aligned}
& \left[\Phi'_{k0}(t_{k0}) + \Phi'_{k1}(t_{k0}) \right] + \bar{r}_k \left[\overline{\Phi'_{k0}(t_{k0}) + \Phi'_{k1}(t_{k0})} \right] + \\
& + \bar{s}_{k+1} \left[\overline{\Phi'_{k+1,0}(t_{k+1,0}) + \Phi'_{k+1,1}(t_{k+1,0})} \right] + \bar{e}_{k+2} \left[\overline{\Phi'_{k+2,0}(t_{k+2,0}) + \Phi'_{k+2,1}(t_{k+2,0})} \right] + \\
& + \bar{n}_{k+3} \left[\overline{\Phi'_{k+3,0}(t_{k+3,0}) + \Phi'_{k+3,1}(t_{k+3,0})} \right] = 0 \quad (k = \overline{1, 4}), \tag{3.4}
\end{aligned}$$

де

$$\bar{r}_k = \left(\bar{\lambda}_{2k} M_{2k} + \bar{\lambda}_{4k} M_{4k} + \bar{\lambda}_{6k} M_{6k} + \bar{\lambda}_{8k} M_{8k} \right) / \Delta;$$

$$\bar{s}_{k+1} = \left(\bar{\lambda}_{2,k+1} M_{2k} + \bar{\lambda}_{4,k+1} M_{4k} + \bar{\lambda}_{6,k+1} M_{6k} + \bar{\lambda}_{8,k+1} M_{8k} \right) / \Delta;$$

$$\bar{e}_{k+2} = \left(\bar{\lambda}_{2,k+2} M_{2k} + \bar{\lambda}_{4,k+2} M_{4k} + \bar{\lambda}_{6,k+2} M_{6k} + \bar{\lambda}_{8,k+2} M_{8k} \right) / \Delta;$$

$$\bar{n}_{k+3} = \left(\bar{\lambda}_{2,k+3} M_{2k} + \bar{\lambda}_{4,k+3} M_{4k} + \bar{\lambda}_{6,k+3} M_{6k} + \bar{\lambda}_{8,k+3} M_{8k} \right) / \Delta; \tag{3.5}$$

$$h_k = - \left(\sigma_y M_{2k} + \tau_{yz} M_{4k} + \tau_{xy} M_{6k} + D_y M_{8k} \right) / \Delta; \tag{3.6}$$

$$\Delta = \lambda_{2k} M_{2k} + \lambda_{4k} M_{4k} + \lambda_{6k} M_{6k} + \lambda_{8k} M_{8k}; \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
M_{2k} &= \begin{vmatrix} \lambda_{6,k+1} & \lambda_{8,k+1} & \lambda_{4,k+1} \\ \lambda_{6,k+2} & \lambda_{8,k+2} & \lambda_{4,k+2} \\ \lambda_{6,k+3} & \lambda_{8,k+3} & \lambda_{4,k+3} \end{vmatrix}; & M_{4k} &= \begin{vmatrix} \lambda_{6,k+1} & \lambda_{2,k+1} & \lambda_{8,k+1} \\ \lambda_{6,k+2} & \lambda_{2,k+2} & \lambda_{8,k+2} \\ \lambda_{6,k+3} & \lambda_{2,k+3} & \lambda_{8,k+3} \end{vmatrix}; \\
M_{6k} &= \begin{vmatrix} \lambda_{2,k+1} & \lambda_{4,k+1} & \lambda_{8,k+1} \\ \lambda_{2,k+2} & \lambda_{4,k+2} & \lambda_{8,k+2} \\ \lambda_{2,k+3} & \lambda_{4,k+3} & \lambda_{8,k+3} \end{vmatrix}; & M_{8k} &= \begin{vmatrix} \lambda_{6,k+1} & \lambda_{4,k+1} & \lambda_{2,k+1} \\ \lambda_{6,k+2} & \lambda_{4,k+2} & \lambda_{2,k+2} \\ \lambda_{6,k+3} & \lambda_{4,k+3} & \lambda_{2,k+3} \end{vmatrix}; \tag{3.8}
\end{aligned}$$

індекс $k+j$ ($j = \overline{1, 3}$) при $k+j > 4$ формально приймається рівним $k+j-4$.

На прямолінійній границі L_{k0}

$$t_{k0} = x + \mu_k d; \quad \bar{t}_{k+j,0} = x + \bar{\mu}_{k+j} d = t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) d \quad (j = \overline{0, 3}).$$

З огляду на ці співвідношення, для граничних умов (3.4) маємо

$$\begin{aligned}
& \left[\Phi'_{k0}(t_{k0}) + \Phi'_{k1}(t_{k0}) \right] + \bar{r}_k \left[\overline{\Phi'_{k0}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_k) d) + \Phi'_{k1}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_k) d)} \right] + \\
& + \bar{s}_{k+1} \left[\overline{\Phi'_{k+1,0}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) d) + \Phi'_{k+1,1}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) d)} \right] + \\
& + \bar{e}_{k+2} \left[\overline{\Phi'_{k+2,0}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) d) + \Phi'_{k+2,1}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) d)} \right] + \\
& + \bar{n}_{k+3} \left[\overline{\Phi'_{k+3,0}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) d) + \Phi'_{k+3,1}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) d)} \right] = 0 \quad (k = \overline{1, 4}).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що $\Phi'_{k1}(t_{k0})$, $\bar{\Phi}'_{k+j,0}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) d)$ ($j = \overline{0, 3}$) є граничними зна-

ченнями відповідних функцій, які голоморфні в суцільній верхній півплощині, а $\Phi'_{k0}(t_{k0})$, $\bar{\Phi}'_{k+j,1}(t_{k0} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j})d)$ ($j = \overline{0, 3}$) – функції, які голоморфні в суцільній нижній півплощині S_k . Беручи це до уваги, помножимо останні рівності на ядра Коші та обчислимо інтеграли типу Коші від отриманої рівності. В результаті одержуємо вирази для функції $\Phi'_k(z_k)$

$$\begin{aligned} \Phi'_{k0}(z_k) = & -\bar{r}_k \bar{\Phi}'_{k1}(z_k - (\mu_k - \bar{\mu}_k)d) - \bar{s}_{k+1} \bar{\Phi}'_{k+1,1}(z_k - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1})d) - \\ & -\bar{e}_{k+2} \bar{\Phi}'_{k+2,1}(z_k - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2})d) - \bar{n}_{k+3} \bar{\Phi}'_{k+3,1}(z_k - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3})d). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Відобразимо конформно зовнішності одиничних кіл $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на зовнішності еліпсів L_{kl} [7]:

$$z_k = x + \mu_k y = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (3.10)$$

де

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l};$$

$$2R_{kl} = a_l (\cos \phi_l + \mu_k \sin \phi_l) + ib_l (\sin \phi_l - \mu_k \cos \phi_l);$$

$$2m_{kl}R_{kl} = a_l (\cos \phi_l + \mu_k \sin \phi_l) - ib_l (\sin \phi_l - \mu_k \cos \phi_l);$$

ϕ_l – кут нахилу тріщини L_l до прямолінійної границі L_0 .

Представляючи функції $\Phi_{k1}(z_k)$, які голоморфні поза всіма контурами тріщин, у вигляді суми розвинень в ряди Лорана за від'ємними ступеннями ζ_{kl} , і підставляючи з урахуванням (3.9) отримані функції у вирази для комплексних потенціалів (3.1), після диференціювання останніх за z_k маємо

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = & \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) - \bar{r}_k \bar{a}_{kln} \bar{\varphi}'_{kln}(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1,ln} \bar{\varphi}'_{k+1,ln}(z_k) - \right. \\ & \left. - \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2,ln} \bar{\varphi}'_{k+2,ln}(z_k) - \bar{n}_{k+3} \bar{a}_{k+3,ln} \bar{\varphi}'_{k+3,ln}(z_k) \right] \quad (k = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тут a_{kln} – невідомі сталі;

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})};$$

$$\bar{\varphi}'_{k+j,ln}(z_k) = -\frac{n}{\bar{\zeta}_{k+j,l}^{n-1} \bar{R}_{k+j,l} (\bar{\zeta}_{k+j,l}^2 - \bar{m}_{k+j,l})} \quad (j = \overline{0, 3});$$

$\bar{\zeta}_{k+j,l}$ – змінні, що визначаються з конформних відображень [7]

$$z_k = \bar{z}_{kl} + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j})h^+ + \bar{R}_{k+j,l} \left(\bar{\zeta}_{k+j,l} + \frac{\bar{m}_{k+j,l}}{\bar{\zeta}_{k+j,l}} \right).$$

У випадку плоскої задачі похідні комплексних потенціалів $\Phi'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) збе-

рігають вигляд (3.7), в якому потрібно прийняти: індекс $k + j$ ($j = \overline{2, 3}$) при $k + j > 3$ прирівнюється до $k + j - 3$; Γ_k – величини, що визначаються з системи

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \mu_k r_k^0, q_k - \mu_k p_k \right) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, \varepsilon, 0);$$

$\bar{n}_{k+3} = 0$; $\bar{r}_k, \bar{s}_{k+1}, \bar{e}_{k+2}$ визначаються за формулами для плоского випадку [24].

§4. Чисельне задоволення граничним умовам на контурах отворів та тріщин.

Похідні комплексних потенціалів (3.7) точно задовольняють граничним умовам на прямолінійній границі L_0 . Невідомі сталі a_{kln} у виразах (3.7) будемо визначати з граничних умов (2.5) на контурах отворів і тріщин методом найменших квадратів. Складемо функціонал [6]

$$J = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^4 \sum_{m_l}^{M_l} \left| 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{kl}^1 \delta_{kl} \Phi_k' (x_{m_l} + \mu_k y_{m_l}) \right|^2,$$

де (x_{m_l}, y_{m_l}) ($m_l = \overline{1, M_l}$) – точки, які обираються на контурах L_l . Задовольняючи умовам мінімуму $\partial J / \partial a_{kln} = 0$ ($k = \overline{1, 4}, l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots$) функціонала, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язавши яку, знайдемо невідомі сталі. Отже, похідні комплексних потенціалів (3.7) будуть повністю відомі, а за формулами (2.1) – (2.3) можуть бути знайдені в будь-якій точці півпростору основні характеристики електропружного стану, а для вершин тріщин – значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, індукції та напруженості (КІНН) [4]

$$k_1^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\lambda_{1k} \sin^2 \phi_l + \lambda_{2k} \cos^2 \phi_l - 2 \lambda_{6k} \sin \phi_l \cos \phi_l \right] M_k^{\pm};$$

$$k_2^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[(\lambda_{2k} - \lambda_{1k}) \cos \phi_l \sin \phi_l + \lambda_{6k} (\cos^2 \phi_l - \sin^2 \phi_l) \right] M_k^{\pm};$$

$$k_D^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{8k} \cos \phi_l - \lambda_{7k} \sin \phi_l) M_k^{\pm};$$

$$k_E^{\pm} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (r_k^0 \mu_k \cos \phi_l - r_k^0 \sin \phi_l) M_k^{\pm}.$$

Тут $M_k^{\pm} = \mp \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}$.

§5. Результати чисельних досліджень електропружного стану.

Проведені чисельні дослідження з їх аналізом розподілу характеристик електропружного стану і КІНН для п'єзоелектричного півпростору з однією круговою порожниною, двома плоскими тріщинами, з круговою порожниною і двома симетричними тріщинами, в тому числі і крайовими, що виходять на поверхню порожнини (рис. 2).

В якості зовнішнього впливу розглядалася дія віддаленого електричного поля, перпендикулярного плоскій границі півпростору (дія електричного поля $E_y^{\infty} = -1$ МВ/м). При цьому прийнято, що півпростір виготовлено з п'єзоелектричних матеріалів з віссю симетрії, яка паралельна осі Oz і віссю поляризації, яка паралельна осі Oy :

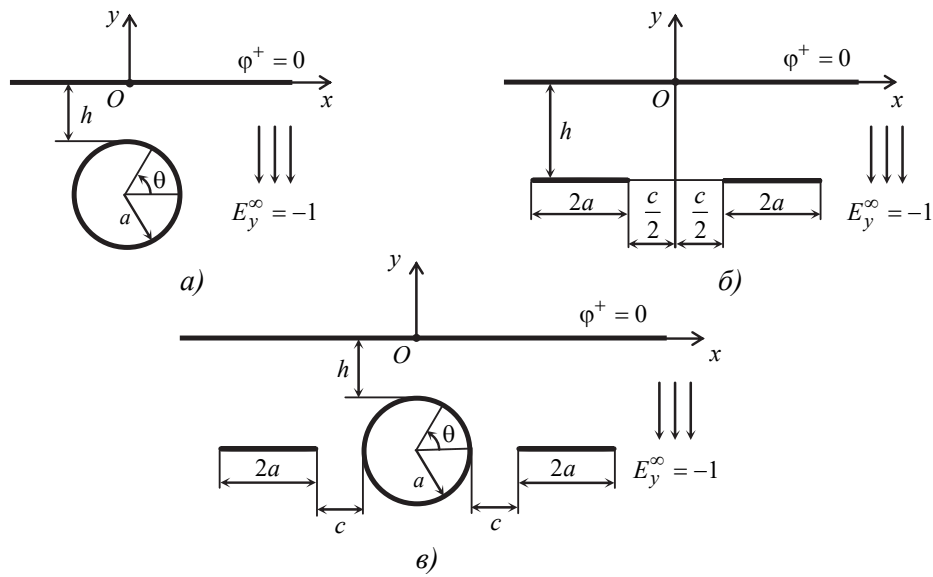


Рис. 2

1) M1-BaTiO3; 2) M2-PZT-2; 3) M3-PZT-4 [2]. Необхідні для досліджень дані представлено в табл. 1. Тут $s_0 = 10^{-6}$ МПа $^{-1}$, $g_0 = 10^{-3}$ м $^2 \cdot$ Кл $^{-1}$, $\beta_0 = 1$ МН \cdot м $^2 \cdot$ Кл $^{-2}$.

Нижче значення в таблицях і на рисунках дані з точністю до інтенсивності навантаження, як множника.

Таблиця 1

Величина	П'єзоматеріали		
	M1	M2	M3
$s_{11}^{D,T} / s_0, s_{33}^{D,T} / s_0$	8,7	10,7	10,9
$s_{22}^{D,T} / s_0$	7,1	9,0	7,9
$s_{12}^{D,T} / s_0, s_{23}^{D,T} / s_0$	-1,9	-2,68	-2,1
$s_{13}^{D,T} / s_0$	-3,0	-4,24	-5,42
$s_{44}^{D,T} / s_0, s_{66}^{D,T} / s_0$	17,5	22,9	19,3
$s_{55}^{D,T} / s_0$	29,9	29,9	32,7
$g_{21}^T / g_0, g_{23}^T / g_0$	-5,2	-15,1	-11
g_{22}^T / g_0	12,6	38,1	26,1
$g_{16}^T / g_0, g_{34}^T / g_0$	20,2	50,3	39,4
$\beta_{11}^{\sigma,T} / \beta_0, \beta_{33}^{\sigma,T} / \beta_0$	77,93	114,1	76,61
$\beta_{22}^{\sigma,T} / \beta_0$	66,47	251,1	86,92

На рис. 3, 4 представлені результати досліджень для півпростору з круговою порожниною одиничного радіуса при різних значеннях відстані між поверхнею порожнини і плоскою границею (довжини перемички) h . На рис. 3 залежно від центрального кута θ наведені графіки розподілу нормальних напружень σ_θ біля поверхні порожнини в півпросторі з матеріалів M1 (рис. 3, а) і M2, M3 (рис. 3, б), відповідно. На рис. 4 залежно від координати x півпростору наведені графіки розподілу напружень σ_x поблизу плоскої границі для різних матеріалів аналогічно попередньому рисунку.

Як видно з рис. 3, 4 та інших результатів дослідження при дії електричного поля, перпендикулярного плоскій границі, зі зменшенням довжини перемички h (рис. 2, а) значення напружень в зоні перемички біля поверхні порожнини і плоскою границею збільшуються. При цьому значення напружень досягають максимальних значень в точках біля отвору при значеннях центрального кута $90^\circ \cdot n + 45^\circ$, де $n = 0, 1, 2, 3$. При значенні довжини перемички $h \geq 3$ значення характеристик електропружного стану, знайдених з використанням методу найменших квадратів, збігається з точним розв'язком двовимірної задачі електропружності для нескінченного тіла з однієї кругової порожниною [4].

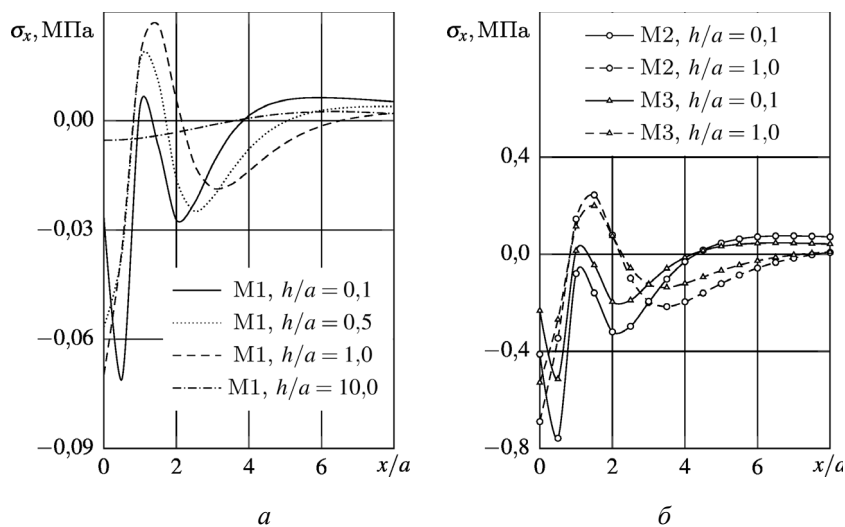


Рис. 3

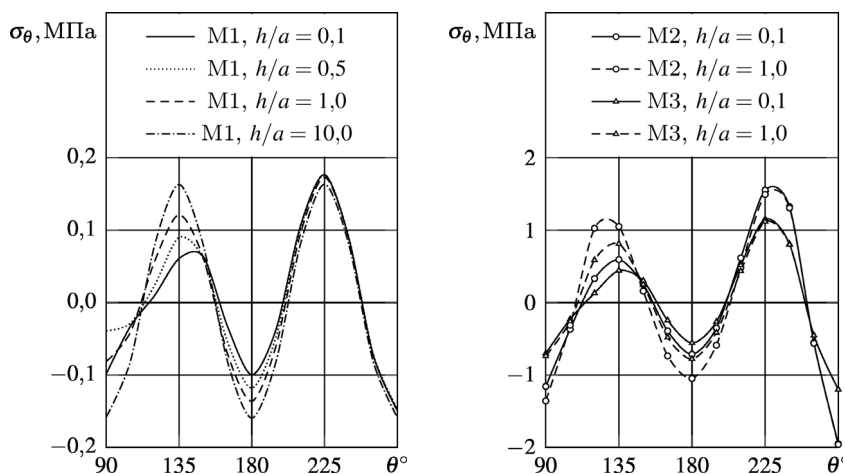


Рис. 4

У табл. 2 наведені значення КІНІН для кінців лівої тріщини у випадку півпростору з двома паралельними плоскій границі тріщинами одинарної напівдовжини залежно від довжини перемички h (рис. 2, б). При цьому вважалось, що півпростір виготовлений із зазначених вище матеріалів, знак «+» – відповідає правій вершині тріщини, «-» – лівій. Відстань між тріщинами приймалася рівною $0,5a$.

Таблиця 2

Матеріал	h	k_1^+	k_1^-	k_2^+	k_2^-	k_E^+	k_E^-	k_D^+	k_D^-
M1	10	-0,0005	-0,0004	0,0001	0,0002	-1,2244	-1,0772	-0,0176	-0,0155
	5	-0,0013	-0,0009	0,0004	0,0010	-1,2175	-1,0714	-0,0175	-0,0154
	1	-0,0010	-0,0008	0,0012	0,0055	-1,1667	-1,0370	-0,0168	-0,0149
	0,5	0,0003	-0,0019	-0,0002	0,0079	-1,1419	-1,0218	-0,0164	-0,0147
	0,1	0,0006	-0,0032	-0,0030	0,0116	-1,1133	-0,1002	-0,0160	-0,0144
M2	10	-0,0059	-0,0048	0,0005	0,0016	-1,1740	-1,0328	-0,0045	-0,0040
	5	-0,0169	-0,0121	0,0028	0,0078	-1,1716	-1,0306	-0,0045	-0,0040
	1	-0,0327	-0,0169	0,0116	0,0450	-1,1474	-1,0121	-0,0044	-0,0039
	0,5	-0,0193	-0,0279	-0,0001	0,0635	-1,1312	-1,0019	-0,0043	-0,0038
	0,1	-0,0084	-0,0507	-0,0267	0,0986	-1,1084	-0,9886	-0,0043	-0,0038
M3	10	-0,0030	-0,0025	0,0004	0,0011	-1,2006	-1,0562	-0,0125	-0,0110
	5	-0,0085	-0,0060	0,0020	0,0056	-1,1959	-1,0522	-0,0124	-0,0109
	1	-0,0119	-0,0061	0,0093	0,0340	-1,1564	-1,0242	-0,0120	-0,0107
	0,5	-0,0035	-0,0119	0,0022	0,0479	-1,1345	-1,0110	-0,0118	-0,0105
	0,1	0,0020	-0,0224	-0,0150	0,0718	-1,1071	-0,9939	-0,0115	-0,0103

Як слідує з представлених даних і інших результатів досліджень, зі зменшенням величини h значення КІНІН збільшуються, концентрація напружень в точках перемички зростає. При цьому значення КІН k_1^+ , k_2^+ збільшуються за модулем, а у випадку правої вершини тріщини ці значення зростають при $h \geq 1$, а потім зменшуються. Для абсолютних значень k_2^+ при $h < 0,5$ спостерігається значне зростання.

На рис. 5 показано графіки зміни КІН k_1^+ , k_2^+ для лівої тріщини в півпросторі з матеріалу M2 з однією круговою порожниною одиничного радіуса і двома плоскими, паралельними плоскій границі тріщинами одиничної напівдовжини залежно від відстані між порожниною і тріщиною c (рис. 2, в). Довжина перемички h вважалася сталою і приймалася рівною $0,5a$. Як і в наведеному вище випадку, знак «+» відповідає правій вершині тріщини, «-» – лівій. Для випадку крайової тріщини, що виходить на поверхню порожнини ($c/a = 0$), результати обчислень представлено для лівого кінця тріщини і показані дискретно у вигляді відповідних символів на вертикальній осі.

З рис. 5 та інших результатів дослідження видно, що при дії електричного поля зі зменшенням довжини перемички c значення напружень в точках перемички біля контуру отвору і в точках прямолінійної границі збільшуються. При цьому значення КІН k_1^+ , k_2^+ збільшуються до $c \geq 0,25a$, а потім спостерігається значне їх зменшення, відбувається розвантаження зони перемички між порожниною і тріщинами.

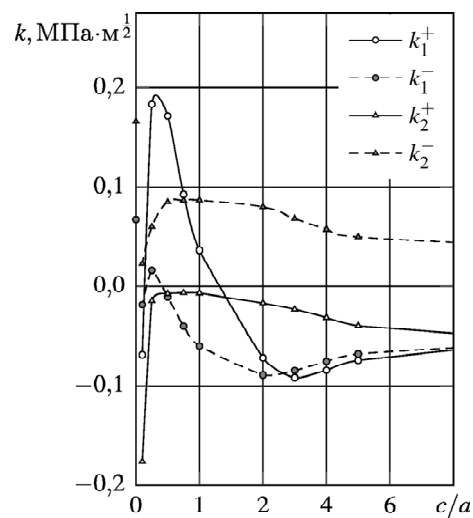


Рис. 5

Висновки.

З використанням функцій комплексних потенціалів, інтегралів типу Коші і методу найменших квадратів наведено розв'язання двовимірної задачі електропружності для п'єзоелектричного півпростору з довільно розташованими внутрішніми циліндричними отворами і плоскими тріщинами під дією віддаленого електричного поля, перпендикулярного плоскій границі півпростору, яка своєю чергою вкрита тонким електродом і вільна від механічного навантаження. Досліджено електропружний стан п'єзоелектричного півпростору з одним, двома і трьома концентраторами напружень. Виявлено ряд закономірностей зміни характеристик електропружного стану залежно від геометричних характеристик і фізико-механічних властивостей півпростору. Так, наприклад, зі зменшенням відстані між порожнинами і плоскими тріщинами напруження поблизу плоскої границі, в перемичці і біля контуру отвору збільшуються за модулем, а в разі тріщин збільшуються і КІНІН. При зменшенні довжини перемички між тріщинами і отвором, значення напружень зменшується, а значення КІНІН збільшуються.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто двовимірну задачу електропружності для п'єзоелектричного півпростору з циліндричними порожнинами та плоскими тріщинами при дії віддаленого електричного поля. Вектор напруженості електричного поля на нескінченності перпендикулярний плоскій поверхні півпростору, що повністю покрита тонким електродом. Механічне навантаження відсутнє. Розв'язок задачі базується на використанні узагальнених комплексних потенціалів електропружності. Граничні умови на плоскій поверхні півпростору задовільнені аналітично за допомогою інтегралів типу Коші, на поверхнях отворів – чисельно з використанням методу найменших квадратів. Наведено результати числових досліджень для півпросторів з однією порожниною, двома плоскими тріщинами, з порожниною та двома тріщинами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: електропружність, п'єзоелектричний півпростір, порожнини, тріщини, різниця електричних потенціалів, коефіцієнт інтенсивності напружень.

1. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сенік Н.А., Фильштинский М.Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей: в 2-х томах. Т. 2. Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел. – Москва: КомКнига, 2005. – 376 с.
2. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – Москва: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204 – 326.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-и томах. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
4. Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
5. Калоеров С.А., Баева А.И., Глуценко Ю.А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела с полостями и плоскими трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С.66 – 79.
6. Калоеров С.А., Глуценко Ю.А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного полупространства // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 83 – 90.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
8. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 472 с.
9. Подильчук Ю.Н., Проценко Т.М. Общая задача электроупругости для трансверсально-изотропного однополостного гиперболоида вращения // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С.16 – 27.
10. Хорошун, Л.П., Маслов Б.П., Леценко П.В. Прогнозирование эффективных пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
11. Шульга Н.А., Болкусев А.М. Колебания пьезокерамических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
12. Denda M., Kosaka I. Dislocation and point-force-based approach to the special green's function beam for elliptic hole and crack problems in two dimensions // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1997. – 40, N 15. – P. 2857 – 2889.

13. *Fan H., Sze K.Y., Yang W.* Two-dimensional contact on a piezoelectric half-space // *Int. J. of Solids and Struct.* – 1996. – **33**, N 9. – P. 1305 – 1315.
14. *Fang D., Liu J.* *Fracture Mechanics of Piezoelectric and Ferroelectric Solids.* – Berlin: Springer, 2013. – 417 p.
15. *Govorukha V., Kamlah M., Loboda V., Lapusta Y.* *Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids with Interface Cracks.* – Berlin: Springer, 2017. – 235 p.
16. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A., Shul'ga N.A.* Propagation of nonaxisymmetric acoustoelectric waves in a hollow cylinder // *Sov. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 6. – P. 517 – 521.
17. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Nonaxisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Radially Polarized Piezoceramic Layers // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 6. – P. 641 – 649.
18. *Jinxi L., Biao W., Shanyi D.* Electroelastic green's functions for a piezoelectric half-space and their application // *Appl. Mathematics and Mechanics.* – 1997. – **18**, N 11. – P. 1037 – 1043.
19. *Kaloerov S.A., Khoroshev K.G.* Thermoelectroelastic State of a Multiply Connected Anisotropic Plate // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1306 – 1315.
20. *Kaloerov S.A., Petrenko A.V., Khoroshev K.G.* Electromagnetoelastic problem for an infinite plate with known electrical potential at hole boundaries // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 2011. – **52**, N 5. – P. 146 – 154.
21. *Kaloerov S.A., Petrenko A.V., Khoroshev K.G.* Electromagnetoelastic Problem for a Plate with Holes and Cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 2. – P. 93 – 105.
22. *Khoroshev K.G.* Electroelastic State of an Infinite Multiply Connected Piezoelectric Plate with Known Electric Potentials Applied to its Boundaries // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 6. – P. 687 – 695.
23. *Khoroshev K.G., Glushchenko Y.A.* The two-dimensional electroelasticity problems for multiconnected bodies situated under electric potential difference action // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2012. – **49**, N 18. – P. 2703 – 2711.
24. *Khoroshev K.G., Glushchenko Yu.A.* Plane electroelastic problem for a cracked piezoelectric half-space subject to remote electric field action // *European J. of Mechanics – A/Solid.* – 2020. – **82**. – doi: 10.1016/j.euromechsol.2020.103984
25. *Kirilyuk V.S.* Elastic State of a Transversely Isotropic Piezoelectric Body with an Arbitrarily Oriented Elliptic Crack // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 2. – P. 150 – 157.
26. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I., Gavrilenko E.V.* Mathematical modeling and analysis of the stressed state in the orthotropic piezoelectric medium with a circle crack // *System Research and Information Technologies.* – 2017. – N 3. – P. 117 – 126.
27. *Kuang Z.B., Zhou Z.D., Zhou K.L.* Electroelastic analysis of a piezo- electric half-plane with finite surface electrodes // *Int. J. of Engineering Sci.* – 2004. – **42**, N 15. – P. 1603 – 1619.
28. *Liang Y.C., Hwu C.* Electromechanical analysis of defects in piezoelectric materials // *Smart Materials and Struct.* – 1996. – **5**, N 3. – P. 314 – 320.
29. *Liou J.Y., Sung J.C.* Electrostatic stress analysis of an anisotropic piezoelectric half-plane under surface electromechanical loading // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2004. – **45**, N 11. – P. 3219 – 3237.
30. *Loza I.A., Medvedev K.V., Shul'ga N.A.* Propagation of Nonaxisymmetric Acoustoelectric Waves in Layered Cylinders // *Sov. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 8. – P. 703 – 706.
31. *Pak Y.E.* Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials // *Int. J. of Fracture.* – 1992. – **54**, N 1. – P. 79 – 100.
32. *Podil'chuk Yu. N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 2. – P. 132 – 170.
33. *Sosa H.A., Castro M.A.* On concentrated loads at the boundary of a piezoelectric half-plane // *J. of the Mechanics and Physics of Solids.* – 1994. – **42**, N 7. – P. 1105 – 1122.
34. *Yang P.S., Liou J.Y., Sung J.C.* Analysis of a crack in a half-plane piezoelectric solid with traction-induction free boundary // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2007. – **44**, N 25. – P. 8556 – 8578.

Надійшла 16.06.2020

Затверджена до друку 18.03.2021