

Я. Я. Рушицький, В. М. Юрчук

**АНАЛОГІЇ МІЖ КЛАСИЧНОЮ ЗАДАЧЕЮ ПРО КОЛИВАННЯ ТІЛ  
І НЕКЛАСИЧНОЮ ЗАДАЧЕЮ ПРО ПОШИРЕННЯ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,  
вул. Гесстєрова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** In order to identify analogies in the procedures of analysis, two problems are described and commented on: the classical problem (problem V) on harmonic vibrations of two interconnected rigid bodies suspended on the springs, and the nonclassical problem (problem W) on the propagation of plane longitudinal waves in the two-phase elastic mixture. A number of analogies are constructed between these problems, which are described in the form of 6 items of comparative analysis of problems V and W, each of which corresponds to a specific analogy. Emphasis is placed on the usefulness of the observed analogies for the analysis of the problem of waves. Thus, it is shown that the theory of two-phase mixtures in its development in the field of wave theory can successfully use the analogies from the corresponding problems of the theory of vibrations of two coupled oscillating systems. The more general fact follows from the analogies shown that the mechanism of mutual aid in the theory of vibrations discovered almost 100 years ago by academician Mandelstam extended during this time its influence to the theory of waves.

**Key words:** oscillations of two coupled bodies, propagation of elastic plane wave in two-phase mixture, analogies in procedures of analysis.

Встановлення аналогій є одним із інструментів розвитку науки. Механіка матеріалів у такій своїй класичній частині як лінійні теорії пружності і термопружності навіть виділяє аналогії як окремі результати.

Найбільш відомою є мембранна аналогія Прандтля. Вона полягає у тому, що дві зовсім різні механічні задачі – задача про кручення стержня і задача про рівновагу мембрани – описуються математично ідентичними крайовими задачами про знаходження розв'язку рівняння Пуассона. Тому процедури аналізу однієї задачі можуть бути використані (і використовуються) при аналізі іншої. Зокрема, Прандтль використовував цю аналогію при аналізі експериментальних даних.

Аналогія щодо масових сил між теорією пружності і теорією термопружності полягає у тому, що зміщення і деформації є ідентичними в нагрітому та ненагрітому тілах за умови ідентичних зміщень, заданих на частині поверхні тіла і злегка видозмінених напружень на іншій частині нагрітого тіла та прикладених до нього масових сил.

Ще одна аналогія належить Дюба та Тремелю і стосується неоднорідного бігармонічного рівняння. Воно описує механічний стан двох цілком відмінних між собою задач – задачі згину пластини середньої товщини, жорстко закріпленої на краю і навантаженої перпендикулярно до серединної площини, та задачі про плоский термопружний стан пластинки тієї ж форми з термоізольованими верхньою та нижньою площинами під дією температурного поля.

До аналогій в механіці матеріалів виявляли інтерес багато відомих вчених. Зокрема, аналогії між механічними і електричними явищами вивчаються вже понад сто років

[6, 7, 9]. Спостережено аналогії між механікою і рядом більш сучасних наук. Наприклад, існують аналогії між явищами в механіці точки і явищами у кінетиці хімічних реакцій [8].

*Довідка.* Термін «аналогія» походить від грецького слова «ἀναλογία». У широкому сенсі він означає когнітивний процес передачі інформації чи розуміння від одного суб'єкта (аналога) до іншого (об'єкта). Вважається, що аналогія та абстракція є різними когнітивними процесами і часто аналогія передує абстракції. У вузькому сенсі аналогію розуміють як часткову подібність між двома речами, які не є подібними за іншими ознаками, або як міркування, у якому з подібності речей за одними ознаками роблять висновки щодо можливості подібності цих речей за іншими ознаками.

У теорії коливань аналогія у вигляді застосування процедур аналізу, розвинутих в одному розділі теорії коливань (наприклад, механічні коливання), до аналізу в інших розділах теорії коливань (наприклад, електромагнітних коливань) вже існують давно і навіть отримали назву «коливної взаємодопомоги» [1]. Це явище ґрунтується на ізоморфізмі закономірностей, коли коливання аналізуються не за ознакою фізичних явищ, а за формою закономірностей.

Описане в даній статті дослідження присвячене формам закономірностей і має метою встановлення ізоморфізму закономірностей при порівнянні аналізу однієї конкретної задачі теорії коливань і теж конкретної задачі про поширення хвиль у матеріалах.

*Задача К (коливання).* Класична лінійна задача про вертикальні гармонічні коливання двох зв'язаних між собою пружною пружиною абсолютно твердих тіл, підвішених на пружинах.

*Задача Х (хвилі).* Некласична лінійна задача про поширення плоских поздовжніх хвиль у двофазній пружній суміші.

Аналіз аналогій між вказаними вище задачами проведено для шести конкретних спостережених аналогій. При цьому зафіксовані та прокоментовані відмінності задач Х.

#### Аналогія 1.

Постановки цих задач описано у відомих публікаціях [2 – 5], де у тому числі вказані теж основні системи лінійних взаємозв'язаних диференціальних рівнянь.

*Задача К.* Основна система рівнянь є такою [4, 11]:

$$\beta_{11}u_{1,t} + \beta_{12}u_{2,t} + \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 = 0; \quad \beta_{12}u_{1,t} + \beta_{22}u_{2,t} + \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 = 0, \quad (1)$$

де через  $u_\alpha(t)$  ( $\alpha = 1; 2$ ) та  $\alpha_{\alpha\alpha}$  позначено відповідно залежні від часу  $t$  вертикальні зміщення тіл з масами  $\beta_{\alpha\alpha}$  та параметри, що характеризують пружні властивості пружин, на яких підвішені тіла. Величини  $\beta_{12}$  та  $\alpha_{12}$  позначають так звану приєднану масу та параметр, що пов'язаний з пружними властивостями пружини, яка зв'язує два тіла.

Таким чином, зв'язаність системи (1) характеризується двома фізичними механізмами – інерціальним та пружним, які в механічній моделі описуються параметрами  $\beta_{12}$  та  $\alpha_{12}$ .

*Задача Х.* Основна система рівнянь є такою [2, 3, 5, 10]

$$\begin{aligned} (\rho_{11} - \rho_{12})u_{1,t}^{(1)} + \rho_{12}u_{1,t}^{(2)} - (\lambda_1 + 2\mu_1)u_{1,11}^{(1)} - (\lambda_3 + 2\mu_3)u_{1,11}^{(2)} - \beta(u_1^{(1)} - u_1^{(2)}) &= 0; \\ \rho_{12}u_{1,t}^{(1)} + (\rho_{22} - \rho_{12})u_{1,t}^{(2)} - (\lambda_2 + 2\mu_2)u_{1,11}^{(2)} - (\lambda_3 + 2\mu_3)u_{1,11}^{(1)} + \beta(u_1^{(1)} - u_1^{(2)}) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де через  $u_\alpha(x_1, t)$  ( $\alpha = 1; 2$ ) позначені залежні від поздовжньої координати  $x_1$  та часу  $t$  поздовжні зміщення двох фаз суміші і через  $\lambda_k, \mu_k$  ( $k = 1; 2; 3$ ) – пружні постійні суміші, для якої конститутивні рівняння (лінійні рівняння зв'язку між напруженнями  $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$  та деформаціями  $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)} = (1/2)(u_{i,k}^{(\alpha)} + u_{k,i}^{(\alpha)})$ ) мають вигляд

$$\sigma_{ik}^{(\alpha)} = \lambda_\alpha \varepsilon_{mm}^{(\alpha)} \delta_{ik} + 2\mu_\alpha \varepsilon_{ik}^{(\alpha)} + \lambda_3 \varepsilon_{mm}^{(\delta)} \delta_{ik} + 2\mu_3 \varepsilon_{ik}^{(\delta)}. \quad (3)$$

Постійні густини  $\rho_{\alpha\alpha}$  називають парціальними густинами суміші, тоді як  $\rho_{12}$  є постійною густиною, яка описує ефект приєднаної маси і має назву коефіцієнта інерційної взаємодії. Постійна  $\beta$  має назву коефіцієнта зсувної взаємодії. Таким чином, зв'язаність системи (2) характеризується в механічній моделі суміші трьома фізичними механізмами – інерціальним, який описується параметром  $\rho_{12}$ , зсувним (пружним), який описується параметром  $\beta$ , та параметром  $\lambda_3 + 2\mu_3$ , який описує взаємний вплив деформацій однієї фази суміші на напруження в іншій фазі суміші.

*Висновок.* Система диференціальних рівнянь з частинними похідними (2) з двома невідомими функціями, залежними від двох змінних, може трактуватися як певне математичне узагальнення системи звичайних диференціальних рівнянь (1) з двома невідомими функціями, залежними від однієї змінної. Аналогія в математичній структурі систем цілком очевидна.

*Аналогія 2.*

*Задача К.* Після формулювання задачі і запису системи рівнянь (1) вводяться поняття потенціальної та кінетичної енергій системи маятників. Ці енергії мають простий вигляд квадратичних форм

$$\mathcal{K} = \beta_{11}u_{1,t}^2 + 2\beta_{12}u_{1,t}u_{2,t} + \beta_{22}u_{2,t}^2; \quad \mathcal{U} = \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^2. \quad (4)$$

Далі аналізуються обмеження на 6 фізичних постійних, які входять у систему рівнянь (1). Такі обмеження формулюються на основі фізично обґрунтованої додатності обох енергій і тоді вони записуються таким чином

$$\beta_{11} > 0; \beta_{22} > 0; \beta_{11}\beta_{22} - (\beta_{12})^2 > 0; \alpha_{11} > 0, \alpha_{22} > 0; \alpha_{11}\alpha_{22} - (\alpha_{12})^2 > 0. \quad (5)$$

Отже, 4 обмеження (5) стосуються тих постійних, які характеризують взаємодію між маятниками, і свідчать, що постійні не можуть бути довільними в рамках прийнятої моделі.

*Задача Х.* Вирази для енергій відомі і мають вигляд (зادля компактності запису введемо позначення  $a_i = \lambda_i + 2\mu_i$ )

$$\mathcal{K} = (1/2) \left[ (\rho_{11} - \rho_{12})(u_{1,t}^{(1)})^2 + 2\rho_{12}u_{1,t}^{(1)}u_{1,t}^{(2)} + (\rho_{22} + \rho_{12})(u_{1,t}^{(2)})^2 \right]; \quad (6)$$

$$\mathcal{U} = a_1(u_{1,1}^{(1)})^2 + 2a_3u_{1,1}^{(1)}u_{1,1}^{(2)} + a_2(u_{1,1}^{(2)})^2 - \beta(u_1^{(1)} - u_1^{(2)})^2 = 0. \quad (7)$$

Як випливає з формул (6), (7), аналогія з кінетичною енергією повна, однак тут потенціально енергія має дещо складніший вигляд (включає два параметри взаємодії на відміну від задачі К, де всього один параметр) і тому додатна означеність квадратичної форми вже потребує більших обмежень. Отже, аналогія працює, але кількість обмежень стає на одне більше

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}(\rho_{11} + \rho_{22}) > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_1a_2 - a_3^2 = \Delta_a > 0; \quad \beta > 0. \quad (8)$$

*Висновок.* Таким чином, аналогія щодо обмежень на параметри взаємодії дозволяє встановити такі обмеження в задачі Х. Слід зазначити, що деякі з обмежень (8) є відомими і очевидними в теорії пружності і теорії пружної суміші.

*Аналогія 3.*

*Задача К.* Розв'язок системи (1) шукається у вигляді гармонічного коливання з фазою  $\omega t$   $u_\alpha(t) = A_\alpha e^{i\omega t}$ . Підстановка цього розв'язку у систему (1) дає систему двох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих постійних амплітуд  $A_\alpha$

$$(\alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2)A_1 + (\alpha_{12} - \beta_{12}\omega^2)A_2 = 0; \quad (\alpha_{12} - \beta_{12}\omega^2)A_1 + (\alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2)A_2 = 0. \quad (9)$$

Далі процедура класична: прирівнюється детермінант системи (4) до нуля і отримується бікватратне рівняння для знаходження власних частот (так зване частотне рівняння) в задачі  $K$

$$(\beta_{11}\beta_{22} - (\beta_{12})^2)\omega^4 - (\alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{22}\beta_{11} - (\alpha_{12}\beta_{12})^2)\omega^2 + (\alpha_{11}\alpha_{22} - (\alpha_{12})^2). \quad (10)$$

*Задача X.* Тут процедура аналогічна до описаної вище для задачі  $K$ . Перш за все тому, що хвиля може розглядатися як коливання, яке поширюється в просторі. Розв'язок системи (2) шукається у вигляді гармонічної хвилі з фазою  $kx_1 - \omega t$   $u_1^{(\alpha)}(t) = A_0^{(\alpha)} e^{i(kx_1 - \omega t)}$ . Однак фази в задачах  $K$  та  $X$  суттєво різні. Тому тут доречно вже говорити про корисність використання аналогії для задачі  $X$ . Підстановка розв'язку  $u_1^{(\alpha)}(t) = A_0^{(\alpha)} e^{i(kx_1 - \omega t)}$  у систему (2) дає систему двох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих постійних амплітуд  $A_\alpha$ , яке для всіх типів хвиль називається дисперсійним рівнянням,

$$\Delta_a k^4 - 2m_2 k^2 \omega^2 + \Delta_\rho \omega^4 = 0; \quad (11)$$

$$2m_2 = a_1 \rho_{11} + a_2 \rho_{22} - \Sigma_a \left( \frac{\beta}{\omega^2} + \rho_{12} \right); \quad \Sigma_a = a_1 + a_2 + 2a_3.$$

*Висновок.* Частотне рівняння (10) є алгебраїчним бікватратним, як і дисперсійне рівняння (11). Тому детальний аналіз частотного рівняння в класичній задачі  $K$  може служити аналогом (схемою) для такого ж аналізу дисперсійного рівняння в некласичній задачі  $X$ , яка не так детально досліджена.

#### Аналогія 4.

*Задача K.* Розв'язок частотного рівняння включає 4 значення власної частоти коливної системи ( $\pm\omega_1, \pm\omega_2$ ) і тому загальний розв'язок системи (1) у вигляді гармонічних коливань записується як сума 4 коливань з довільними амплітудами, які можна визначити з 4 початкових умов (значень парціальних зміщень  $u_\alpha$  і їх швидкостей у початковий момент часу)

$$u_1(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 t} + l_2 (A_2 e^{i\omega_2 t} + \bar{A}_2 e^{-i\omega_2 t}); \quad (12)$$

$$u_2(t) = l_1 (A_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 t}) + A_2 e^{i\omega_2 t} + \bar{A}_2 e^{-i\omega_2 t}.$$

У формулі (12) введено коефіцієнти розподілу амплітуд  $l_\alpha$  за такою процедурою: розв'язок для першої (другої) власної частоти  $u_1(t) = A_1 e^{i\omega_1 t}$ ,  $u_2(t) = l_1 A_1 e^{i\omega_1 t}$  підставляється у перше (друге) рівняння системи (1), яке при цьому повинно задовольнятися тотожно, і тому

$$l_1 = -\left[ (\alpha_{11} - \beta_{11}\omega_1^2) / (\alpha_{12} - \beta_{12}\omega_1^2) \right] = -\left[ (\alpha_{12} - \beta_{12}\omega_1^2) / (\alpha_{22} - \beta_{22}\omega_1^2) \right]; \quad (13)$$

$$l_2 = -\left[ (\alpha_{22} - \beta_{22}\omega_2^2) / (\alpha_{12} - \beta_{12}\omega_2^2) \right] = -\left[ (\alpha_{12} - \beta_{12}\omega_2^2) / (\alpha_{11} - \beta_{11}\omega_2^2) \right]. \quad (14)$$

З врахуванням позначень (13), (14) розв'язок (12) можна записати стисліше через матрицю розподілу амплітуд

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ l_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 t} \\ A_2 e^{-i\omega_2 t} + \bar{A}_2 e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

*Задача X.* Розв'язок дисперсійного рівняння включає 4 власні значення довжини хвилі хвильової системи  $(\pm k_1, \pm k_2)$ . Одразу слід зазначити, що від'ємні значення хвильових чисел в теорії хвиль не мають фізичного сенсу, як і такі ж значення частот в теорії коливань. Розв'язок дисперсійного рівняння (6) записується у вигляді

$$k_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{\Delta_a} \left\{ m_2 \pm \sqrt{m_2^2 - \Delta_a \Delta_\rho} \right\} \quad \text{або}$$

$$k_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{2\Delta_a} \left\{ \begin{array}{l} a_1 \rho_{11} + a_2 \rho_{22} - \Sigma_a \left( \left( \beta / \omega^2 \right) + \rho_{12} \right) \pm \\ \sqrt{\left[ a_1 \rho_{11} + a_2 \rho_{22} - \Sigma_a \left( \left( \beta / \omega^2 \right) + \rho_{12} \right) \right]^2 -} \\ \pm \sqrt{-4\Delta_a \left[ \rho_{11} \rho_{22} - (\rho_{11} + \rho_{22}) \left( \left( \beta / \omega^2 \right) + \rho_{12} \right) \right]} \end{array} \right\}, \quad (16)$$

або у записі через фазові швидкості  $v_\alpha = (\omega/k_\alpha)$

$$v_{1,2}^2 = (1/\Delta_\rho) \left\{ m_2 \pm \sqrt{m_2^2 - \Delta_a \Delta_\rho} \right\}. \quad (17)$$

Таким чином, загальний розв'язок системи (2) у вигляді гармонічних хвиль може бути представлений як суперпозиція двох гармонічних хвиль (двох мод), які відрізняються хвильовими числами  $k_\alpha$  чи фазовими швидкостями  $v_\alpha = (\omega/k_\alpha)$

$$u_1^{(\alpha)}(x_1, t) = A_o^{(\alpha)} e^{-i(k_\alpha x - \omega t)} + l_\delta(k_\delta) A_o^{(\delta)} e^{-i(k_\delta x - \omega t)}. \quad (18)$$

У формулі (18) по аналогії з задачею *K* введено коефіцієнти розподілу амплітуд  $l_\alpha(k_\alpha)$  за такою ж процедурою: розв'язок для першої моди  $u_1(t) = A_o^1 e^{i(k_1 x - \omega t)}$ ,  $u_2(t) = l_1(k_1) A_o^1 e^{i(k_1 x - \omega t)}$  (чи другої моди  $u_1(t) = l_2(k_2) A_o^2 e^{i(k_2 x - \omega t)}$ ,  $u_2(t) = A_o^2 e^{i(k_2 x - \omega t)}$ ) підставляється у перше та друге рівняння системи (2), які при цьому повинні задовольнятися тотожно, і тому

$$l_1(k_1) = -\frac{a_1 k_1^2 - ((\rho_{11} - \rho_{12})\omega^2 + \beta)}{a_3 k_1^2 + \beta - \rho_{12} \omega^2} = -\frac{a_3 k_1^2 + \beta - \rho_{12} \omega^2}{a_2 k_1^2 - ((\rho_{22} - \rho_{12})\omega^2 + \beta)}; \quad (20)$$

$$l_1 = -\frac{a_1 k_1^2 - (\rho_{11} - \rho_{12})\omega^2 - \beta}{a_3 k_1^2 - \rho_{12} \omega^2 + \beta} = -\frac{a_3 k_1^2 - \rho_{12} \omega^2 + \beta}{a_2 k_1^2 - (\rho_{22} - \rho_{12})\omega^2 - \beta};$$

$$l_2(k_2) = -\frac{a_1 k_2^2 - ((\rho_{11} - \rho_{12})\omega^2 + \beta)}{a_3 k_2^2 + \beta - \rho_{12} \omega^2} = -\frac{a_3 k_2^2 + \beta - \rho_{12} \omega^2}{a_2 k_2^2 - ((\rho_{22} - \rho_{12})\omega^2 + \beta)}; \quad (21)$$

$$l_2 = -\frac{a_3 k_2^2 - \rho_{12} \omega^2 + \beta}{a_1 k_2^2 - (\rho_{11} - \rho_{12}) \omega^2 - \beta} = -\frac{a_2 k_2^2 - (\rho_{22} - \rho_{12}) \omega^2 - \beta}{a_3 k_2^2 - \rho_{12} \omega^2 + \beta}.$$

З врахуванням позначень (20), (21) розв'язок (18) можна записати стисліше через матрицю розподілу амплітуд

$$\begin{pmatrix} u_1^{(1)}(x_1, t) \\ u_1^{(2)}(x_1, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_2(k_2) \\ l_1(k_1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{(1)} e^{-i(k_1 x - \omega t)} \\ A_0^{(2)} e^{-i(k_2 x - \omega t)} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

*Висновок.* Формальна аналогія між представленнями розв'язків (15) і (22) існує, однак у них вже закладені відмінності, що спричиняють лише часткову можливість перенесення елементів повного аналізу задачі  $K$  у неповний на цей час аналіз задачі  $X$ . Тому доцільно далі розглянути кожен елемент зокрема.

*Аналогію 4* доцільно доповнити двома особливостями щодо залежності хвильових чисел мод від частоти, які не присутні в задачі  $K$  і пов'язані з суттєвою дисперсивністю цих мод в області частот, що прилягає до частоти запирання. Ці особливості складно виявити аналітично розглядаючи вирази для хвильових чисел (16). Однак при числовому аналізі на конкретних матеріалах особливості є чіткими і виразними. Тому проводився такий аналіз на ряді гранульованих композитних матеріалів. Були вибрані три матеріали з однаковими об'ємними концентраціями гранул у матриці  $c = 0,2$ :

матеріал 1 – гранули сталеві та матриця полістирольова;

матеріал 2 – гранули мідні та матриця молібденова;

матеріал 3 – гранули вольфрамові та матриця молібденова.

Таблиця з необхідними даними відповідає монографії [12] і пропонується нижче.

матеріал	$\rho_{11}$	$\rho_{22}$	$\rho_{12}$	$\lambda_1 + 2\mu_1$	$\lambda_2 + 2\mu_2$	$\lambda_3 + 2\mu_3$	$\beta$
1	0,156	0,084	0	0,108	0,3202	0,1298	0,0613
2	0,179	0,816	0	1,096	38,29	6,26	2,57
3	0,756	0,612	0	0,895	0,225	0,1298	0,2812

Для вказаних трьох матеріалів побудовано графіки залежності хвильових чисел обох хвильових мод від частоти в діапазоні від малих частот до таких великих частот, де ще застосовна модель суміші вірна. На всіх графіках першій моді відповідає крива, задана у всій області частот, а другій моді – крива, задана в області, яка починається з частоти запирання (рис. 1 – 3).

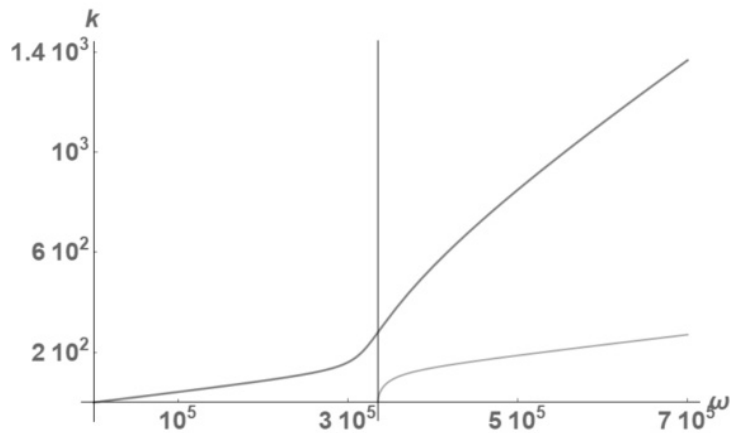


Рис. 1

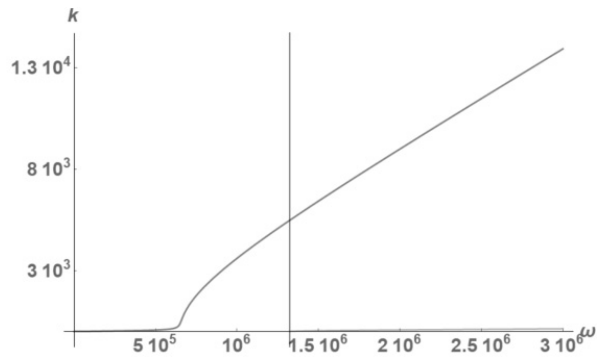


Рис. 2

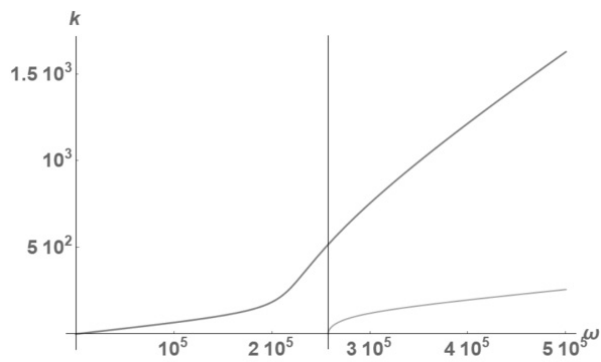


Рис. 3

*Особливість 1.* Ця особливість стосується залежності хвильових чисел двох мод від частоти. Основна увага тут акцентується на дисперсивності хвильових мод. Всі три графіки показують існування ділянок з лінійною залежністю мод від частоти і ділянок сильної нелінійної залежності. Як відомо, лінійна залежність свідчить про відсутність дисперсії при поширенні хвилі. Отже, графіки свідчать, що лише в одній порівняно невеликій області зміни частоти обидві моди суттєво дисперсивні (для першої моди ця область симетрично охоплює частоту запирання, тоді як для другої моди область дисперсивності прилягає до частоти запирання лише справа).

*Особливість 2.* Дуже часто в теорії хвиль криві залежності хвильових чисел від частоти за класичною формулою  $v_\alpha = (\omega/k_\alpha)$  переводять у криві залежності фазових швидкостей мод від частоти і саме такі криві називають дисперсійними кривими. Дисперсійні криві, які відповідають графікам з рис. 1 – 3, показані на рис. 4 – 6.

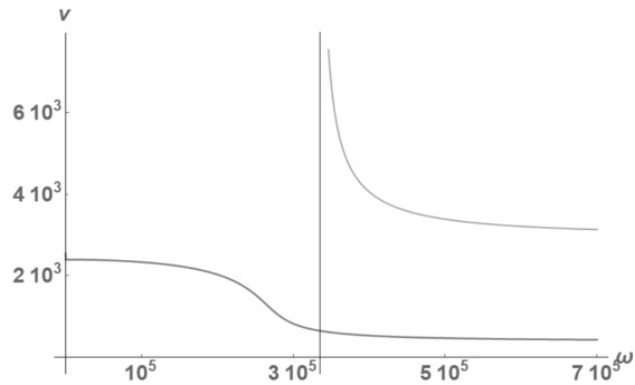


Рис. 4

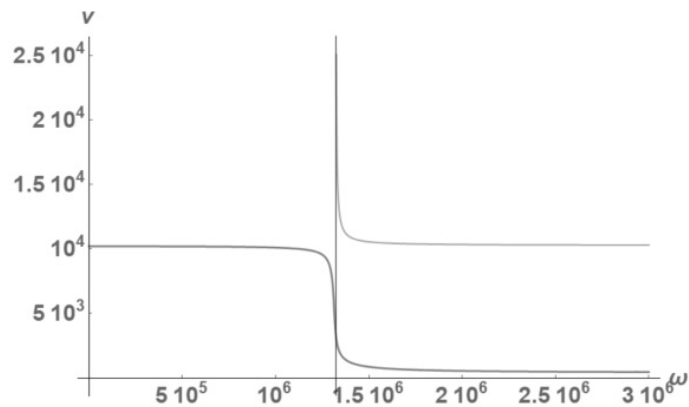


Рис. 5

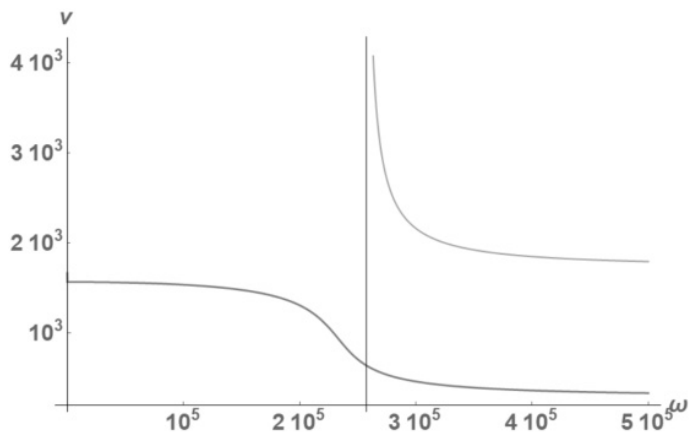


Рис. 6

Перш за все, слід відзначити відмінність між модами, яка виразно виявляється на дисперсійних кривих і полягає у тому, що перша мода є повільною порівняно з другою, яку можна називати швидкою (для частот вищих від частоти запирання, де обидві моди існують одночасно, значення швидкості завжди суттєво менші у першій моді порівняно з другою)

Основний висновок з розглянутих особливостей є таким, що повний аналіз дисперсійного рівняння виходить за межі аналогії між аналізом частотного рівняння в задачі  $K$  і дисперсійного рівняння в задачі  $X$ .

*Аналогія 5.*

*Задача K.* Одним з головних елементів аналізу є введення парціальних частот і дослідження частотного рівняння на предмет взаємозв'язку між власними і парціальними частотами. Парціальними частотами тут називають частоти  $n_\alpha = \sqrt{\alpha_{\alpha\alpha}/\beta_{\alpha\alpha}}$ , які властиві для окремо взятих незв'язаних маятників (тобто, є власними для таких маятників). Вказаний взаємозв'язок аналізується за допомогою трактування частотного рівняння (10) як опуклої вниз параболи  $\Phi(\omega)$ , яка перетинає вісь  $O\omega$  в точках, що відповідають власним частотам. Для цього на основі частотного рівняння вибирається функція, яка визначається частотним рівнянням

$$\Phi(\omega) = (\beta_{11}\beta_{22} - (\beta_{12})^2)\omega^4 - (\alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{22}\beta_{11} - (\alpha_{12}\beta_{12})^2)\omega^2 + (\alpha_{11}\alpha_{22} - (\alpha_{12})^2), \quad (23)$$

з аналізу якої випливає, що



$$\Phi(0) > 0; \Phi(n_\alpha) = -[\beta_{12}(\alpha_{\alpha\alpha}/\beta_{\alpha\alpha}) - \alpha_{12}]^2 < 0 \quad (24)$$

і далі важливий факт, що парціальні частоти лежать між власними

$$\omega_1 < n_1 < n_2 < \omega_2. \quad (25)$$

Цей факт трактується так, що внесення (чи існування) взаємодії між маятниками, призводить до більшої відмінності між власними частотами (і чим більша взаємодія, тим більша відмінність).

*Задача X.* Тут аналогом парціальних частот є парціальні хвильові числа

$$k_{P\alpha} = \omega \sqrt{\rho_{\alpha\alpha} / (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)}. \quad (26)$$

Відповідний до (26) графік є прямою лінією, яка проходить під певним кутом до осі абсцис (осі частот) через початок координат і свідчить про недисперсивність відповідних хвиль у суміші двох компонентів, які не взаємодіють (така ситуація є можливою реально, коли хвилі дуже довгі чи частоти дуже малі в порівнянні зі структурою суміші). Однак для сумішей із взаємодіючими компонентами дисперсійне рівняння (11) дає розв'язки, які відповідають дисперсивним хвильовим модам. Крім того, ці моди не рівноправні (що спостерігається в задачі *K*). Перша мода існує для усіх допустимих моделей частот, тоді як друга мода існує лише в діапазоні частот, що починається з певної частоти

$$\omega_{cut} = \sqrt{\beta(\rho_{11} + \rho_{22}) / [\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}(\rho_{11} + \rho_{22})]}. \quad (27)$$

Частоту  $\omega_{cut}$ , при якій біжуча хвиля переходить у експоненціально затухаючу, називають частотою запирання або частотою відсікання. Ця частота не є постійною і залежить від парціальних густин суміші та коефіцієнта інерціальної взаємодії. Отже, аналогія не є прямою.

Розглянемо функцію, пов'язану з дисперсійним рівнянням

$$M_1^{(m)} k^4 - 2M_2^{(m)} k^2 \omega^2 + M_3^{(m)} \omega^4 = 0. \quad (28)$$

Графіком цієї функції є парабола, яка перетинає вісь  $Ok$  в точках, що відповідають хвильовим числам описаних вище двох мод. Оскільки  $\Psi(0) = \Delta_\rho$ , то парабола змінює напрямок опуклості при переході значення частоти через значення частоти запирання, зовсім не подібно до того, як це є в задачі *K*. Порахуємо далі значення функції в точках, що відповідають парціальним хвильовим числам (зادля компактності запису введемо позначення  $a_i = \lambda_i + 2\mu_i$

$$\Psi(k_{P\alpha}) = -\omega^4 \left\{ \begin{aligned} & (a_3/a_\alpha)^2 (\rho_{\alpha\alpha})^2 + [(a_1 + a_2 + 2a_3)/a_\alpha] [(\beta/\omega^2) + \rho_{12}] \rho_{\alpha\alpha} + \\ & + (\rho_{11} + \rho_{22}) [(\beta/\omega^2) + \rho_{12}] \end{aligned} \right\} < 0. \quad (29)$$

*Висновок.* Таким чином, і у цьому випадку аналогія діє. Однак задача *X* має деякі новели, як от залежність мод від частоти чи запирання однієї з мод чи одночасне існування обох хвильових мод у кожному компоненті суміші. Тому подальший аналіз ускладнюється.

*Аналогія б.*

*Задача K.* Важливим елементом класичного аналізу є встановлення умов, при яких синфазні коливання двох маятників змінюються на антифазні. Фактично, це початкові умови для системи (1).

*Задача X.* Оскільки в цій задачі аналогом двох коливань із задачі *K* є коливання частинок-компонентів суміші, які відбуваються за модою 1 та модою 2 одночасно, то такі коливання теж можуть бути синфазними чи антифазними. Індикатором переходу

від синфазних коливань до антифазних є знаки коефіцієнтів розподілу амплітуд. Тобто, зміна знаку цих коефіцієнтів при зміні частоти свідчить саме про такий перехід.

Таким чином, оскільки в задачі  $X$  початкових умов немає, то джерелом переходу є зміна значення частоти. Тому слід розглядати вирази (20), (21) для коефіцієнтів розподілу амплітуд як функції частоти. Перш за все, виникає питання, чи не змінюють знак ці функції на діапазоні частот  $\omega \in [0; \infty)$ .

Виберемо для простоти модель суміші, де не враховується інерційна взаємодія, і розглянемо функцію (коефіцієнт матриці розподілу моди 1)  $l_1(\omega)$  і визначимо її знак при прямуванні частоти до нуля

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} l_1(k_1) = -\frac{a_1 k_1^2 - (\rho_{11} \omega^2 + \beta)}{a_3 k_1^2 + \beta} = -\frac{a_3 k_1^2 - \beta}{a_2 k_1^2 - (\rho_{22} \omega^2 - \beta)} = l_{1,0}(k_{1,0}). \quad (30)$$

Відомо, що  $k_{1,0} = k_1(0) = 0$  (це підтверджують графіки на рис. 1 – 3). Тоді

$$l_{1,0}(k_{1,0}) = -\frac{-\beta}{\beta} = +1. \quad (31)$$

Отже, знак додатний.

Далі розглянемо знак функції  $l_1(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Для цього спочатку вирахуємо границю функції  $k_1^2(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{2\Delta_a^2} \left\{ a_1 \rho_{11} + a_2 \rho_{22} - \Sigma_a \frac{\beta}{\omega^2} - \sqrt{\left( \rho_{22} a_1 \rho_{11} + a_2 \rho_{22} - \Sigma_a \frac{\beta}{\omega^2} \right)^2 - 4\Delta_a \left[ \rho_{11} \rho_{22} - (\rho_{11} + \rho_{22}) \frac{\beta}{\omega^2} \right]} \right\}.$$

Підстановка цього виразу у формулу для  $l_1(\omega)$  дає

$$l_{1\infty}(k_{1\infty}) = -\frac{a_1 k_{1\infty}^2 - (\rho_{11} \omega^2 + \beta)}{a_3 k_{1\infty}^2 + \beta} = -1 + \frac{\rho_{11}}{a_3} \frac{1}{2\Delta_a} \left[ a_1 \rho_{11} + a_2 \rho_{22} - \sqrt{[a_1 \rho_{11} + a_2 \rho_{22}]^2 - 4\Delta_a \rho_{11} \rho_{22}} \right]. \quad (32)$$

Якщо врахувати порядки значень густин  $10^3$  та пружних постійних  $10^{10}$ , то другий доданок в (32) на багато порядків менший 1. Отже, знак виразу (32) від'ємний.

Таким чином, коефіцієнт розподілу амплітуд  $l_1(k_1)$  змінює знак зі зміною частоти на проміжку  $\omega \in [0; \infty)$ , з чого випливає, що функція  $l_1(k_1)$  має хоча б один нульовий корінь на цьому проміжку.

Це свідчить про те, що на малих частотах два різні компоненти-частинки суміші коливаються синфазно, а при великих частотах ці коливання стають антифазними.

Для підтвердження спостереженої особливості коефіцієнтів  $l_\alpha(k_\alpha)$  були проведені числові розрахунки для матеріалів з таблиці (графіки розміщені у тому ж порядку, що і на рис. 1 – 6). Рис. 7 – 9 показують графіки залежності цих коефіцієнтів від частоти. Тут слід зазначити, що коефіцієнт  $l_1(k_1)$  визначений для всіх значень частоти з тим обмеженням, що починаючи з певної частоти (певної довжини хвилі, яка співрозмірна з діаметром гранули) континуальна теорія суміші вже некоректна. Коефіцієнт  $l_2(k_2)$  заданий для частот, починаючи зі значення, рівного частоті відсікання другої моди.

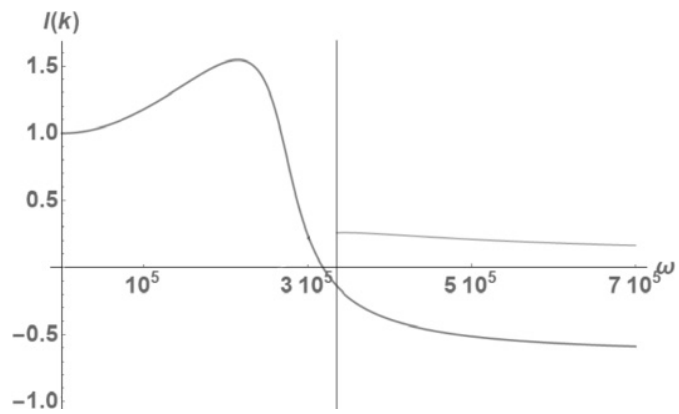


Рис. 7

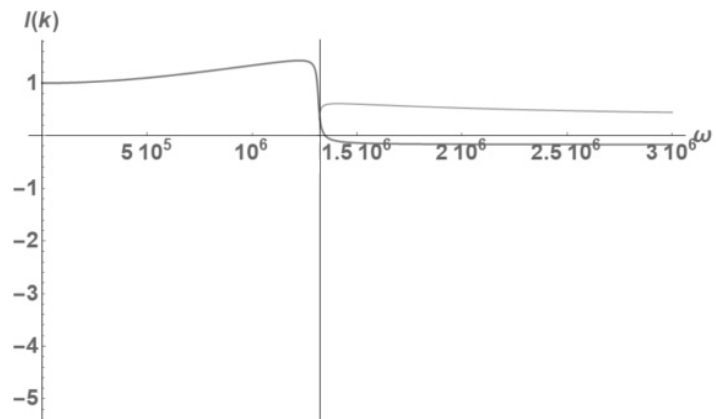


Рис. 8

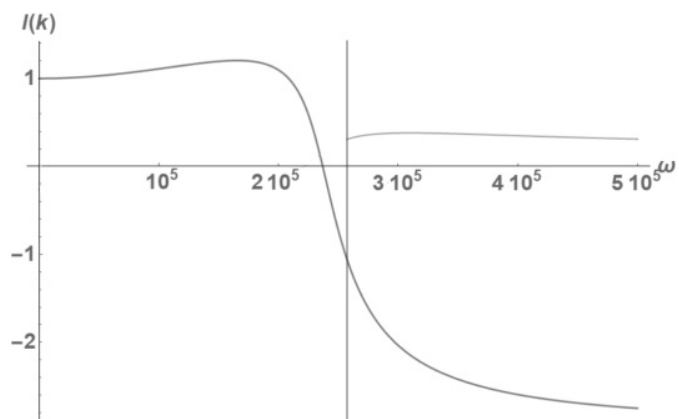


Рис. 9

Ці графіки свідчать, що коефіцієнт  $l_1(k_1)$  дійсно змінює знак в околі частоти відсікання.

*Висновок.* Таким чином, перша і друга моди практично завжди генерують антифазні коливання компонентів суміші. Аналогія з задачею К працює.

### Загальний висновок.

Теорія двофазних сумішей у своєму розвитку в області теорії хвиль може успішно використовувати аналогії з відповідних задач теорії коливань двох взаємозв'язаних коливних систем. З показаних аналогій випливає більш загальний факт, що виявлений майже 100 років тому академіком Мандельштамом механізм взаємодопомоги в теорії коливань за цей час розширив свій вплив і на теорію хвиль. Якщо коментувати спостережені аналогії більш загально, то теорія хвиль у своєму розвитку може успішно використовувати аналогії з відповідних розділів теорії коливань.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** З метою виявлення аналогій в процедурах аналізу описано та прокоментовано дві задачі: класичну задачу (задачу К) про гармонічні коливання двох зв'язаних між собою абсолютно твердих тіл, підвішених на пружинах, і неklasичну задачу (задачу Х) про поширення плоских поздовжніх хвиль у двофазній пружній суміші. Побудовано ряд аналогій між цими задачами, які описані у вигляді 6 кроків порівняльного аналізу задач К та Х, кожен з яких відповідає певній конкретній аналогії. Акцентовано увагу на корисність спостережених аналогій для аналізу задачі про хвилі. Отже, показано, що теорія двофазних сумішей у своєму розвитку в області теорії хвиль може успішно використовувати аналогії з відповідних задач теорії коливань двох взаємозв'язаних коливних систем. З показаних аналогій випливає більш загальний факт, що виявлений майже 100 років тому академіком Мандельштамом механізм взаємодопомоги в теорії коливань за цей час розширив свій вплив і на теорію хвиль.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** коливання двох взаємозв'язаних тіл, поширення пружної плоскої хвилі в двофазній суміші, аналогії в процедурах аналізу.

1. Академик Л.И. Мандельштам. К 100-летию со дня рождения. – Москва: Наука 1979. – 312 с.
2. Руцицкий Я.Я. Элементы теории смеси (Elements of the theory of mixtures). – Киев:Наук. думка, 1991. – 160 с.
3. Руцицкий Я.Я., Цурнал С.И. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою (Waves in materials with the microstructure). – Київ: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
4. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. 2-е изд. – Москва: Наука, 1964. – 440 с.
5. Guz I.A., Rushchitskii Y.Y. Comparison of mechanical properties and effects in micro-and nanocomposites with carbon fillers (carbon microfibers, graphite microwhiskers, and carbon nanotubes) // Mechanics of Composite Materials. – 2004. – 40, N3. – P. 179 – 190.
6. Mason W.P. Electrical and Mechanical Analogies // Bell System Technical J. – 1941. – 20, N 4. – P. 405 – 414.
7. Morge L., Mercier-Dequidt C. A new analogy between mechanics and electricity: pupil's misconceptions, physical quantities and electrical components // Laboratoire ACTé EA 4281. – 2012. – ESPE Clermont-Auvergne, Clermont Université, Université Blaise Pascal, France.
8. Réti P., Ropolyi L. Analogies between point mechanics and chemical reaction kinetics // Reaction Kinetics and Catalysis Letters. – 1984. – 25. – P. 109 – 113.
9. Nowacki W. Teoria sprężystości. – Warszawa: PWN, 1970. – 769 s.
10. Rushchitsky J.J. Theory of waves in materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 270 p. (free text-book in BookBooN.com).
11. Schmitz T.L., Smith K.S. Mechanical Vibrations. Modeling and Measurement. 2<sup>nd</sup> ed. – New York: Springer, 2021. – 426 p.
12. Viennot L. Reasoning in Physics. – Bruxelles: De Boeck, 1996. – 345 p.

Надійшла 03.03.2020

Затверджена до друку 18.03.2021